含有 Markov 参数的广义离散系统的 H_∞ 控制

唐中一，刘　飞
(江南大学 自动化研究所，江苏 无锡　214122)

摘要： 针对一类含有 Markov 跳变参数和时滞的广义离散系统的 H_∞ 控制问题，提出一种基于模态跳变的无记忆状态反馈控制器的设计方法. 通过将行列式方程的可解性转化为矩阵的最大特征值与零的关系，使得含有 Markov 跳变参数广义系统的正则性转化为系统矩阵最大特征值的问题，并应用矩阵的线性变换与分块技术来保证系统的因果性. 同时利用构造的 Lyapunov 函数和线性矩阵不等式，证明并给出了系统容许性的充分条件，提出了次优 H_∞ 控制设计方法，所设计的控制器使得系统满足所给定的 H_∞ 衰减水平. 数值仿真结果表明，所设计的控制器使得闭环系统拥有容许性，同时系统对于干扰有很强的抑制能力.

关键词： 广义离散系统；容许性；H_∞ 控制；线性矩阵不等式
中图分类号： TP273　　**文献标识码：** A　　**文章编号：** 1001-2400(2008)05-0951-06

H_∞ control of discrete-time descriptor systems with Markov jumping parameters

TANG Zhong-yi, *LIU Fei*
(Inst. of Automation, Jiangnan Univ, Wuxi　214122, China)

Abstract: In order to solve the H_∞ control problem for a class of discrete singular systems with markov parameters, a design method based on the memoryless state feedback controller of mode-jumping is proposed. By transforming the solvability of the determinant equation into the relationgship between the eigenvalue of the matrix and zero, the problem of regularity is converted to the magnitude of the maximum eigenvalue, and the causality is guaranteed in terms of linear transformation and the block matrix. By using the constructed Lyapunov function and linear matrix inequalities, a sufficient condition that the systems be admissible is given and proved, and a sub-optimal design approach is presented. The controller is designed and the prescribed H_∞ performance condition is satisfied. Simulation results demonstrate that the proposed method is valid and that the system has strong restraint ability against disturbance.

Key Words: discrete singular system; admissible; H_∞ control; linear matrix inequalities

广义系统(也称奇异系统，描述系统)是客观系统的一种抽象数学表示，不仅包含常态系统，还包括快速系统和静态系统，并被广泛应用于受限力学系统、复杂电网络系统、经济系统等点. 容许性是研究这类系统的根本，无论是实际应用还是理论分析都是必须首要解决的问题. 如果系统满足正则、因果和稳定，则称系统是容许的. 在有无假设系统正则的两种情况下，文献[1,2]分别通过分解系统矩阵这种间接的方法分析广义系统稳定问题. 但分解矩阵的方法太过繁琐，鉴于此，文献[3]提出利用矩阵不等式方程的方法讨论系统的稳定性，而文献[4]采用线性矩阵不等式的方法研究含跳变参数的广义系统的容许性.

H_∞ 性能反映了系统输入输出能量之间的关系，是系统的一个重要的性能指标. 文献[5]应用矩阵不等

收稿日期： 2007-09-19
基金项目： 国家自然科学基金资助(60574001)；教育部新世纪优秀人才支持计划(NCET-05-0485)；江南大学创新团队发展计划资助
作者简介： 唐中一(1980-)，男，江南大学硕士研究生，E-mail: 001tzy@163.com.

式方法研究了系统 H_∞ 性能，在此基础上文献[6]通过线性矩阵不等式解决了带时滞系统 H_∞ 控制与综合，文献[7]和文献[8]分别分析不确定连续时间系统和离散时间系统鲁棒 H_∞ 控制. 文献[5～8]研究系统可以根据过去和现在状态来预测将来状态，然而在许多工业和科学领域中，现实系统在运行过程中系统状态并不总是相关的，常常受到环境突然变化、系统内部各子系统间连接方式改变等随机突发因素的影响，系统从一个模态跳到另一个模态并且无后效性，这也就是通常所说的马尔科夫过程. 文献[4]采用线性矩阵不等式技术讨论了含马尔科夫参数的鲁棒保成本控制. 但是，未见有分析离散广义系统含马尔科夫参数的 H_∞ 控制问题的文献.

笔者研究了含有时滞的马尔科夫跳变广义离散系统的 H_∞ 控制问题. 对给定常数 $\gamma>0$，设计一个反馈控制律使得对于所有允许的输入，闭环系统是容许的，同时从外部扰动输入到系统被控输出的闭环传递函数 H_∞ 范数小于给定的常数.

