

辅助激励源区域分解算法在电磁散射问题中的应用

安翔¹, 吕志清², 梁昌洪¹

(1. 西安电子科技大学 天线与微波技术重点实验室, 陕西 西安 710071;

2. 东南大学 毫米波国家重点实验室, 江苏 南京 210096)

摘要: 针对电大问题, 提出了一种基于辅助激励源的区域分解算法. 首先把原求解区域划分成若干个子区域, 显著地降低了原问题的规模和复杂度. 在子区域分界面上引入虚拟的辅助激励源以交换信息, 建立了相应的矩阵方程及其快速求解算法. 一旦获得了辅助激励源, 即可并行地计算各子区域内部的场. 与传统算法相比, 该算法有效地提高了计算效率和计算精度, 降低了存储量; 此外, 它特别适合于求解具有几何重复性特征的结构, 如栅格、光子带隙/电磁带隙、频率选择表面等.

关键词: 区域分解算法; 辅助激励源; 电磁散射

中图分类号: TN011 文献标识码: A 文章编号: 1001-2400(2007)02-0175-06

The auxiliary excitation source domain decomposition method and its application in electromagnetics scattering problems

AN Xiang¹, LÜ Zhi-qing², LIANG Chang-hong¹

(1. Key Lab. of Antenna and Microwave Technology, Xidian Univ., Xi'an 710071, China; 2. State Key Lab. of Millimeter Waves, Southeast Univ., Nanjing 210096, China)

Abstract: A highly efficient Domain Decomposition Method (DDM) based on the auxiliary excitation source algorithm is presented for solving electrically large electromagnetics scattering problems. The original domain is partitioned into nonoverlapping subdomains to reduce the computational scale and complexity. To ensure the convergence of the algorithm, an auxiliary excitation source is used to exchange information between subdomains. The resulting linear system of equations for the auxiliary excitation source is established and solved with a fast algorithm. Once the auxiliary excitation source is obtained, the field on each subdomain can be computed independently. Compared with the traditional method, the proposed method can not only improve the computation efficiency greatly, but also decrease the memory requirement and the computational errors significantly. Moreover, it is especially appealing for problems with geometric repetitions, such as, gratings, photonic/electromagnetic band gap structures (PBG/EBG), and frequency selective surfaces (FSS).

Key Words: domain decomposition method; auxiliary excitation source; electromagnetics scattering

散射特性分析是非常典型的电磁问题, 解决此类问题的常见方法大致可以分为两类: 积分方程类方法和差分方程类方法. 当处理电大尺寸问题时, 未知数的数量往往非常多, 导致矩阵规模高度膨胀, 远远超出计算机的硬件资源, 而使得传统方法无法使用. 区域分解算法 (DDM) 为解决这个矛盾提供了一条有效途径^[1~6], 其基本思想是: 采用“分而治之”的策略, 把原来很大的求解区域划分成若干小的子区域, 使原来的大问题变成一些易于处理的小问题, 然后分别在每个子区域上进行求解, 再通过迭代获得原来整个区域的解. 由于每次只需要处理一个子区域, 因此能够大幅度降低对内存的要求, 甚至在普通 PC 上就可以计算上百万波长的电大问题^[4]. 在计算电磁学领域, 文献^[1, 2] 首先建立了一种良态的传输条件, 即 Després 传输条件, 论证

收稿日期: 2006-06-29

基金项目: 2005 年博士学科基金资助项目 (20050701001)

作者简介: 安翔 (1970-), 男, 副教授, 博士.

了采用区域分解算法计算电磁散射、辐射问题的可行性. 文献[3]采用“洋葱”式的分区方式, 把有限元和 Després 传输条件相结合求解了二维散射问题. 文献[4]研究了区域分解算法在散射、辐射及电磁兼容等方面的应用. 文献[5]根据矩阵方程的解空间理论, 提出了基于基础解系的区域分解算法, 文献[6]则将其推广到无限元方法.

