**文章编号**:0494-0911(2008)03-0005-03　　**中图分类号**:P207.2　　**文献标识码**:B

# 边角网平差中方差分量估计改进算法

**杨恒山**

(湖南理工学院 土木建筑工程系,湖南 岳阳 414000)

# An Improved Algorithm of Variance Component Estimate in Side-angular Network Adjustment

YANG Heng-shan

**摘要**:基于单位权中误差的先验估值与验后估值一致,对边角网提出一种改进的赫尔默特方差分量估计算法,该算法可直接计算角度和边长的方差分量估值,克服了原公式计算过程繁琐、占有内存量大的不足,通过采用 Newton 法进行迭代计算,收敛效果好,算例表明该方法是有效的。

**关键词**:Helmert 公式;边角网;单位权中误差;方差分量估计;Newton 法

## 一、引　言

随着光电测距仪、全站仪的普遍使用,边角网已成为控制网常用的布网形式。传统的数据处理方法,一般是根据仪器的标称精度估计边长观测值的中误差,并假定测角中误差为单位权中误差,便可得到下列定权公式:

$$P_\beta = 1$$

$$m_{s_i} = a + b \times s_i (\text{或 } m_{s_i} = \sqrt{a^2 + (b \times s_i)^2})$$

$$P_{s_i} = m_\beta^2 / m_{s_i}^2$$

式中,$a$ 为固定误差,单位为 mm;$b$ 为比例误差,单位为 mm/km;$P_\beta$,$P_{s_i}$分别为角度、边长观测值的权。再根据间接平差公式建立平差模型,进行解算,评定精度。但由于存在两类不同的观测值,仅依据仪器标称精度定权,有很大的片面性,会导致两类观测值权比确定不恰当,直接影响到平差结果正确性以及控制网的可靠性和粗差探测的效果,因此边、角两类观测值权的合理确定对提高控制网的精度具有重要作用。

1924 年 Helmert 提出了方差分量估计公式[1],此后众多学者对方差分量估计进行了全面深入的研究,涉及方差分量估计的理论与应用[2~8]。本文在分析 Helmert 方差分量估计公式的的基础上,提出一种改进算法。

## 二、边角网赫尔默特方差分量估计公式

设边角网两类观测值分别为:角度观测值 $L_1$,边长观测值 $L_2$。$L_1$ 与 $L_2$ 互相独立,且对应的权阵为 $P_1$ 和 $P_2$,经推导可得

$$E(V_1^{\mathrm{T}}P_1V_1) = [n_1 - 2tr(N^{-1}N_1) + tr(N^{-1}N_1N^{-1}N_1)]\sigma_1^2 + tr(N^{-1}N_1N^{-1}N_2)\sigma_2^2 \quad (1)$$

$$E(V_2^{\mathrm{T}}P_2V_2) = tr(N^{-1}N_1N^{-1}N_2)\sigma_1^2 + [n_2 - 2tr(N^{-1}N_2) + tr(N^{-1}N_1N^{-1}N_2)]\sigma_2^2 \quad (2)$$

将式(1)、式(2)中的数学期望去掉,则可计算出 $\sigma_1^2$ 和 $\sigma_2^2$ 的值$\hat{\sigma}_1^2$ 和$\hat{\sigma}_2^2$,计算公式为

$$S\hat{\theta} = W_\theta \quad (3)$$

$$S = \begin{bmatrix} n_1 - 2tr(N^{-1}N_1) + tr(N^{-1}N_1)^2 & tr(N^{-1}N_1N^{-1}N_2) \\ tr(N^{-1}N_1N^{-1}N_2) & n_2 - 2tr(N^{-1}N_2) + tr(N^{-1}N_2)^2 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\theta} = [\hat{\sigma}_1^2 \quad \hat{\sigma}_2^2]^{\mathrm{T}} \qquad W_\theta = [V_1^{\mathrm{T}}P_1V_1 \quad V_2^{\mathrm{T}}P_2V_2]^{\mathrm{T}}$$

若解得的$\hat{\sigma}_1^2 = \hat{\sigma}_2^2$,说明验前定权是合理的;若$\hat{\sigma}_1^2$ 和$\hat{\sigma}_2^2$ 之间存在较大差异时,则根据计算出的$\hat{\sigma}_1^2$,$\hat{\sigma}_2^2$ 重新定权。