1 问题提出

考虑一般广义离散马尔科夫跳变系统：

$$\begin{cases} \boldsymbol{E}(r(k))\boldsymbol{x}(k+1)=A_1(r(k))\boldsymbol{x}(k)+A_2(r(k))\boldsymbol{x}(k-d)+B_1(r(k))\boldsymbol{w}(k)+B_2(r(k))\boldsymbol{u}(k) \quad , \\ \boldsymbol{z}(k)=C_1(r(k))\boldsymbol{x}(k)+C_2(r(k))\boldsymbol{x}(k-d)+D_1(r(k))\boldsymbol{w}(k)+D_2(r(k))\boldsymbol{u}(k) \quad , \\ x_i=\theta_i, i\in\{-d,\cdots,0\}, r(0)=r_0 \quad , \end{cases} \tag{1}$$

其中 $r(k)$ 是系统的模态，$\boldsymbol{x}(k)$ 是系统的状态向量，$\boldsymbol{z}(k)$ 是输出向量，$\boldsymbol{w}(k)$ 为平方可积的外部输入向量，$\boldsymbol{u}(k)$ 为控制输入向量，$\boldsymbol{E}(r(k))\in R^{n\times n}$，满足 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{E}(r(k)))=a$ 和 $a\leqslant n$，当 $a=n$ 时属于标准状态空间描述的系统，$d>0$ 是时滞常数，系统中各实系数矩阵均依赖于模态 $r(k)$.

当 $r(k)=i$ 时，将 $A_1(r(k))$，$A_2(r(k))$，$B_1(r(k))$，$B_2(r(k))$，$C_1(r(k))$，$C_2(r(k))$，$D_1(r(k))$，$D_2(r(k))$，$E(r(k))$ 用 A_{1i}，A_{2i}，B_{1i}，B_{2i}，C_{1i}，C_{2i}，D_{1i}，D_{2i}，E_i 表示，其中 i 是在有限集合 $\Phi=\{1,2,\cdots,N\}$ 中取值的马尔科夫跳变参数，其跳变概率

$$P_r\{r(k+1)=j \mid r(k)=i\}=\pi_{ij}, \quad 且\sum_{j=1}^{N}\pi_{ij}=1 \quad .$$

对于系统(1)，当 $w(k)=0$，$u(k)=0$ 称为零输入系统，当 $u(k)=0$ 时称为零控制输入系统.

广义系统研究一般涉及可容许性问题，对于含跳变模态的广义系统，考虑零输入情形，先给出系统稳定性定义，再针对各跳变模态，定义正则性、因果性等.

定义1 如果对于初始状态 $\theta_i\in[-d,0]$ 和初始模态 r_0，有

$$\lim_{K\to\infty}\boldsymbol{E}\Big\{\sum_{j=0}^{K}\boldsymbol{x}_j^{\mathrm{T}}(\theta_i,r_0,0)\boldsymbol{x}_j(\theta_i,r_0,0)\,\Big|\,\theta_i,r_0\Big\}<\infty \quad , \tag{2}$$

则称系统是随机稳定的.

定义2 系统是正则的，如果存在一个复数 s，使得 $\det(s\boldsymbol{E}_i-A_{1i})\neq 0$[1].

定义3 系统是因果的，如果系统是正则的并且满足[1]

$$\deg(\det(s\boldsymbol{E}_i-A_{1i}))=\mathrm{rank}(\boldsymbol{E}_i) \quad . \tag{3}$$

定义4 系统是容许的，如果系统是正则，因果并且随机稳定[1].

闭环系统的控制器如使得系统稳定且被调输出和外部扰动之间满足 $\|z\|_2<\gamma\|w\|_2$，则称为 H_∞ 控制器. H_∞ 控制描述的是系统性能的定量指标，即系统对某一类外部扰动信号 w，系统的被调输出总能保持是”小”的，说明外部扰动对系统的影响很小，反映了系统抑制外部扰动的能力. 笔者研究对于给定系统 H_∞ 性能水平 γ，无记忆状态反馈 H_∞ 控制器的设计问题.

2 可容许性研究

先给出将要在含跳变参数的广义系统(1)的容许性充分条件的证明中应用的引理.

引理 1　矩阵 $\boldsymbol{X}$ 的测度 $\mu(\boldsymbol{X})=\frac{1}{2}\lambda_{\max}(\boldsymbol{X}+\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}})$ 有下面的特性[9]：

$$-\|\boldsymbol{X}\|\leqslant \mathrm{Re}(\lambda(\boldsymbol{X}))\leqslant\mu(\boldsymbol{X})\leqslant\|\boldsymbol{X}\| \quad .$$

结合文献[3]中的引理 1，考虑零输入系统给出如下定理.

定理 1　如果存在矩阵 $\boldsymbol{P}_i\in R^{n\times n}$，$i=1,2,\cdots,N$，使得式(4)，(5)成立，那么系统是正则，因果的.

$$\boldsymbol{E}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{E}_i\geqslant 0 \quad , \tag{4}$$

$$\boldsymbol{A}_{1i}^{\mathrm{T}}\widetilde{\boldsymbol{P}}_i\boldsymbol{A}_{1i}-\boldsymbol{E}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{E}_i<0 \quad , \tag{5}$$

其中

$$\widetilde{\boldsymbol{P}}_i=\sum_{j=1}^{N}\pi_{ij}\boldsymbol{P}_j \quad .$$

证明　设存在非奇异可逆矩阵 $\boldsymbol{R}_i$，$\boldsymbol{S}_i\in R^{n\times n}$，使得

$$\boldsymbol{R}_i\boldsymbol{E}_i\boldsymbol{S}_i=\begin{bmatrix} I_a & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix} \quad , \tag{6}$$