为了在子区域之间交换数据, 上述传统的区域分解算法需要在连接边界处引入传输条件, 其主要缺点是: ①在迭代过程中需要反复计算未知场在连接边界上的方向导数, 并记录两层以上网格上的场值, 这不仅增加了计算复杂度, 而且会带来数值误差, 影响收敛速度, 在某些情况下甚至导致不收敛; ②只能采取 Jacobi 或 Gauss-Seidel 迭代法, 收敛很慢, 严重影响了计算效率; ③为了保证相位一致, 必须重叠一部分网格, 这给网格剖分带来了困难.

针对电大问题, 笔者提出了一种基于辅助激励源的区域分解算法. 首先把原求解区域划分成若干个子区域, 以降低原问题的规模和复杂度. 在子区域分界面上引入了虚拟的辅助激励源来交换信息, 建立了相应的矩阵方程及其快速求解方法. 与传统算法相比, 该算法不仅提高了计算效率, 降低了存储量, 而且提高了计算精度. 此外, 它特别适合于求解具有几何重复性特征的结构, 如栅格、光子带隙/电磁带隙、频率选择表面等. 数值算例验证了该方法的准确性和有效性.

1 基本理论

二维电磁散射问题可以表达为在给定区域 Ω 上求解关于纵向场分量 ϕ 的 Helmholtz 方程^[7]

$$\begin{cases} -\frac{\partial}{\partial x} \left(\alpha \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\alpha \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + \beta \phi = 0, & \phi \in \Omega, \\ \text{边界条件}, & \phi \in \partial \Omega, \end{cases} \quad (1)$$

式中

$$\begin{cases} \phi = E_z, & \alpha = 1/\mu_r, & \beta = -k_0^2 \epsilon_r, & \text{TM}_z \text{ 波}, \\ \phi = H_z, & \alpha = 1/\epsilon_r, & \beta = -k_0^2 \mu_r, & \text{TE}_z \text{ 波}, \end{cases}$$

其中 ϵ_r, μ_r 分别是媒质的相对介电常数和相对磁导率, k_0 是自由空间的波数.

不失一般性, 考虑将区域 Ω 分成两个子区域的情况, 如图 1 所示, $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, $\Gamma = \Omega_1 \cap \Omega_2$. 为了保证解的适定性, 连接边界 Γ 处不能采用 Dirichlet 条件或 Neumann 条件, 而需要采用 Robin 类传输条件^[1,2]:

$$\partial \phi_1^{m+1} / \partial n_1 + j k_1 \phi_1^{m+1} = -\partial \phi_2^m / \partial n_2 + j k_2 \phi_2^m, \quad (2)$$

其中 ϕ_1^{m+1} 是子区域 Ω_1 在第 $(m+1)$ 次迭代时的场值, ϕ_2^m 是子区域 Ω_2 在第 m 次迭代时的场值; n_1 和 n_2 分别是 Ω_1 和 Ω_2 在连接边界 Γ 上的单位外法线方向; k_1, k_2 则分别是 Ω_1 和 Ω_2 上的波数; j 是虚数单位. 子区域 Ω_1 和 Ω_2 上的纵向场分量应同时满足方程(1)和(2).

按照等效原理, 可以认为, 每个子区域上的场是由作用在该子区域的真实激励(比如, 入射场)和连接边界 Γ 上的传输条件共同决定的. 如果将式(2)的右端项看成作用在子区域 Ω_1 上的虚拟的辅助激励, 并令其等于 g , 即

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial n_1} + j k_1 \phi_1 = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{\partial \phi_1^{m+1}}{\partial n_1} + j k_1 \phi_1^{m+1} \right) = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(-\frac{\partial \phi_2^m}{\partial n_2} + j k_2 \phi_2^m \right) = g. \quad (3)$$

同理, 将式(2)的左端项看成作用在子区域 Ω_2 上的辅助激励, 得到

$$\frac{\partial \phi_2}{\partial n_2} - j k_2 \phi_2 = -g, \quad \phi_2 \in \Gamma. \quad (4)$$