## 三、基于单位权中误差的先验值与验后值一致的边角网平差计算

设角度和边长观测值均为独立等精度,且角度和边长观测值的中误差分别为 $m_1$ 和 $m_2$,此时 $L_1$ 和 $L_2$ 的权阵可表示为

$$\left.\begin{aligned} P_1 &= \frac{m_0^2}{m_1^2}E \\ P_2 &= \frac{m_0^2}{m_2^2}E \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

令

收稿日期:2008-01-23
作者简介:杨恒山(1963-),男,湖南临湘人,副教授,硕士,主要从事测量数据处理研究工作。

$$K = \frac{m_1^2}{m_2^2}$$

则有

$$\boldsymbol{P}_2 = K\boldsymbol{P}_1 \tag{5}$$

令

$$\overline{\boldsymbol{N}_1} = \boldsymbol{B}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_1,\ \overline{\boldsymbol{N}_2} = \boldsymbol{B}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_2,\ \boldsymbol{N}_K = \overline{\boldsymbol{N}_1} + K\overline{\boldsymbol{N}_2} \tag{6}$$

$$\overline{\boldsymbol{W}_1} = \boldsymbol{B}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L}_1,\ \overline{\boldsymbol{W}_2} = \boldsymbol{B}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L}_2,\ \boldsymbol{W}_K = \overline{\boldsymbol{W}_1} + K\overline{\boldsymbol{W}_2} \tag{7}$$

则

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{N}_K^{-1}\boldsymbol{W}_K \tag{8}$$

$$\boldsymbol{V}_1 = \boldsymbol{B}_1\boldsymbol{X} - \boldsymbol{L}_1,\ \boldsymbol{V}_2 = \boldsymbol{B}_2\boldsymbol{X} - \boldsymbol{L}_2 \tag{9}$$

令

$$D_1 = \boldsymbol{V}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{V}_1,\ D_2 = \boldsymbol{V}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{V}_2 \tag{10}$$

因

$$\sigma_0^2 = (\boldsymbol{V}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{V}_1 + \boldsymbol{V}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{V}_2)/r = m_0^2\,(D_1 + KD_2)/\,rm_1^2$$

考虑到单位权中误差先验值与验后值一致,即

$$m_0^2 = \sigma_0^2$$

则有

$$m_1^2 = (D_1 + KD_2)/r \tag{11}$$

平差计算可分三种情况:

1. 当 $m_1$ 和 $m_2$ 的先验估值均已知,一般 $m_1$ 可取仪器标称精度或用菲列罗公式求得, $m_2$ 可用经验公式或仪器鉴定资料求得,但从理论上讲,$m_1$ 和 $m_2$ 应满足式(11)给出的条件,如果认为先验估值可靠或对平差精度要求不高,可采用这种方法。

2. 当 $m_1$ 和 $m_2$ 其中之一的先验估值已知,事实上在边角网的平差计算中,由于角度观测值的多余观测数较多,可以认为由角度单独平差求得的验后单位权中误差即为 $m_1$,这样式(11)便变成只有 $K$ 的函数表达式:

$$f(K) = (D_1 + KD_2)/\,m_1^2 - r \tag{12}$$

此时的平差计算就是要算出 $K$ 值使得 $f(K) = 0$,由于式(12)是一个隐式,因此能采用迭代法进行计算,文献[8]对此问题进行讨论。

3. $m_1$ 和 $m_2$ 均未知,一般采用 Helmert 方差分量估计公式进行平差计算,但该法计算过程繁琐,占有内存量大,因此本文提出一种改进的计算方法。

## 四、改进的赫尔默特方差分量估计公式

在推导式(2)时,顾及式(5)~式(10)可得

$$\boldsymbol{V}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{V}_1 = \left[n_1 - 2tr(\boldsymbol{N}_1^{-1}\overline{\boldsymbol{N}_1}) + tr(\boldsymbol{N}_K^{-1}\overline{\boldsymbol{N}_1}\boldsymbol{N}_1^{K}\overline{\boldsymbol{N}_1})\right] + Ktr(\boldsymbol{N}_K^{-1}\overline{\boldsymbol{N}_1}\boldsymbol{N}_K^{-1}\overline{\boldsymbol{N}_2})m_1^2 \tag{13}$$

