

一维带限 Weierstrass 分形粗糙面透射波散射系数特征研究

任新成^{1,2}, 郭立新¹

(1. 西安电子科技大学理学院, 陕西 西安 710071;

2. 延安大学物理与电子信息学院, 陕西 延安 716000)

摘要: 采用一维归一化带限 Weierstrass 函数模拟一维分形粗糙面, 根据微扰法研究了粗糙面下方介质 2 中的电磁散射, 结合分形粗糙面的自相关函数和功率谱导出了不同极化状态下一维带限 Weierstrass 分形粗糙面透射波散射系数计算公式, 通过数值计算得出了不同极化状态下一维带限 Weierstrass 分形粗糙面透射系数的分形特征、基本特征、分区特征和随频率变化特征。结果表明分维、粗糙面高度起伏均方根和入射波频率对分形粗糙面透射波散射系数有显著影响, 在其他条件不变的情况下, 分维越大、粗糙面高度起伏均方根越大、入射波频率越大, 透射系数就越大。

关键词: 电磁散射; 一维带限 Weierstrass 分形粗糙面; 微扰法; 透射系数

中图分类号: TN011 **文献标识码:** A **文章编号:** 1001-2400(2007)04-0590-06

Investigation of characteristics of transmission coefficient from the 1-D band-limited Weierstrass fractal rough surface

REN Xin-cheng^{1,2}, GUO Li-xin¹

(1. School of Science, Xidian Univ., Xi'an 710071, China; 2. College of Physics and Electronic Information, Yan'an Univ., Yan'an 716000, China)

Abstract: The 1-D fractal rough surface is simulated by employing the 1-D normalized band-limited Weierstrass function, the electromagnetic scattering in medium 2 under a rough surface is investigated and the formulae for the transmission coefficients for different polarizations are presented according to the Small Perturbation Method by considering the autocorrelation function and spectrum of the fractal surface. The fractal characteristics, the basic characteristics, the zonal characteristics and the characteristics with the variation with the frequency of the transmission coefficient from the 1-D band-limited Weierstrass fractal rough surface for different polarizations are obtained by numerical calculation. The numerical results show that the influence of the fractal dimension, the rms of rough surface and the incident frequency on the transmission coefficients of the fractal surface is great and obvious, and in case that other conditions are stationary, the fractal dimension, the rms of rough surface and the incident frequency would be greater, and the transmission coefficient would also be greater.

Key Words: electromagnetic scattering; 1-D band-limited Weierstrass fractal rough surface; the small perturbation method; transmission coefficient

随机粗糙表面电磁散射的理论和实验研究近年来取得了一系列重要的进展, 许多理论和工程上的问题需要对粗糙面的电磁散射问题进行研究^[1~5], 粗糙面散射理论在雷达目标成像、无线通讯、固体物理、遥感、辐射定标、天文学、声学、光学散射等领域都有着广泛的应用。

在过去的粗糙面散射研究中, 通常采用特定的周期函数或随机函数作为粗糙表面的数学模型。但在自然界中粗糙面既非纯周期也非完全随机的, 从统计意义上来讲, 一般的一维随机粗糙面在一定的标度区间也都存在着自相似性或自仿射性, 它具有分形的特点^[6,7], 随着一维粗糙面粗糙程度的加大, 分维数从 1 向 2 增

收稿日期: 2006-10-12

基金项目: 国家自然科学基金资助(60571058); 国家部委科技预研基金资助(51403020505DZ0111)

作者简介: 任新成(1967-), 男, 延安大学副教授, 西安电子科技大学博士研究生。

大. 另外一般的粗糙面散射问题往往需要求解一些非线性微分方程, 而且很难找到闭式解, 以往的方法都是通过寻找渐近解来替代真实解, 而采用分形的方法有可能便于问题的简化. 事实上, 对于一个真实的粗糙表面, 如果它的统计规律同分形粗糙面相类似或相近, 就可以采用一定的数学处理, 用模拟的分形粗糙面来替代真实的粗糙面, 由此得出的散射场也会符合实际的, 这也是国内外众多的学者开展分形粗糙面电磁散射研究的原因.