对于子区域 Ω_1 , 联立方程(1)和(3); 对于子区域 Ω_2 , 联立方程(1)和(4), 根据有限元方法^[7], 可得矩阵方程为

$$\begin{cases} \mathbf{A}_1 \mathbf{x}_1 = \mathbf{f}_1 + \mathbf{B}_1^\top \mathbf{G}, \\ \mathbf{A}_2 \mathbf{x}_2 = \mathbf{f}_2 - \mathbf{B}_2^\top \mathbf{G}, \end{cases} \quad (5)$$

式中 $\mathbf{A}_i, \mathbf{x}_i$ 和 \mathbf{f}_i 分别是子区域 Ω_i 的系数矩阵、未知场值列向量和由真实激励引起的右端向量 ($i=1, 2$). 列向量 \mathbf{G} 是离散后的辅助激励, 其长度等于连接边界 Γ 上的节点数. 矩阵 \mathbf{B}_i^\top (上标 T 表示转置) 相当于扩充算子, 其作用是将辅助激励 \mathbf{G} 映射到子区域 Ω_i , \mathbf{B}_i^\top 的每一行仅有一个非零元素“1”, 其余元素都是“0”, 而且“1”的位置对应

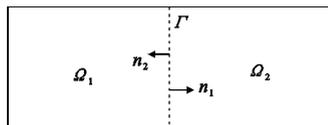


图 1 将原区域分成两个子区域的示意图

着连接边界上一个节点的编号;同样,矩阵 B_2^T 也相当于扩充算子,其作用则是将 G 映射到子区域 Ω_2 .

此外,根据惟一性定理,在连接边界 Γ 上,场应满足连续性条件

$$B_1 x_1 - B_2 x_2 = 0, \quad (6)$$

其中矩阵 B_1 和 B_2 分别是矩阵 B_1^T 和 B_2^T 的转置矩阵,它们的作用是将子区域 Ω_1 和 Ω_2 上离散后的场值映射到连接边界,相当于提取算子.

从式(5),(6)可以看出:虚拟的辅助激励 G 有着明确的物理意义,它是纵向场与横向场的线性组合,其作用是把两个分开的子区域重新“粘合”在一起.

联立式(5),(6),令

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}, \quad B = (-B_1 \quad B_2), \quad B^T = \begin{pmatrix} -B_1^T \\ B_2^T \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}.$$

则有
$$\begin{pmatrix} A & B^T \\ B & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (7)$$

从中可以得到关于辅助激励 G 的方程: $BA^{-1}B^TG = BA^{-1}f$. (8)

由于 G 仅位于连接边界上,所以上式比原问题低了一维. 求出 G 以后,将其代入式(7)的第一行,注意到 A 是一个分块对角矩阵,即各子区域是完全独立的,因此,可以并行地求解每个子区域上的场.

2 算法实现

算法的关键在于求解方程(8),这涉及 A 的逆矩阵,显然,不宜直接计算 A^{-1} , 而应将其转化为求解矩阵方程. 为了实现算法的并行化,分两种情况:

(1) 如果每个子区域的规模不是很大,而且连接边界上的未知数比较少,即 G 的维数比较小,将 $A^{-1}B^T$ 转化为多右端项求解问题,采用不对称多波前法^[8] 直接计算 $BA^{-1}B^T$. 由于 A 是一个分块对角矩阵,各子区域完全独立,所以,即使在一台计算机上,算法也是可扩展的.

(2) 如果连接边界上的未知数很多,即 G 的维数比较大,可以采用具有超线性收敛特点的 Krylov 子空间类算法^[9]. 在求解过程中只需要计算矩阵向量积,不必显式形成 A , 具体过程如下:

- ① 首先给定 G 的初值;
- ② 通过扩充算子 B^T , 将 G 并行地扩充到子区域 Ω_1 和 Ω_2 ;
- ③ 并行地求解两个子区域 Ω_1 和 Ω_2 ;
- ④ 通过提取算子 B 得到矩阵向量积;
- ⑤ 判断是否收敛,如果已经收敛,就停止迭代,否则,回到②.