$\boldsymbol{I}_a$ 是 $a\times a$ 单位阵. 现在将 $\boldsymbol{R}_i^{-\mathrm{T}}\widetilde{\boldsymbol{P}}_i\boldsymbol{R}_i^{-1}$，$\boldsymbol{R}_i\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{S}_i$ 和 $\boldsymbol{R}_i^{-\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{R}_i^{-1}$ 矩阵分块如下：

$$\boldsymbol{R}_i^{-\mathrm{T}}\widetilde{\boldsymbol{P}}_i\boldsymbol{R}_i^{-1}=\begin{bmatrix}\widetilde{\boldsymbol{P}}_{i1} & \widetilde{\boldsymbol{P}}_{i2}\\ \widetilde{\boldsymbol{P}}_{i3} & \widetilde{\boldsymbol{P}}_{i4}\end{bmatrix} \quad , \tag{7}$$

$$\boldsymbol{R}_i\boldsymbol{A}_{1i}\boldsymbol{S}_i=\begin{bmatrix}\hat{\boldsymbol{A}}_{11i} & \hat{\boldsymbol{A}}_{12i}\\ \hat{\boldsymbol{A}}_{13i} & \hat{\boldsymbol{A}}_{14i}\end{bmatrix} \quad , \tag{8}$$

$$\boldsymbol{R}_i^{-\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{R}_i^{-1}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{P}_{i1} & \boldsymbol{P}_{i2}\\ \boldsymbol{P}_{i3} & \boldsymbol{P}_{i4}\end{bmatrix} \quad . \tag{9}$$

由式(4)，式(7)和式(9)易得 $\widetilde{\boldsymbol{P}}_{i1}\geqslant 0$，对式(5) 左乘右乘 $\boldsymbol{S}_i^{\mathrm{T}}$ 和 $\boldsymbol{S}_i$，并作简单变换得

$$\boldsymbol{S}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_{1i}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_i^{-\mathrm{T}}\widetilde{\boldsymbol{P}}_i\boldsymbol{R}_i^{-1}\boldsymbol{R}_i\boldsymbol{A}_{1i}\boldsymbol{S}_i-\boldsymbol{S}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_i^{-\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{R}_i^{-1}\boldsymbol{R}_i\boldsymbol{E}_i\boldsymbol{S}_i<0 \quad ,$$

将式(6)～(9)代入上式，有

$$\begin{bmatrix} * & * \\ * & \hat{\boldsymbol{A}}_{12i}^{\mathrm{T}}\widetilde{\boldsymbol{P}}_{i1}\widetilde{\boldsymbol{A}}_{12i}+\boldsymbol{H}_i+\boldsymbol{H}_i^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}<0 \quad , \tag{10}$$

其中 $\boldsymbol{H}_i=\hat{\boldsymbol{A}}_{12i}^{\mathrm{T}}\widetilde{\boldsymbol{P}}_{i1}\hat{\boldsymbol{A}}_{14i}+\frac{1}{2}\hat{\boldsymbol{A}}_{14i}^{\mathrm{T}}\widetilde{\boldsymbol{P}}_{i3}\hat{\boldsymbol{A}}_{14i}$，$*$ 所表示的矩阵在定理 1 证明中未涉及.

由式(10)，并根据已证 $\widetilde{\boldsymbol{P}}_{i1}\geqslant 0$，可得 $\boldsymbol{H}_i+\boldsymbol{H}_i^{\mathrm{T}}<0$，应用引理 1 可得

$$\mathrm{Re}\left(\lambda\left(\left(\hat{\boldsymbol{A}}_{12i}^{\mathrm{T}}\widetilde{\boldsymbol{P}}_1+\frac{1}{2}\hat{\boldsymbol{A}}_{14i}^{\mathrm{T}}\widetilde{\boldsymbol{P}}_3\right)\hat{\boldsymbol{A}}_{14i}\right)\right)=\mathrm{Re}(\lambda(\boldsymbol{H}_i))\leqslant\mu(\boldsymbol{H}_i)=\frac{1}{2}\lambda_{\max}(\boldsymbol{H}_i+\boldsymbol{H}_i^{\mathrm{T}})<0 \quad . \tag{11}$$

从式(11)知矩阵 $\boldsymbol{H}_i$ 的所有特征值的实部都小于零，得 $\boldsymbol{H}_i$ 可逆，同时 $\hat{\boldsymbol{A}}_{14i}$ 也可逆.

在式 $(s\boldsymbol{E}_i-\boldsymbol{A}_{1i})$ 左右分别乘以可逆矩阵 $\boldsymbol{R}_i$ 和 $\boldsymbol{S}_i$，并结合式(6) 和(8)，得矩阵 $\begin{bmatrix} s\boldsymbol{I}_a-\hat{\boldsymbol{A}}_{11i} & -\hat{\boldsymbol{A}}_{12i}\\ -\hat{\boldsymbol{A}}_{13i} & -\hat{\boldsymbol{A}}_{14i}\end{bmatrix}$，用 $\boldsymbol{Y}$ 表示.