近年来有关粗糙面散射的研究较多, 但在这些研究中, 研究粗糙面、包括分形粗糙面上方的介质(介质 1)中的电磁散射居多^[8~12], 而研究粗糙面下方介质(介质 2)中的电磁散射则相对较少, 也有少量的研究^[13,14], 研究分形粗糙面下方介质 2 中的电磁散射则更少. 笔者采用一维归一化带限 Weierstrass 函数作为粗糙表面的模型, 利用微扰法研究该分形粗糙面透射系数的分形特征、基本特征、分区特征与随频率变化的特征.

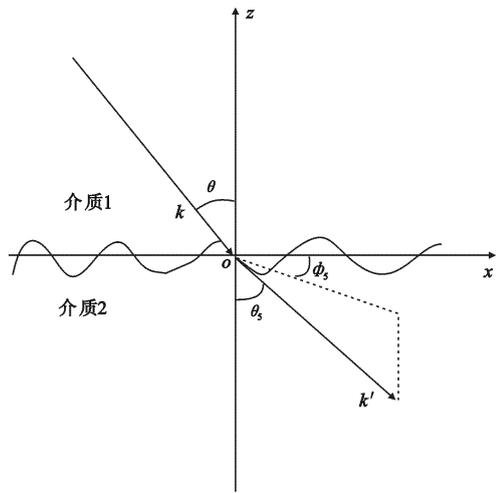


图 1 粗糙面透射问题几何示意图

1 微扰法近似和分形粗糙面模型

如图 1 所示为粗糙面透射问题几何示意图. 对于一个高斯粗糙表面, 当 $k\delta < 0.32, 2^{1/2}\delta/l < 0.3$, 其中 k 为入射电磁波波数, δ 是粗糙面高度起伏均方根, l 是高度起伏相关长度, 根据微扰法理论^[2], 在介质 2 中, 水平极化入射波的透射系数为

$$\sigma'_{pq} = 8 \left| k k' \delta \cos \theta \cos \theta_s \alpha'_{pq} \right|^2 W(k_x + k \sin \theta, k_y) / \eta_r \quad (1)$$

其中极化系数 α'_{pq} 分别为

$$\alpha'_{hh} = - \{ (\mu_r - 1) [k_z \cos \phi_s (\mu_r \epsilon_r - \sin^2 \theta)^{1/2} + (\mu_r \epsilon_r)^{1/2} \sin \theta \sin \theta_s] + \mu_r (\epsilon_r - 1) \cos \phi_s \} \times \left(k_z + \frac{\cos \theta_s}{\eta_r} \right)^{-1} \times [\mu_r \cos \theta + (\mu_r \epsilon_r - \sin^2 \theta)^{1/2}]^{-1} \quad (2)$$

$$\alpha'_{vh} = - [(\mu_r - 1) (\mu_r \epsilon_r - \sin^2 \theta)^{1/2} + \mu_r (\epsilon_r - 1) k_z] \sin \phi_s \times \eta_r (k_z + \eta_r \cos \theta_s)^{-1} [\mu_r \cos \theta + (\mu_r \epsilon_r - \sin^2 \theta)^{1/2}]^{-1} \quad (3)$$

在介质 2 中, 垂直极化入射波的透射系数为

$$\sigma'_{pq} = 8 \eta_r \left| k k' \delta \cos \theta \cos \theta_s \alpha'_{pq} \right|^2 W(k_x + k \sin \theta, k_y) \quad (4)$$