需要说明的是,扩充算子 B^T 和提取算子 B 都不需要显式形成,而且几乎不花费计算量和存储量,在编制计算机程序时,它们只是一组赋值和增量加法语句.

3 数值算例

算例 1 首先验证文中算法的正确性. 计算了在 TM 波照射下半径为 1λ (自由空间中的波长,下同)的理想导体圆柱的散射. 采用二阶吸收边界条件^[7],吸收边界离开柱体表面 0.5λ . 网格尺寸为 0.05λ . 把整个计算区域沿 x 轴分成上下 2 个子区域. 收敛准则为相对误差不大于 1.0×10^{-6} (下同). 图 2 是柱体表面电流的计算结果,可以看出,数值结果与理论解^[10]吻合得很好,说明笔者所提出的方法是准确的. 为了对比文中算法和传统区域分解算法的计算精度,图 3 给出了由这两种算法计算出的连接边界上节点的散射电场值. 从图中可以看出,文中算法的计算结果和理论解吻合得非常好,而传统区域分解算法的计算结果却有很大误差,呈锯齿状,这是因为,前者不需要计算方向导数,而后者在迭代过程中必须反复用数值方法计算方向导数,不可避免地带来了数值误差.

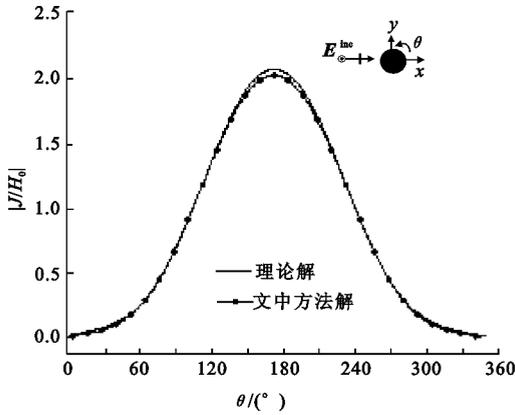


图 2 理想导体圆柱表面的电流分布

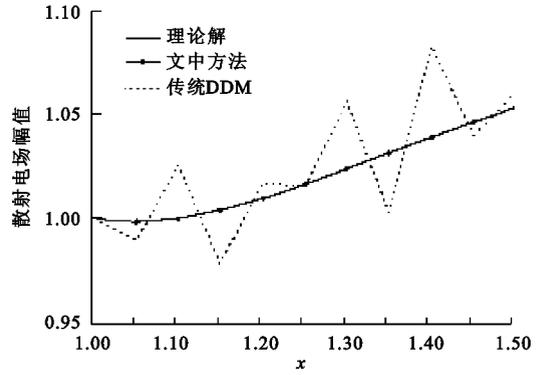


图 3 连接边界上节点的散射电场幅值

算例 2 区域分解算法的一个重要研究目标是处理电大尺寸问题. 计算了平面波照射下周长为 1000λ 的理想导电方柱的散射. 沿环向划分成 24 个子区域. 图 4 是 TE 波入射时雷达散射截面的计算结果. 为了对比传统 DDM 和文中算法的计算效率, 分别计算了周长从 1λ 到 10000λ 的理想导体方柱的电磁散射, 采用完全相同的网格剖分和子区域划分方式. 图 5 对比了两种算法所需的计算时间(图中的 s 表示方柱周长), 它清楚地表明了文中算法的计算效率更高, 这主要是因为文中算法的收敛速度比传统区域分解算法更快.