由 $\hat{\boldsymbol{A}}_{14i}$ 可逆，则存在不为零的复数 s 使得 $\det(\boldsymbol{Y})\neq 0$，即 $\det(s\boldsymbol{E}_i-\boldsymbol{A}_{1i})\neq 0$，符合定义 2. 同样由 $\hat{\boldsymbol{A}}_{14i}$ 可逆可得 $\deg(\det(\boldsymbol{Y}))=a$，又 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{E}_i)=a$，可见 $\deg(\det(s\boldsymbol{E}_i-\boldsymbol{A}_{1i}))=\mathrm{rank}(\boldsymbol{E}_i)$，符合定义 3，所以系统是正则，因果. 证毕.

正则、因果是容许性的两个基本条件. 在此基础上，只需给出随机稳定的证明，那么系统就是容许的. 稳定性的证明有很多成熟有效的技术和方法. 定理 2 采用的是文献[9]中的方法证明广义跳变系统的稳定性.

定理 2　如果存在对称可逆矩阵 $\boldsymbol{P}_i$，$i\in\Phi$ 和对称正定矩阵 $\boldsymbol{Q}$，使得式(12)和式(13)成立，则系统是可容许的.

$$\boldsymbol{E}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{E}_i\geqslant 0 \quad , \tag{12}$$

$$\boldsymbol{M}_i=\begin{pmatrix}\boldsymbol{M}_{11i} & \boldsymbol{M}_{12i}\\ \boldsymbol{M}_{21i} & \boldsymbol{M}_{22i}\end{pmatrix}<0 \quad , \tag{13}$$

式中 $\boldsymbol{M}_{11i}=\boldsymbol{A}_{1i}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{P}}_i\boldsymbol{A}_{1i}-\boldsymbol{E}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{E}_i+\boldsymbol{Q},\boldsymbol{M}_{22i}=\boldsymbol{A}_{2i}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{P}}_i\boldsymbol{A}_{2i}-\boldsymbol{Q},\boldsymbol{M}_{12i}=\boldsymbol{M}_{21i}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}_{1i}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{P}}_i\boldsymbol{A}_{2i},\tilde{\boldsymbol{P}}_i=\sum_{j=1}^{s}p_{ij}\boldsymbol{P}_j,i=1,\cdots,s.$

证明　由式(13)成立,得 $\boldsymbol{A}_{1i}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{P}}_i\boldsymbol{A}_{1i}-\boldsymbol{E}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{E}_i+\boldsymbol{Q}<0$,又 $\boldsymbol{Q}>0$,上式可推出 $\boldsymbol{A}_{1i}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{P}}_i\boldsymbol{A}_{1i}-\boldsymbol{E}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{E}_i<0$,且由 $\boldsymbol{E}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{E}_i\geqslant 0$,根据定理1知零输入系统是正则,因果的.

定义如下的 Lypunov 函数:

$$V_k(\boldsymbol{\chi}(k),r(k)=i)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{E}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{E}_i\boldsymbol{x}(k)+\sum_{l=k-d}^{k-1}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(l)\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}(l)\quad,\tag{14}$$

其中 $\boldsymbol{\chi}(k)=\{\boldsymbol{x}(k-d),\cdots,\boldsymbol{x}(k)\}$,为叙述方便,将 $\boldsymbol{\chi}(k),\boldsymbol{x}(k),\boldsymbol{w}(k),\boldsymbol{u}(k)$ 简记为 $\boldsymbol{\chi}_k,\boldsymbol{x}_k,\boldsymbol{w}_k,\boldsymbol{u}_k$.

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{E}\{V_{k+1}(\boldsymbol{\chi}_{k+1},r_{k+1})\,|\,\boldsymbol{\chi}_k,r_k=i\}-V_k(\boldsymbol{\chi}_k,r_k=i)=\\&\sum_{j=1}^{s}p(r_{k+1}=j\,|\,i)\Big(\boldsymbol{x}_{k+1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_j\boldsymbol{E}_j\boldsymbol{x}_{k+1}+\sum_{l=k-d+1}^{k}\boldsymbol{x}_l^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}_l\Big)-\boldsymbol{x}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{E}_i\boldsymbol{x}_k-\sum_{l=k-d}^{k-1}\boldsymbol{x}_l^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}_l=\\&\sum_{j=1}^{s}\pi_{ij}\boldsymbol{x}_{k+1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_j\boldsymbol{E}_j\boldsymbol{x}_{k+1}-\boldsymbol{x}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{E}_i\boldsymbol{x}_k+\boldsymbol{x}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}_k-\boldsymbol{x}_{k-d}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}_{k-d}=\\&\boldsymbol{x}_k^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}_{1i}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{P}}_i\boldsymbol{A}_{1i}-\boldsymbol{E}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{E}_i+\boldsymbol{Q})\boldsymbol{x}_k+\boldsymbol{x}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_{1i}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{P}}_i\boldsymbol{A}_{2i}\boldsymbol{x}_{k-d}+\boldsymbol{x}_{k-d}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_{2i}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{P}}_i\boldsymbol{A}_{1i}\boldsymbol{x}_k+\boldsymbol{x}_{k-d}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}_{2i}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{P}}_i\boldsymbol{A}_{2i}-\boldsymbol{Q})\boldsymbol{x}_{k-d}=\\&\tilde{\boldsymbol{x}}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}_i\tilde{\boldsymbol{x}}_k<0\quad,\end{aligned}\tag{15}$$