其中极化系数 α'_{pq} 分别为

$$\alpha'_{vv} = - \{ (\epsilon_r - 1) [k_z \cos \phi_s (\mu_r \epsilon_r - \sin^2 \theta)^{1/2} + (\mu_r \epsilon_r)^{1/2} \sin \theta \sin \theta_s] + \epsilon_r (\mu_r - 1) \cos \phi_s \} \times (k_z + \eta_r \cos \theta_s)^{-1} [\epsilon_r \cos \theta + (\mu_r \epsilon_r - \sin^2 \theta)^{1/2}]^{-1} \quad (5)$$

$$\alpha'_{hv} = [(\epsilon_r - 1) (\mu_r \epsilon_r - \sin^2 \theta)^{1/2} + \epsilon_r (\mu_r - 1) k_z] \sin \phi_s \times \frac{1}{\eta_r} \left(k_z + \frac{\cos \theta_s}{\eta_r} \right)^{-1} [\epsilon_r \cos \theta + (\mu_r \epsilon_r - \sin^2 \theta)^{1/2}]^{-1} \quad (6)$$

以上各式中 θ 为入射角, θ_s 和 ϕ_s 分别为透射波的散射角和方位角, ϵ_r 和 μ_r 分别为介质 2 对介质 1 的相对介电常数和相对磁导率, η_r 为介质 2 对介质 1 的特性阻抗, k' 为电磁波在介质 2 中的波数, 且

$$k' = k (\mu_r \epsilon_r)^{1/2} \quad (7)$$

$$\eta_r = (\mu_r / \epsilon_r)^{1/2} \quad (8)$$

$$k_x = - k' \sin \theta_s \cos \phi_s \quad (9)$$

$$k_y = - k' \sin \theta_s \sin \phi_s \quad (10)$$

$$k_z = (1 - \mu_r \epsilon_r \sin^2 \theta_s)^{1/2} \quad (11)$$

已知重要的一维分形函数是带限 Weierstrass-Mandelbrot 函数, 它是从 Weierstrass 函数衍生而来的, 它具有一定的内、外尺度, 以保证在一定区间内保持分形的主要特征. 一维带限 Weierstrass-Mandelbrot 分形

粗糙面^[6,7]具有如下形式

$$f(x) = \frac{2^{1/2} \delta [1 - b^{(2D-4)}]^{1/2}}{[b^{(2D-4)N_1} - b^{(2D-4)(N_2+1)}]^{1/2}} \sum_{n=N_1}^{N_2} b^{(D-2)n} \cos(2\pi s b^n x + \varphi_n) \quad (12)$$

式中 δ 为粗糙面高度起伏均方根, b 为空间基频, D 为分维数 ($1 < D < 2$), s 为标度因子 ($s = K/2\pi$, K 为空间波数), φ_n 为 $(0, 2\pi)$ 上均匀分布的随机相位, 该函数具有零均值. 一般取 $b > 1$, b 为有理数时, $W(x)$ 表现为周期函数; b 为无理数时, $W(x)$ 为准周期函数. 标度因子 s 决定频谱位置, $W(x)$ 的无标度区间一般取 $[(K/(2\pi))b^{N_1}]^{-1}$ 和 $[(K/(2\pi))b^{N_2}]^{-1}$, $N = N_2 - N_1 + 1$. 随着 N 的增加, 越来越多的频率分量加到准周期上. 当分维 D 增加时, 高频分量比重加大, 低频分量作用减小. 由于自然界中实际的粗糙表面一般既不是纯随机的也不是完全纯周期的, 且经常是各向异性的, 因此式(12)所给的分形函数能较好地反映自然界中粗糙面的物理特性, 是较好的物理模型.

一维带限 Weistrass-Mandelbrot 函数的自相关函数可表示为

$$\rho(\tau) = \langle f(x+\tau)f(x) \rangle = \left\{ \frac{\delta^2 [1 - b^{(2D-4)}]}{[b^{(2D-4)N_1} - b^{(2D-4)(N_2+1)}]} \right\} \sum_{n=N_1}^{N_2} b^{(2D-4)n} \cos(2\pi s b^n \tau) \quad (13)$$