顾及式(7)有

$$tr(\boldsymbol{N}_K^{-1}\overline{\boldsymbol{N}_1}\boldsymbol{N}_K^{-1}\overline{\boldsymbol{N}_1}) + Ktr(\boldsymbol{N}_K^{-1}\overline{\boldsymbol{N}_1}\boldsymbol{N}_K^{-1}\overline{\boldsymbol{N}_2}) = tr(\boldsymbol{N}_K^{-1}\overline{\boldsymbol{N}_1})$$

则式(14)变为

$$m_1^2 = \boldsymbol{V}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{V}_1/[n_1 - tr(\boldsymbol{N}_K^{-1}\overline{\boldsymbol{N}_1})] \tag{14}$$

由式(12)和式(14)可得

$$[n_1 - tr(\boldsymbol{N}_K^{-1}\overline{\boldsymbol{N}_1})]D_2K + [n_1 - r - tr(\boldsymbol{N}_K^{-1}\overline{\boldsymbol{N}_1})]D_1 = 0 \tag{15}$$

上式亦可表示为

$$f(K) = [n_1 - tr(\boldsymbol{N}_K^{-1}\overline{\boldsymbol{N}_1})]D_2K + [n_1 - r - tr(\boldsymbol{N}_K^{-1}\overline{\boldsymbol{N}_1})]D_1$$

这是一个关于 $K$ 的函数表达式,需要算出 $K$ 使其满足 $f(K)=0$。由于该函数式是一个隐式,可采用迭代法进行计算,对于非线性函数,常用的迭代计算方法是 Newton 法,由于导数的计算不方便采用割线法,其计算程序如下:

1. 定出 $K$ 的初值 $K_0 = m_{10}^2/m_{20}^2$,$m_{10}$,$m_{20}$ 为角度观测值中误差和边长观测值中误差的先验值。

2. 令

$$F_1 = (D_1 + KD_2)/r$$

$$F_2 = D_1/[n_1 - tr(\boldsymbol{N}_K^{-1}\overline{\boldsymbol{N}_1})]$$

$$G_1 = [r + tr(\boldsymbol{N}_K^{-1}\overline{\boldsymbol{N}_1}) - n_1]D_1$$

$$G_2 = [n_1 - tr(\boldsymbol{N}_K^{-1}\overline{\boldsymbol{N}_1})]D_2$$

根据 $K_0$ 通过平差计算,解出 $D_1$,$D_2$,$F_1$,$F_2$,$G_1$,$G_2$,若 $F_1 = F_2$,则迭代计算终止;否则取 $K_1 = G_1/G_2$,进行下一次迭代计算。

3. 若第二次迭代仍不满足 $F_1 = F_2$,再采用 Newton 法定 $K$ 值,此时

$$K_{i+1} = K_i - \frac{f(K_i)(K_i - K_{i-1})}{f(K_i) - f(K_{i-1})} \quad (i = 1,2,3,\cdots)$$

直至迭代终止。

4. 计算 $\hat{m}_1$,$\hat{m}_2$,假设迭代次数为 $n$,则

$$\hat{m}_1^2 = F_1^n = F_2^n,\ \hat{m}_2^2 = K_n\hat{m}_1^2$$

## 五、算 例

算例选自参考文献[1],该边角网观测了 12 个角度和 6 条边长,起算数据和观测值见参考文献,试求角度、边长观测值的方差估值。

为了比较两种方法,除了用算例给出的起算数据和观测数据进行计算外,另外去掉一条边进行计算,事实上边角网在布设时,不一定布设成完全边角网,有时可能只加测了部分边长,两种方法计算的结果及迭代次数见表 1。