其中 $\tilde{\boldsymbol{x}}_k=[\boldsymbol{x}_k^{\mathrm{T}}\ \boldsymbol{x}_{k-d}^{\mathrm{T}}]$,很明显有 $\|\boldsymbol{x}_k\|\leqslant\|\tilde{\boldsymbol{x}}_k\|$. 又 $\boldsymbol{M}_i<0,\boldsymbol{E}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{E}_i\geqslant 0$ 和 $\boldsymbol{Q}>0$,当 $\boldsymbol{x}_k\neq 0$ 时,可得

$$\begin{aligned}&\frac{E\{V_{k+1}(\boldsymbol{\chi}_{k+1},r_{k+1})\,|\,\boldsymbol{\chi}_k,r_k\}-V_k(\boldsymbol{\chi}_k,r_k)}{V_k(\boldsymbol{\chi}_k,r_k)}=\frac{\tilde{\boldsymbol{x}}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}_i\tilde{\boldsymbol{x}}_k}{\boldsymbol{x}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{E}\boldsymbol{x}_k+\sum_{l=k-d}^{k-1}\boldsymbol{x}_l^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}_l}\leqslant\\&-\min_{i\in\Phi}\left\{\frac{\lambda_{\min}(-\boldsymbol{M}_i)}{\lambda_{\max}(\boldsymbol{P}_i)+d\lambda_{\max}(\boldsymbol{Q})}\right\}=\beta-1\quad,\end{aligned}\tag{16}$$

由式(16)得

$$\begin{aligned}&E\{V_{k+1}(\boldsymbol{\chi}_{k+1},r_{k+1})\,|\,\boldsymbol{\chi}_k,r_k\}<\beta V_k(\boldsymbol{\chi}_k,r_k)\quad,\\&E\Big\{\sum_{k=0}^{N}\boldsymbol{x}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{x}_k\,\Big|\,\boldsymbol{\chi}_0,r_0\Big\}<(1+\beta+\cdots+\beta^N)V_0(\boldsymbol{\chi}_0,r_0)\quad.\end{aligned}\tag{17}$$

又由式(15)和(16),得 $0<\beta<1$,

$$\lim_{N\to\infty}E\Big\{\sum_{k=0}^{N}\boldsymbol{x}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{x}_k\,\Big|\,\psi,r_0\Big\}<\frac{1-\beta^{N+1}}{1-\beta}V_0(\boldsymbol{\chi}_0,r_0)<\frac{V_0(\boldsymbol{\chi}_0,r_0)}{1-\beta}\quad,$$

应用 Fubini 定理得

$$\lim_{N\to\infty}E\Big\{\sum_{k=0}^{N}\boldsymbol{x}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_k\,\Big|\,\psi,r_0\Big\}<\mathscr{P}^{-1}\ \frac{V_0(\boldsymbol{\chi}_0,r_0)}{1-\beta}<\infty\quad,\tag{18}$$

其中 $\mathscr{P}\triangleq\min\limits_{i\in\Phi}\lambda_{\min}(\boldsymbol{P}_i)$,根据定义1知系统稳定. 证毕.

3　H_∞ 控制器设计

将具有 H_∞ 性能 γ 的状态反馈控制器设计转化为线性矩阵不等式的求解问题,可得如下主要结果.

定理3　对于零控制输入系统,给定常数 $\gamma>0$,如果存在对称正定矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 和对称可逆矩阵 $\boldsymbol{P}_i,i\in\Phi$,使得式(19)和(20)有解,则称系统输入输出关系满足 H_∞ 性能.

$$\boldsymbol{E}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{E}_i\geqslant 0\quad,\tag{19}$$

$$\boldsymbol{\Pi}_i\triangleq\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Pi}_{11i}&\boldsymbol{\Pi}_{12i}&\boldsymbol{\Pi}_{13i}\\\boldsymbol{\Pi}_{21i}&\boldsymbol{\Pi}_{22i}&\boldsymbol{\Pi}_{23i}\\\boldsymbol{\Pi}_{31i}&\boldsymbol{\Pi}_{32i}&\boldsymbol{\Pi}_{33i}\end{bmatrix}\quad,\tag{20}$$