其功率谱密度是自相关函数的 Fourier 变换, 它可以表示为

$$W(K) = \frac{\delta^2 [1 - b^{(2D-4)}]}{[b^{(2D-4)N_1} - b^{(2D-4)(N_2+1)}]} \sum_{n=N_1}^{N_2} \frac{\delta(K - s b^n)}{b^{2(D-2)n}} \quad (14)$$

其中 $\delta(K - s b^n)$ 为 Dirac 函数, 如令 $K = s b^n$, 则功率谱是一个离散谱. 当 $b \rightarrow 1$ 时, 采用连续近似方法^[15], 该功率谱可写为

$$W(K) = \frac{\delta^2 [1 - b^{(2D-4)}] (K/(2\pi))^{-(2D-4)}}{2[b^{(2D-4)N_1} - b^{(2D-4)(N_2+1)}] \ln b} K^{2D-5} \quad (15)$$

分形函数具有负幂律谱, 所以凡具有负幂律谱的过程都可用分形函数来模拟.

如果粗糙表面高度起伏可以用式(12)来表示, 将式(15)分别代入式(1)和式(4), 则介质 2 中水平极化入射波的透射系数可以表示为

$$\sigma'_{pq} = 8 \left| k k' \delta \cos \theta \cos \theta_s \alpha'_{pq} \right|^2 \frac{\delta^2 [1 - b^{(2D-4)}] (K/(2\pi))^{-(2D-4)}}{2[b^{(2D-4)N_1} - b^{(2D-4)(N_2+1)}] \ln b} \cdot K^{2D-5} / \eta_r \quad (16)$$

介质 2 中垂直极化入射波的透射系数可以表示为

$$\sigma'_{pq} = 8 \eta_r \left| k k' \delta \cos \theta \cos \theta_s \alpha'_{pq} \right|^2 \frac{\delta^2 [1 - b^{(2D-4)}] (K/(2\pi))^{-(2D-4)}}{2[b^{(2D-4)N_1} - b^{(2D-4)(N_2+1)}] \ln b} \cdot K^{2D-5} \quad (17)$$

根据微扰法近似, 式(16), (17)中的 K 应为

$$K = -k' \sin \theta_s \cos \phi_s + k \sin \theta \quad (18)$$

此时散射系数定义为

$$\sigma^0 = 10 \log \sigma'_{pq} \quad (19)$$

由式(16)~(19)可以看出, 无论是哪种极化状态下的透射波, 在入射频率 f 、入射角 θ 一定的条件下, 散射系数 σ^0 随散射角 θ_s 、散射方位角 ϕ_s 的变化规律, 既受分维 D 及其他分形描述量的影响, 同时又受介质介电常数与粗糙面参数的影响. 以下通过数值计算的方法得出结果并对透射系数的特征进行分析.

2 数值计算结果

主要利用式(16)~(19)讨论折射面内 ($\phi_s = 0$) 分维 D 及其他分形描述量、介质参数与粗糙面参数对透射系数的影响. 此时, 在透射介质中, 由于交叉极化系数为 0, 所以交叉极化对应的透射系数为 0, 只存在同极化的透射系数, 以水平(HH)极化为例予以说明.

以下进行数值计算时, 部分参数取值一定, 它们分别是: 入射频率 $f = 10$ GHz, 介质 2 相对介质 1 的磁导率 $\mu_r = 1$, 入射角 $\theta = 30^\circ$.

2.1 分维等分形描述量对透射系数的影响

(1) 分维对透射系数的影响 取 $\delta = 0.1/k$, $\epsilon = 1.6$, $N_1 = 0$, $N_2 = 9$, 分别取 $D = 1.05$, $D = 1.30$, $D =$

1.50, $D = 1.67, D = 1.95$, 研究分维对透射系数的影响, 数值计算结果如图 2 所示。

从图 2 可以看出, 不同分维对应曲线的区别是很明显的, 分维对透射系数的影响很大, 在其他条件不变的情况下, 分维越大, 透射系数就越大, 图 4 中曲线的波峰对应的散射角即为根据斯涅耳定律 (snell) 计算出的折射角, 图 3~图 7 中曲线的波峰对应的散射角亦为折射角, 后文不再说明。