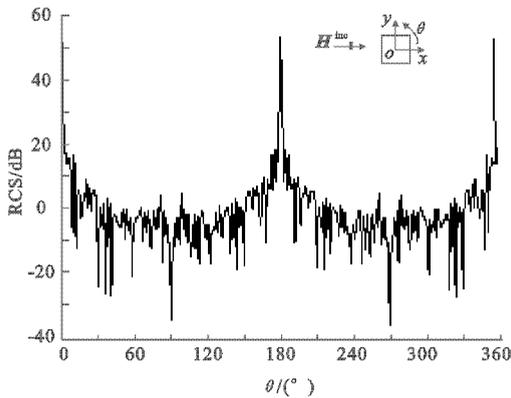


图 4 周长 1000λ 的理想导体方柱的雷达散射截面

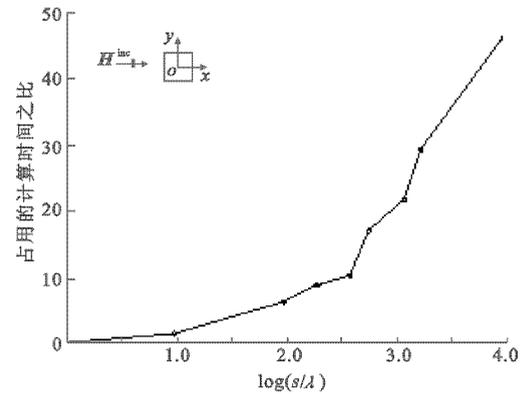


图 5 传统 DDM 与文中算法所需计算时间的比值

算例 3 周期结构在微波、光学、声学等领域的应用非常广泛, 例如, 栅格、光子带隙/电磁带隙、频率选择表面等, 所以研究周期结构的电磁特性有着重要的工程实际意义. 目前常见的方法是采用 Floquet 定理把计算区域限制在一个单元上. 然而, 在实际上, 绝大多数周期结构的尺寸都是有限的, 并非无限周期. 因此, 采用 Floquet 定理难以准确反映边缘效应; 另一方面, 传统数值方法(如矩量法、有限元方法等)往往受计算机硬件资源制约而无法直接使用. 文中提出的辅助激励源区域分解算法为解决这类问题提供了一条非常高效的途径, 它特别适合于求解具有几何重复性特征的结构.

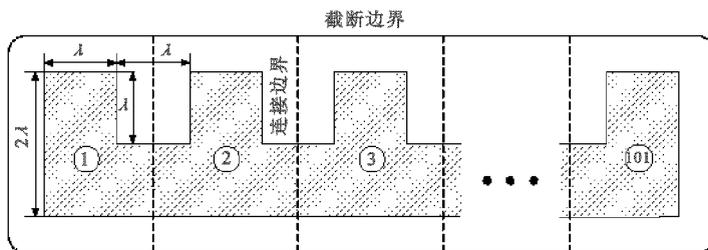


图 6 有限周期栅格示意图

考虑图 6 所示的由均匀有耗介质构成的栅格, 介质参数为 $\epsilon_r = 3 - j$, $\mu_r = 1$. 每个单元宽 2λ , 高 2λ , 其中

的凹槽是正方形的,尺寸为 $1\lambda \times 1\lambda$. 沿 x 轴方向,一共有 100 个凹槽,栅格的总尺寸是 $201\lambda \times 2\lambda$. 沿 x 轴方向把整个计算区域分成 101 个子区域,如图 6 所示. 除第 1 个和第 101 个子区域以外,其他子区域完全相同. 因此,只需要处理 3 个子区域,即第 1,2,101 个子区域,显然,效率非常高. 图 7 和图 8 分别是 TM 和 TE 波垂直入射时的雷达散射截面计算结果,所花费的计算时间分别是 93.5 s 和 116.2 s. 图 9 和图 10 分别是 TM 和 TE 波入射时第 1,51 和 101 个子区域上的场分布计算结果,其中第 51 个子区域对应于栅格的中心单元,可以看出,边缘效应是比较明显的.