其中 $\boldsymbol{\Pi}_{11i}=\boldsymbol{A}_{1i}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{P}}_i\boldsymbol{A}_{1i}-\boldsymbol{E}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{E}_i+\boldsymbol{Q}+\gamma^{-1}\boldsymbol{C}_{1i}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_{1i},\boldsymbol{\Pi}_{22i}=-\boldsymbol{Q}+\boldsymbol{A}_{2i}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{P}}_i\boldsymbol{A}_{2i}+\gamma^{-1}\boldsymbol{C}_{2i}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_{2i}$,

$$\boldsymbol{\Pi}_{33i}=-\gamma\boldsymbol{I}+\boldsymbol{B}_{1i}^{\mathrm{T}}\widetilde{\boldsymbol{P}}_i\boldsymbol{B}_{1i}+\gamma^{-1}\boldsymbol{D}_{2i}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_{2i},\boldsymbol{\Pi}_{12i}=\boldsymbol{\Pi}_{21i}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}_{1i}^{\mathrm{T}}\widetilde{\boldsymbol{P}}_i\boldsymbol{A}_{2i}+\gamma^{-1}\boldsymbol{C}_{1i}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_{2i},$$

$$\boldsymbol{\Pi}_{13i}=\boldsymbol{\Pi}_{31i}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}_{1i}^{\mathrm{T}}\widetilde{\boldsymbol{P}}_i\boldsymbol{B}_{1i}+\gamma^{-1}\boldsymbol{C}_{1i}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_{2i},\boldsymbol{\Pi}_{23i}=\boldsymbol{\Pi}_{32i}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}_{2i}^{\mathrm{T}}\widetilde{\boldsymbol{P}}_i\boldsymbol{B}_{1i}+\gamma^{-1}\boldsymbol{C}_{2i}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_{2i}.$$

证明　式(20)可保证式(13)成立,则系统是容许的.

假设初始条件为零,即 $x_k=0,k\in\{-d,\cdots,0\}$, 有

$$W\triangleq\gamma^{-1}\|\boldsymbol{z}\|_2^2-\gamma\|\boldsymbol{w}\|_2^2=E\Big\{\sum_{k=0}^{N-1}(\gamma^{-1}\boldsymbol{z}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{z}_k-\gamma\boldsymbol{w}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w}_k)\Big\}=$$

$$E\Big\{\sum_{k=0}^{N-1}(\gamma^{-1}\boldsymbol{z}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{z}_k+V_{k+1}(\boldsymbol{\chi}_{k+1},r_{k+1})-V_k(\boldsymbol{\chi}_k,r_k)-\gamma\boldsymbol{w}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w}_k)\Big\}-E\{V_N(\boldsymbol{\chi}_N,r_N)\}\leqslant$$

$$E\Big\{\sum_{k=0}^{N-1}(\gamma^{-1}\boldsymbol{z}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{z}_k+V_{k+1}(\boldsymbol{\chi}_{k+1},r_{k+1})-V_k(\boldsymbol{\chi}_k,r_k)-\gamma\boldsymbol{w}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w}_k)\Big\}=\sum_{k=0}^{N-1}(\boldsymbol{\varepsilon}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Pi}_i\boldsymbol{\varepsilon}_k)<0\quad,$$

其中的 $\boldsymbol{\varepsilon}_k\triangleq[\boldsymbol{x}_k^{\mathrm{T}}\quad\boldsymbol{x}_{k-d}^{\mathrm{T}}\quad\boldsymbol{w}_k^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$,易得 $\|\boldsymbol{z}\|_2<\gamma\|\boldsymbol{\omega}\|_2$.

定理 3 给出系统 H_∞ 性能的充分条件,而在定理 4 中,通过求解一个凸优化问题,利用该优化问题的解得到一个满足给定正实数 γ 的 H_∞ 控制器.

定理 4　给定一类含马尔科夫跳变参数的广义离散系统(1)和一定的干扰抑制水平 $\gamma>0$,如果存在对称正定矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 和对称可逆矩阵 $\boldsymbol{P}_i,i\in\Phi$,使得式(21)和式(22)有解,则存在具有 H_∞ 范数下的状态反馈控制器 $\boldsymbol{u}(k)=G(r(k))\boldsymbol{x}(k)$. $G(r(k))$ 简记为 G_i.

$$\boldsymbol{E}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_i=\boldsymbol{P}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}_i\geqslant0\quad,\tag{21}$$

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Theta}_{11i}&0&\boldsymbol{\Theta}_{31i}^{\mathrm{T}}&\boldsymbol{\Theta}_{41i}^{\mathrm{T}}&\boldsymbol{X}_i^{\mathrm{T}}\\0&-\gamma\boldsymbol{I}&\boldsymbol{\Theta}_{32i}^{\mathrm{T}}&\boldsymbol{D}_{1i}^{\mathrm{T}}&0\\\boldsymbol{\Theta}_{31i}&\boldsymbol{\Theta}_{32i}&\boldsymbol{\Theta}_{33i}&\boldsymbol{\Theta}_{43i}^{\mathrm{T}}&0\\\boldsymbol{\Theta}_{41i}&\boldsymbol{D}_{1i}&\boldsymbol{\Theta}_{43i}&\boldsymbol{\Theta}_{44i}&0\\\boldsymbol{X}_i&0&0&0&-\boldsymbol{T}\end{bmatrix}<0\quad,\tag{22}$$