分维越大, 粗糙面粗糙程度越大, 电磁波在介质 1 中的漫散射和镜向散射分量减小, 因而透射分量增大, 所以分维越大, 透射系数就越大。

(2) 标度区间 N (谐波次数) 对透射系数的影响 取 $\delta = 0.1/k, \epsilon = 1.6, D = 1.65, b = 1.2, N_1 = 0$, 分别取 $N_2 = 9, N_2 = 50$, 研究标度区间 N 对透射系数的影响, 数值计算结果如图 3 所示。

从图 3 可以看出, $N_2 = 9, N_2 = 50$ 对应的曲线基本重合, 可见标度区间 N (谐波次数) 对透射系数的影响比较小, 所以在下文中取 $N_1 = 0, N_2 = 9$ 。

根据式 (12) 及大量数值计算结果, 当标度区间 N (谐波次数) 的取值达到某一值后, 式 (12) 所对应的一维带限 Weierstrass-Mandelbrot 分形粗糙面的粗糙程度变化很小, 所以标度区间 N (谐波次数) 对透射系数的影响比较小。

(3) 空间基频对透射系数的影响 取 $\delta = 0.1/k, \epsilon = 1.6, D = 1.65$, 分别取 $b = 1.2, b = 1.5$, 研究空间基频对透射系数的影响, 数值计算结果如图 4 所示。

从图 4 可以看出, $b = 1.2, b = 1.5$ 对应的曲线区别不太大, 对于确定的散射角, b 越大, 透射系数幅值越小, 可见空间基频对透射系数有一定影响。根据文献 [15] 所述条件, 下文中取 $b = 1.1$ 。

根据式 (12) 及数值计算, 空间基频越大, 粗糙面空间周期越小、均方根斜率越大, 但粗糙面高度起伏均方根减小, 总体上表现为粗糙面的粗糙程度减小, 所以空间基频越大, 透射系数幅值越小。

2.2 粗糙面高度起伏均方根对透射系数的影响

取 $\epsilon = 1.6, D = 1.5$ 分别取 $\delta = 0.01/k, \delta = 0.05/k, \delta = 0.1/k, \delta = 0.2/k$, 研究粗面高度起伏均方根对透射系数的影响, 数值计算结果如图 5 所示。

从图 5 可以看出, $\delta = 0.01/k, \delta = 0.05/k, \delta = 0.1/k, \delta = 0.2/k$ 对应的曲线区别是很明显的, 粗糙面高度起伏均方根 δ 严重影响散射系数的大小, 在其他条件不变的情况下, δ 越大, 透射系数 σ^0 越大。

粗糙面高度起伏均方根越大, 粗糙面粗糙程度就越大, 电磁波在介质 1 中的漫散射和镜向散射分量减小, 因而透射分量增大, 所以粗糙面高度起伏均方根越大, 透射系数越大。