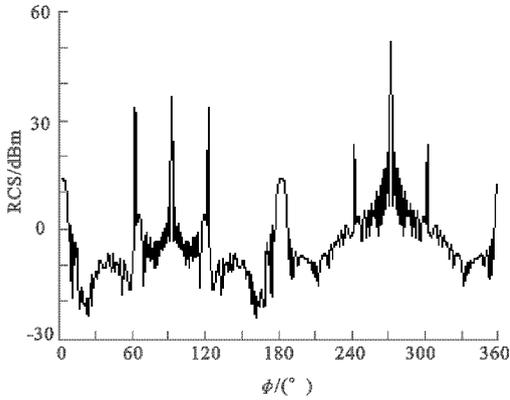


图 7 有限周期栅格的雷达散射截面(TM 波入射)

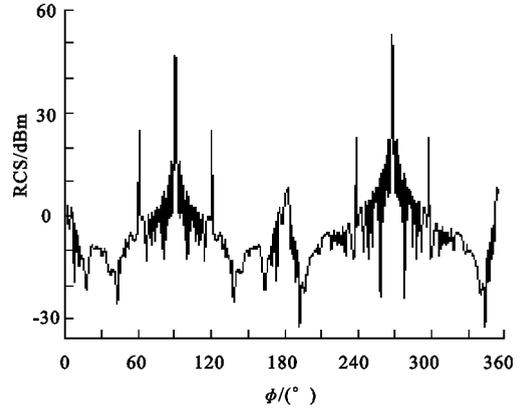


图 8 有限周期栅格的雷达散射截面(TE 波入射)

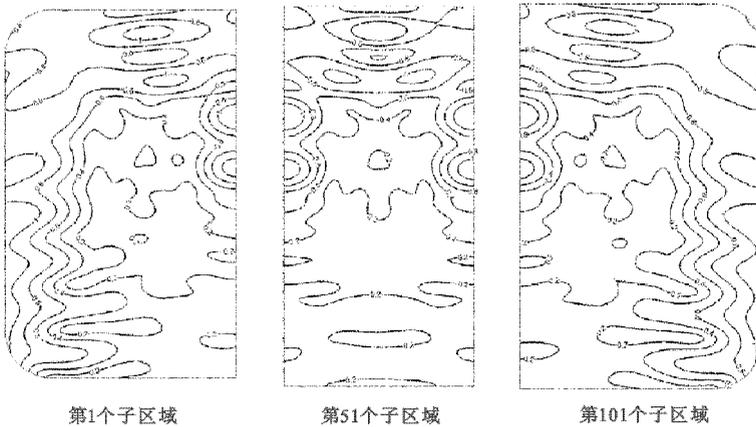


图 9 第 1, 51, 101 个子区域上的场分布图(TM 波)

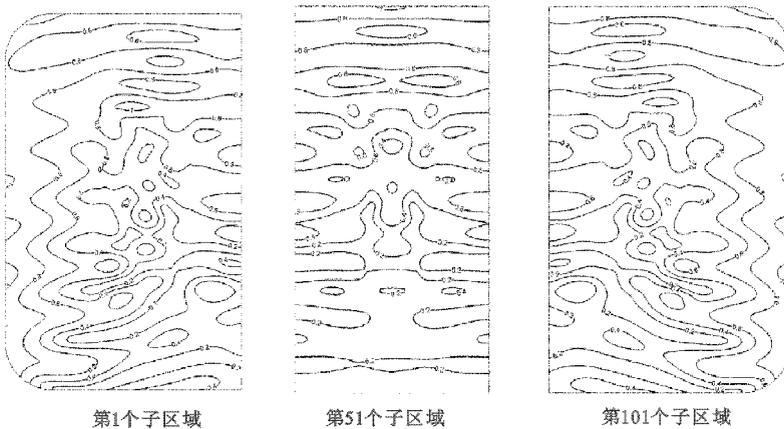


图 10 第 1, 51, 101 个子区域上的场分布图(TE 波)

4 结束语

提出了一种基于辅助激励源的区域分解算法,它并不直接求解未知的场值,而是以子区域分界面(线)上的虚拟的辅助激励源为未知量,先求解辅助激励源然后再计算每个子区域上的场值.克服了传统区域分解算法收敛慢、精度低的缺点.此外,文中算法尤其适合于求解具有几何重复性特征的结构.需要说明的是:尽管只讨论了二维问题,但文中方法可以很容易地扩展到三维问题.