其中 $\boldsymbol{T}=\boldsymbol{Q}^{-1},\boldsymbol{\Lambda}\triangleq\mathrm{diag}(\boldsymbol{X}_1,\cdots,\boldsymbol{X}_2),\boldsymbol{\Xi}_i=[(\pi_{i1})^{1/2}\boldsymbol{A}_{2i},\cdots,(\pi_{iN})^{1/2}\boldsymbol{A}_{2i}]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\Theta}_{11i}=-\boldsymbol{E}_i\boldsymbol{E}_i\boldsymbol{X}_i,$

$\boldsymbol{\Theta}_{31i}=[(\pi_{i1})^{1/2}(\boldsymbol{A}_{1i}\boldsymbol{X}_i+\boldsymbol{B}_{2i}\boldsymbol{Y}_i),\cdots,(\pi_{iN})^{1/2}(\boldsymbol{A}_{1i}\boldsymbol{X}_i+\boldsymbol{B}_{2i}\boldsymbol{Y}_i)]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\Theta}_{32i}=[(\pi_{i1})^{1/2}\boldsymbol{B}_{1i},\cdots,(\pi_{iN})^{1/2}\boldsymbol{B}_{1i}]^{\mathrm{T}},$

$\boldsymbol{\Theta}_{33i}=\boldsymbol{\Lambda}+\boldsymbol{\Xi}_i\boldsymbol{T}\boldsymbol{\Xi}_i^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\Theta}_{41i}=\boldsymbol{C}_{1i}\boldsymbol{X}_i+\boldsymbol{D}_{2i}\boldsymbol{Y},\boldsymbol{\Theta}_{43i}=\boldsymbol{C}_{2i}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}\boldsymbol{\Xi}_i,\boldsymbol{\Theta}_{44i}=-\gamma\boldsymbol{I}+\boldsymbol{C}_{2i}\boldsymbol{T}\boldsymbol{C}_{2i}^{\mathrm{T}}.$

证明　考虑状态反馈控制器 $\boldsymbol{u}(k)=G_i\boldsymbol{x}(k)$, 类比定理 3 得

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{\Gamma}_{11i}&\boldsymbol{\Gamma}_{12i}&\boldsymbol{\Gamma}_{13i}\\\boldsymbol{\Gamma}_{12i}^{\mathrm{T}}&\boldsymbol{\Gamma}_{22i}&\boldsymbol{\Gamma}_{23i}\\\boldsymbol{\Gamma}_{13i}^{\mathrm{T}}&\boldsymbol{\Gamma}_{23i}^{\mathrm{T}}&\boldsymbol{\Gamma}_{33i}\end{pmatrix}<0\quad,\tag{23}$$

其中 $\bar{\boldsymbol{A}}_{1i}=\boldsymbol{A}_{1i}+\boldsymbol{B}_{2i}G_i,\bar{\boldsymbol{C}}_{1i}=\boldsymbol{C}_{1i}+\boldsymbol{D}_{2i}G_i,\boldsymbol{\Gamma}_{11i}=\bar{\boldsymbol{A}}_{1i}^{\mathrm{T}}\widetilde{\boldsymbol{P}}_i\bar{\boldsymbol{A}}_{1i}-\boldsymbol{E}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{E}_i+\boldsymbol{Q}+\gamma^{-1}\bar{\boldsymbol{C}}_{1i}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{C}}_{1i},$

$\boldsymbol{\Gamma}_{12i}=\bar{\boldsymbol{A}}_{1i}^{\mathrm{T}}\widetilde{\boldsymbol{P}}_i\boldsymbol{A}_{2i}+\gamma^{-1}\bar{\boldsymbol{C}}_{1i}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_{2i},\boldsymbol{\Gamma}_{13i}=\bar{\boldsymbol{A}}_{1i}^{\mathrm{T}}\widetilde{\boldsymbol{P}}_i\boldsymbol{B}_{1i}+\gamma^{-1}\bar{\boldsymbol{C}}_{1i}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_{2i},\boldsymbol{\Gamma}_{22i}=-\boldsymbol{Q}+\boldsymbol{A}_{2i}^{\mathrm{T}}\widetilde{\boldsymbol{P}}_i\boldsymbol{A}_{2i}+\gamma^{-1}\boldsymbol{C}_{2i}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_{2i},$

$\boldsymbol{\Gamma}_{23i}=\boldsymbol{A}_{2i}^{\mathrm{T}}\widetilde{\boldsymbol{P}}_i\boldsymbol{B}_{1i}+\gamma^{-1}\boldsymbol{C}_{2i}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_{2i},\boldsymbol{\Gamma}_{33i}=-\gamma\boldsymbol{I}+\boldsymbol{B}_{1i}^{\mathrm{T}}\widetilde{\boldsymbol{P}}_i\boldsymbol{B}_{1i}+\gamma^{-1}\boldsymbol{D}_{2i}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_{2i}.$

定义 $\boldsymbol{X}_i=\boldsymbol{P}_i^{-1}$ 和 $\boldsymbol{Y}_i=G_i\boldsymbol{X}_i$, 对式(23)反复运用 Schur 补可得式(22).