3 透射系数的特征分析

根据上节中的数值计算结果, 可得到一维 Weierstrass 分形粗糙面透射系数的分形特征和基本特征。

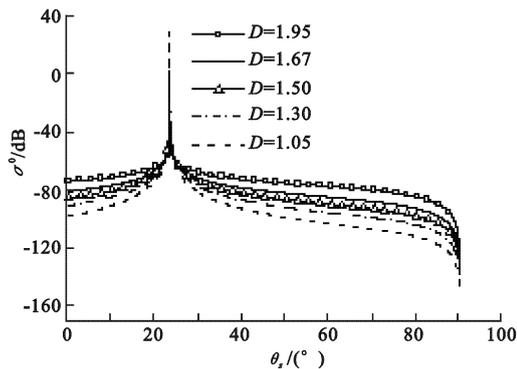


图 2 分维对透射系数的影响

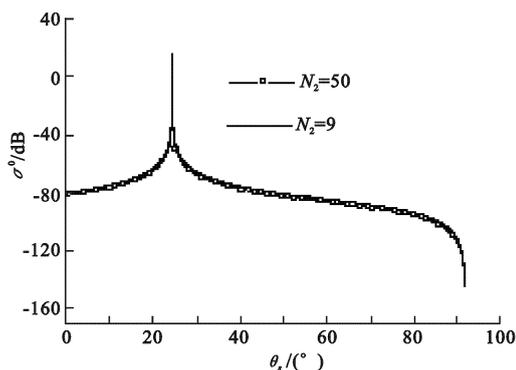


图 3 标度区间 N (谐波次数) 对透射系数的影响

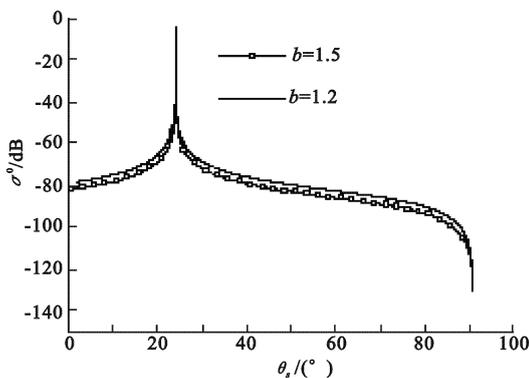


图 4 空间基频对透射系数的影响

3.1 分形特征

(1) 分维对透射系数的影响很大,在其他条件不变的情况下,分维越大,透射系数 σ° 就越大,所以在用分形粗糙面代替真实粗糙面时,一定要注意选择合适的分维;

(2) 标度区间 N (谐波次数)对透射系数的影响比较小,所以在一般情况下可取 $N_1 = 0, N_2 = 9$;

(3) 空间基频对透射系数有一定的影响,根据文献[15]所述条件,在一般情况下取 $b = 1.1$.

3.2 基本特征

粗糙面高度起伏均方根仅严重影响透射系数的大小,在其他参数不变的条件下, δ 越大,透射系数 σ° 越大.

关于介质介电常数对透射系数的影响,数值计算结果表明没有固定的规律可循,这可能与所取的参数有关,透射系数随介质介电常数变化的物理机理有待于作进一步地深入研究.

3.3 分区特征

从图 2~图 5 可以看出,透射系数随散射角变化的规律是很相似的,取其中之一并进行分区如图 6 所示.

从图 6 可以看出,透射系数随散射角的变化大致可以分为 3 个区域,即近折射区、平直区和近平行平均平面散射区.在近折射区,当散射角小于折射角时,透射系数随散射角的增大而增大;当散射角等于折射角时,透射系数达到一极大值;当散射角大于折射角时,透射系数随散射角的增大而减小.在平直区,总体来说,透射系数随散射角的增大而减小,但减小得很慢,曲线几乎是平直的,而且介质 2 的介电常数越大,平直区越宽,透射系数随散射角的增大而衰减得越慢.在近平行平均平面散射区,透射系数随散射角的增大而急剧减小.

3.4 随频率变化的特征

为了进一步研究透射系数 σ° 随入射频率 f 变化的特征,对此进行了数值计算,图 7、图 8 给出了相应数值计算结果,计算时各种参数的取值如下, $\theta = 30^\circ, \theta_s = 60^\circ, \epsilon = 1.6, N_1 = 0, N_2 = 9, D = 1.5, b = 1.1, \delta = 0.005 \text{ m}$,其中图 7 中 $\phi_s = 0^\circ$,图 8 中 $\phi_s = 10^\circ$.