参考文献:

- [1] Després B. Domain Decomposition Method and the Helmholtz Problem[C]//Proc Int Symp Mathemat Numerical Aspects Wave Propagation Phenomena. Strasbourg France; SIAM, 1992: 44-52.
- [2] Després B. Domain Decomposition Method and the Helmholtz Problem (Part II)[C]//Proc 2nd Int Conf Mathemat Numerical Aspects Wave Propagation. Dover, DE; SIAM, 1993: 197-206.
- [3] Strupfel B. A Fast-domain Decomposition Method for the Solution of Electromagnetic Scattering by Large Objects[J]. IEEE Trans on Antennas and Propagat, 1996, 44(10):1375-1385.
- [4] 尹雷. 区域分裂算法及其在电磁问题中的应用[D]. 南京:东南大学, 2001.
- [5] An Xiang, Lü Zhiqing, Hong Wei, et al. The Application of PBSV-DDM in EM Scattering Analysis of Electrically Large 2-D Objects[J]. Journal of Applied Science, 2005, 23(2):122-125.
- [6] An Xiang, Lü Zhiqing, Liang Changhong. Study of the Infinite Element-domain Decomposition Method in Electromagnetic Scattering of Cylinders[J]. Journal of Xidian University, 2006, 33(3):425-429.
- [7] 金建铭. 电磁场有限元方法[M]. 西安:西安电子科技大学出版社, 1998.
- [8] Davis T, Duff I S. An Unsymmetric Pattern Multifrontal Method for Sparse LU Factorization[J]. SIAM J Matrix Analysis and Applications, 1996, 18(1):140-158.
- [9] Saad Y. Iterative Methods for Sparse Linear Systems[M]. New York: PWS Publishing Company, 1996.
- [10] Harrington R F. Time-harmonic Electromagnetic Fields[M]. New York: McGraw-Hill, 1961.

(编辑: 齐淑娟)

(上接第 174 页)

- [4] Fu Yanzeng, Zhang Hailin, Wang Yumin. Study on the Technique of the Time Domain Equalizer in OFDM Sestems[J]. Journal of Xidian University, 2001,28(1):89-91.
- [5] Song H, You Y, Paik J, et al. Frequency-offset Synchronization and Chnannel Estimation for OFDM-based Transmission [J]. IEEE Commum Letters, 2000, 4(3): 95-97.
- [6] Schmidl T M, Cox D C. Robust Frequency and Timing Synchronization for OFDM[J]. IEEE Trans on Commun, 1997, 45(12): 1613-1621.
- [7] Morelli M, Mengali U. An Improved Frequency Offset Estimator for OFDM Applications[J]. IEEE Trans on Commun, Letters, 1999, 3(3): 75-77.
- [8] Minn H, Bhargava V K. An Investigation into Time-domain Approach for OFDM Channel Estimation[J]. IEEE Trans on Broadcast, 2000, 46(12): 240-248.
- [9] Edfors O, Sandell M, van de Beek J. OFDM Channel Estimation by Singular Value Decomposition[J]. IEEE Trans on Commun, 1998, 46(7): 931-939.
- [10] Zhao Yuping, Huang Aiping. A Novel Channel Estimation Method for OFDM Mibile Communication Systems Based on Pilot Signals and Transform-domain Processsing[C]//Vehicular Technology Conference: Vol 3. Phoenix: IEEE, 1997: 2089-2093.
- [11] Manton J H. Optimal Training Sequences and Pilot Tones for OFDM systems[J]. IEEE Communications Letters, 2001, 5(4):151-153.

(编辑: 李维东)