据定理 4,通过求解以上的线性矩阵不等式可以得到系统(1)的状态反馈 γ- 次优 H_∞ 控制器. 进一步,基于状态反馈 γ- 次优 H_∞ 控制器的存在条件(21)和(22),通过建立和求解以下的优化问题:

min γ

s. t. 线性矩阵不等式(21),(22)成立,如果该优化问题有解,则结合定理 4,利用该优化问题的最优解可以得到系统(1)的最优 H_∞ 控制器增益 $G_i=\boldsymbol{Y}_i\boldsymbol{X}_i^{-1}$,相应的最小扰动抑制度是 $\gamma_{\min}$.

4　仿真示例

假定含有 Markov 参数的广义离散系统(1)有 3 个模态,即 $\Phi=\{1,2\}$. 模态间的跳变转移概率矩阵为

$\boldsymbol{\Pi}=\begin{bmatrix}0.7 & 0.3\\0.6 & 0.4\end{bmatrix}$，各模态下的模型参数为：

$$\boldsymbol{E}_1=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\boldsymbol{A}_{11}=\begin{pmatrix}0.2&0.1&0\\0.1&0.4&0.2\\0&0.3&-0.1\end{pmatrix},\boldsymbol{A}_{21}=\begin{pmatrix}0.3&0.3&0\\-0.1&0&0.3\\0.2&0.1&0.3\end{pmatrix},\boldsymbol{B}_{11}^{\mathrm{T}}=[1\quad 0\quad 0.1],$$

$$\boldsymbol{B}_{21}^{\mathrm{T}}=[0\quad 1\quad 0.2],\boldsymbol{C}_{11}=[1\quad 1\quad 0],\boldsymbol{C}_{21}=[1\quad 0\quad 1],\boldsymbol{D}_{11}=0.1,\boldsymbol{D}_{21}=0.2,$$

$$\boldsymbol{E}_2=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\boldsymbol{A}_{12}=\begin{pmatrix}0&0.1&0\\0.2&0.1&0.3\\0.2&0.2&0\end{pmatrix},\boldsymbol{A}_{22}=\begin{pmatrix}0.2&0.3&-0.1\\0&0.4&0\\0.1&0.3&0.5\end{pmatrix},\boldsymbol{B}_{12}^{\mathrm{T}}=[0\quad 0.2\quad 1],$$

$$\boldsymbol{B}_{22}^{\mathrm{T}}=[0\quad 1\quad 0],\boldsymbol{C}_{12}=[0\quad 1\quad 0],\boldsymbol{C}_{22}=[1\quad 0\quad 1],\boldsymbol{D}_{12}=0.1,\boldsymbol{D}_{22}=0.1.$$

利用 Matlab 中的工具箱，对给定 H_∞ 性能 $\gamma=1.5$，运用定理4，经过计算得$\gamma_{\min}=1.1073$，闭环反馈增益为

$$G_1=[1.1073\quad -1.9961\quad 1.5287],\quad G_2=[5.0347\quad -2.0161\quad -1.9961]\quad .$$

5 结束语

针对含时滞的广义离散马尔科夫跳变系统，笔者提出可容许性及具有 H_∞ 控制性能 γ 的概念，得到具有 H_∞ 控制性能 γ 的充要条件，通过解线性矩阵不等式可以得到 H_∞ 状态反馈控制律. 上述结果可进一步推广至各模态系数不确定性时系统的 H_∞ 控制问题.

参考文献：

[1] Dai L. Singular Control Systems[M]. Berlin: Springer, 1989.

[2] Varga A. On Stabilization Methods of Descriptor Systems[J]. Systems & Control Letters, 1995, 24(2): 133-138.

[3] Xu S Y, Yang C W. Stabilization of Discretetime Singular Systems a Matrix Inequalities Approach [J]. Automatic, 1999, 35(9): 1613-1617.

[4] Fu Y M, Wu D, Duan G R. Robust Guaranteed Cost Sontrol for Descriptor Systems with Markov Jumping Parameters and State Delays[J]. Australian Mathematic Society, 2006, 47(4): 569-580.

[5] Masubuchu I, Kamitane Y, Ohara A, et al. H_∞ Control for Descriptor Systems: a Matrix Inequalities Approach[J]. Automatica, 1997, 33(4): 669-673.

[6] Fridman E. H_∞ Control of Linear State-delay Descriptor Systems: an LMI Approach [J]. Linear Algebra and its Application, 2002, (8): 271-302.

[7] Piao F X, Zhang Q L, Ma X Z. Robust H_∞ Control for Uncertain Descriptor Systems with State and Control Delay[J]. Systems Engineering and Electronics, 2006, (17): 571-575.

[8] 袁薇，张庆灵，杜宝珠. 不确定离散广义系统的 H_∞ 保成本控制[J]. 系统工程与电子技术，2007，(1)：121-124.
Yuan W, Zhang Q L, Du B Z. H_∞ Guaranteed Cost Control for Uncertain Discrete Singular Systems[J]. Systems Engineering and Electronics, 2007, (1): 121-124.

[9] Cao Y Y, Jams L. Stochastic Stabilizability and H_∞ Control for Discrete-time Jump Linear Systems with Time Delay[J]. Journal of the Franklin Institute, 1999, 336(8): 1263-1281.

(编辑：郭　华)