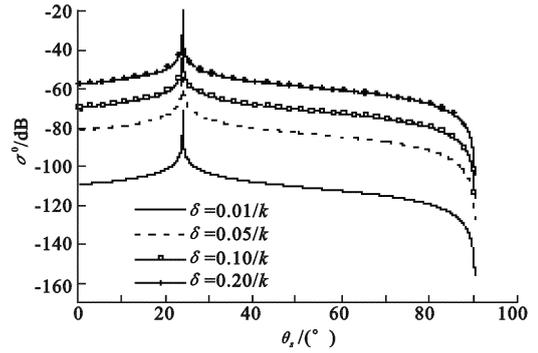


图 5 粗糙面高度起伏均方根对透射系数的影响

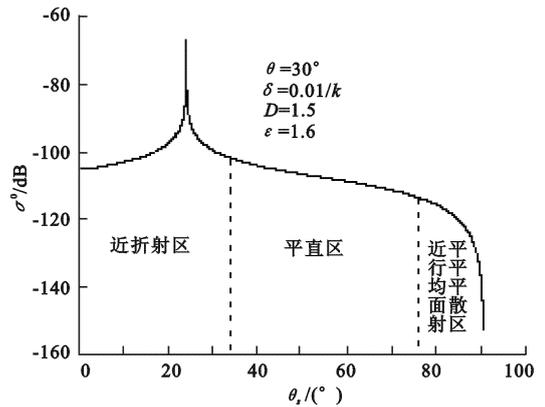


图 6 透射系数随散射角变化的分区特征

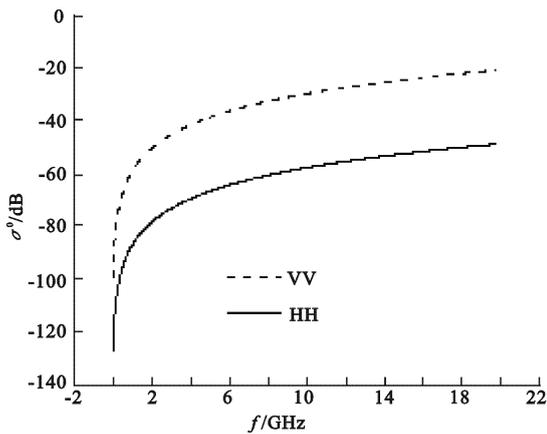


图 7 σ° 随 $f(\phi_s = 0^\circ)$ 的变化

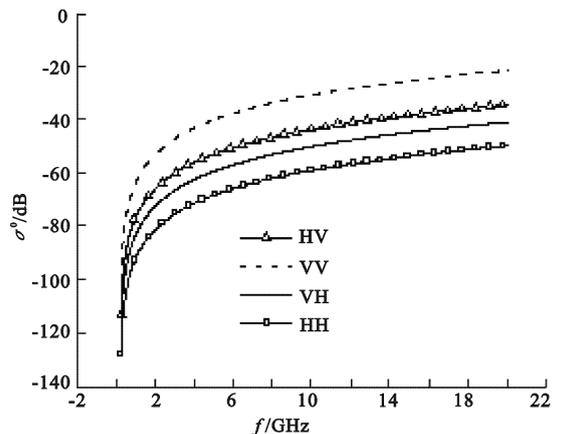


图 8 σ° 随 $f(\phi_s = 10^\circ)$ 的变化

对于一个确定的粗糙面透射问题来讲,其下方介质的介电常数一定(比如 $\epsilon = 1.6$),高度起伏均方根一定(比如 $\delta = 0.005 \text{ m}$).这里,粗糙面高度起伏均方根取 $\delta = 0.005 \text{ m}$ 是根据微扰法条件($k\delta < 0.32$,

$2^{1/2}\delta/l < 0.3$) 和入射频率的取值范围(0.05~20 GHz)确定的. 当不同频率的电磁波入射时,透射系数随频率的变化特征由图 7 和图 8 可以得出. 由图 7 可以看出,由于 $\phi_s = 0^\circ$, 交叉极化的散射系数为零,所以图中只有两条曲线,分别对应 HH 和垂直(VV)两种同极化,显然 σ° 随入射频率 f 的增大而增大, VV 极化下的透射系数大于 HH 极化下的透射系数;由图 8 可以看出,对于 HH、交叉(VH)、VV、交叉(HV) 4 种极化而言, σ° 随入射频率 f 的增大而增大,对于任一确定的入射频率, VV 极化的透射系数最大, HH 极化的透射系数最小, HV 与 VV 极化的透射系数介于二者之间,且 HV 极化的透射系数大于 VH 极化的透射系数.