分析表 1 中数据可以看出,改进后的公式与原公式所得计算结果一致,但新方法公式简单,计算工作量小,收敛的效果较好。

表 1

| 边　数 | 赫尔默特法 | | | 改进的赫尔默特法 | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 观测值的精度估值 | | | 观测值的精度估值 | | | |
| | $m_1/('')$ | $m_2$/cm | 迭代次数 | $m_1/('')$ | $K$ | $m_2$/cm | 迭代次数 |
| 6 | 1.91 | 2.44 | 3 | 1.91 | 0.615 | 2.43 | 3 |
| 5($AP_1$ 未测) | 1.78 | 3.31 | 10 | 1.76 | 0.272 | 3.37 | 4 |
| 5($BP_1$ 未测) | 1.88 | 2.82 | 9 | 1.86 | 0.419 | 2.88 | 4 |
| 5($CP_1$ 未测) | 2.06 | 1.61 | 6 | 2.05 | 1.620 | 1.68 | 4 |
| 5($CP_2$ 未测) | 1.65 | 1.75 | 3 | 1.66 | 0.893 | 1.75 | 3 |
| 5($AP_2$ 未测) | 1.77 | 3.20 | 11 | 1.77 | 0.302 | 3.21 | 3 |
| 5($P_1$ $P_2$ 未测) | 1.69 | 3.71 | 12 | 1.68 | 0.164 | 3.76 | 6 |

## 六、结束语

本文针对边角网随机模型三种情况下的方差分量估计问题进行了讨论,在角度和边长观测值的先验精度估值均不可靠的情况下,提出了一种改进的赫尔默特方差分量估计算法,改进后的算法克服了原公式计算过程繁琐、占有内存量大的不足,通过采用 Newton 法进行迭代计算,收敛效果较好,算例表明该方法是有效的。

## 参考文献:

[1] 崔希璋,於宗俦. 广义测量平差[M]. 武汉:武汉大学出版社,2001.

[2] 周江文. 误差理论[M]. 北京:测绘出版社,1979.

[3] 於宗俦. Helmert 型方差-协方差分量估计的通用公式[J]. 武汉测绘科技大学学报,1991,16(2):8-17.

[4] 于正林,陈惠明. 方差分量估计中的精度评定[J]. 测绘学报,1989,18(3):219-226.

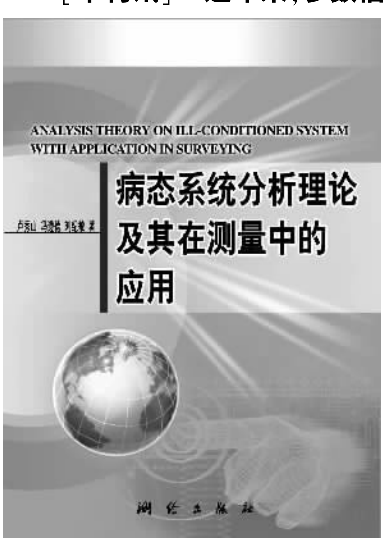
[5] 于正林. 边角网平差中的方差分量估计[J]. 大地测量与地球动力学,1988,(2):144-152.

[6] 张飞鹏,冯初刚,等. 改进的 Helmert 方差分量估计方法在精密定轨中的应用[J]. 测绘学报,2000,29(3):30-37.

[7] 魏子卿,黄维彬,等. 全国天文大地网与空间大地网联合平差[J]. 测绘学报,2000,29(4):283-288.

[8] 刘长建, 吴洪举,等. 一种调整两类观测值权比的新方案[J]. 测绘通报,2006(3):47-48.

# 《病态系统分析理论及其在测量中的应用》出版




[本刊讯] 近年来,参数估计中的病态问题引起越来越多的人的关注,成为数据处理中的一个研究热点。由山东科技大学卢秀山教授等著作的《病态系统分析理论及其在测量中的应用》近日由测绘出版社出版。该书系统介绍了病态性的诊断和削弱病态性的相关理论和办法,以及病态性系统的有效参数估计理论。在给出参数估计系统病态性分类的基础上,以 Hilbert 空间分析理论为工具,分别研究了参数空间、观测空间中子空间关系的度量,给出了几种参数关系、观测结构以及观测信息量度量的空间分析方法;分别研究了参数选择、病态系统参数估计方法,并给出了相应的应用示例。这些内容初步形成了"系统病态性分析理论"。该书有明显的特色,包含了作者在国家自然科学基金的资助下取得的最新研究成果,它们丰富了线性模型的参数估计理论。

该书可供测绘、统计、数值计算等与参数估计有关的学科的研究生、相应学科的科技工作者参考。

该书为 B5 开本,150 千字,定价 28.00 元。

(本刊编辑部)