大量数值计算结果表明:在折射面内($\phi_s = 0^\circ$),对于 VV 极化,其透射系数的分形特征、基本特征、分区特征和随频率变化的特征与 HH 极化是相似的,限于篇幅,此处不再赘述.

4 结束语

当电磁波入射到一粗糙面上时,不论是在介质 1 中的电磁散射,还是在介质 2 中的电磁散射,在诸多实际问题中均有重要的应用,研究粗糙面透射散射系数的特征对于复杂地海背景散射与遥感、粗糙面分类和内部特征诊断、粗糙面下有关埋藏物的探测与识别有重要意义. 笔者采用一维归一化带限 Weierstrass 函数来模拟一维分形粗糙面,根据微扰法研究了该分形粗糙面下方介质 2 中的电磁散射,得到了一维带限 Weierstrass 分形粗糙面透射波散射系数的分形特征、基本特征、分区特征和随频率变化的特征,笔者只研究了一维 Weierstrass 分形粗糙面透射系数的特征,对于其他谱分布的粗糙面及二维粗糙面的透射散射问题还有待于作进一步地深入研究,有关计算结果有待于进一步实验验证.

参考文献:

- [1] Ishimaru A. Wave Propagation and Scattering in Random Media [M]. New York: Academic Press, 1978.
- [2] Ulaby F T, Moore R K, Fung A K. Microwave Remote Sensing, Vol. II [M]. London: Addison-Wesley Publishing, 1982.
- [3] Fung A K. Microwave Scattering and Emission Models and Their Applications [M]. London: Artech House, 1994.
- [4] Ogilvy J A. Theory of Wave Scattering from Random Rough Surface [M]. Bristol: Institute of Physics Publishing, 1991.
- [5] Beckman P, Spizzichino A. The Scattering of Electromagnetic Waves from Rough Surfaces [M]. London, Oxford: Pergamon, 1963.
- [6] Mandelbrot B B. The Fractal Geometry of Nature [M]. New York: Freeman, 1982.
- [7] Falconer K. Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Application [M]. New York: Wiley, 1990.
- [8] Sultan-Salem A K, Tyler G L. Validity of the Kirchhoff Approximation for Electromagnetic Wave Scattering from Fractal Surfaces[J]. IEEE Trans on Geosci Remote Sensing, 2004, 42(9): 1860-1870.
- [9] Guo Lixin, Jiao Licheng, Wu Zhensen. Electromagnetic Scattering from Two-dimensional Rough Surface Using Kirchhoff Approximation [J]. Chin Phys Lett, 2001, 18(2): 214-216.
- [10] 郭立新, 王运华, 吴振森. 双尺度动态分形粗糙海面的电磁散射及多普勒谱研究[J]. 物理学报, 2005, 54(1): 96-101.
- [11] 郭立新, 任玉超. 动态分形粗糙海面散射遮蔽效应和多普勒谱研究[J]. 电子与信息学报, 2005, 27(10): 1666-1670.
- [12] Guo Lixin, Guan Xiuguo, Xu Yingxia. Study of Electromagnetic Scattering from the Fractal Surface by Considering the Shadowing Effect[J]. Journal of Xidian University, 2003, 30(5): 617-622.
- [13] 金亚秋, 李中新. 结合谱积分加速法的前后向迭代法数值计算分形粗糙介质的双站散射和透射[J]. 电子学报, 2002, 30(11): 1648-1653.
- [14] 李中新, 金亚秋. 双网格前后向迭代与谱积分法计算分形粗糙面的双站散射与透射[J]. 物理学报, 2002, 51(7): 1403-1411.
- [15] Kim Y, Jaggard D L. Band-limited Fractal Models of Atmospheric Refractivity Fluctuation[J]. J Opt Soc Am, 1988, A5(4): 475-480.