

# 用豪泽-费许巴赫理论 计算复合核多次衰变过程的理论公式

田野 申庆彪

本文以中子和裂变核的反应为例，给出了用豪泽-费许巴赫理论计算复合核多次衰变的理论方法和公式，其中包括  $(n, n)$ ,  $(n, n'\gamma)$ ,  $(n, 2n)$ ,  $(n, 3n)$ ,  $(n, \gamma)$ ,  $(n, \gamma n')$ ,  $(n, \gamma f)$ ,  $(n, f)$ ,  $(n, n'f)$  和  $(n, 2nf)$  等。

**关键词** 豪泽-费许巴赫理论，复合核多次衰变过程，裂变核。

## 一、引言

豪泽-费许巴赫理论<sup>[1]</sup>是计算复合核反应的一种很有效的理论方法。这个理论是描述二体反应过程的。但是，如果我们把多于两个产物的过程看成是复合核的多次衰变，也可以用这一理论研究比较复杂的核反应过程。

当前豪泽-费许巴赫理论一般都是用来描述入射粒子能量较低的区域，而出现复杂反应过程的高能区域一般都用蒸发模型进行计算，有时还需要考虑平衡前发射的贡献<sup>[2]</sup>。我们知道，描述复合核平衡态发射的蒸发模型是一种比较粗糙的理论，它没有考虑角动量和宇称守恒。为此，有人用豪泽-费许巴赫理论计算了  $(n, 2n)$  反应截面<sup>[3]</sup>，得到了和实验数据大致符合的结果。随着大型计算机的使用，数值计算方法的改进，用考虑角动量和宇称守恒的统计理论计算包含多次衰变过程的高能段核反应是可能的。本文以中子和裂变核的反应为例，给出了用豪泽-费许巴赫理论计算复合核多次衰变过程的理论方法和公式。

我们研究中子与裂变核的反应过程，入射中子能量限制在 17 MeV 以下，这时需要研究的主要的复合核衰变过程可用图 1 表示。

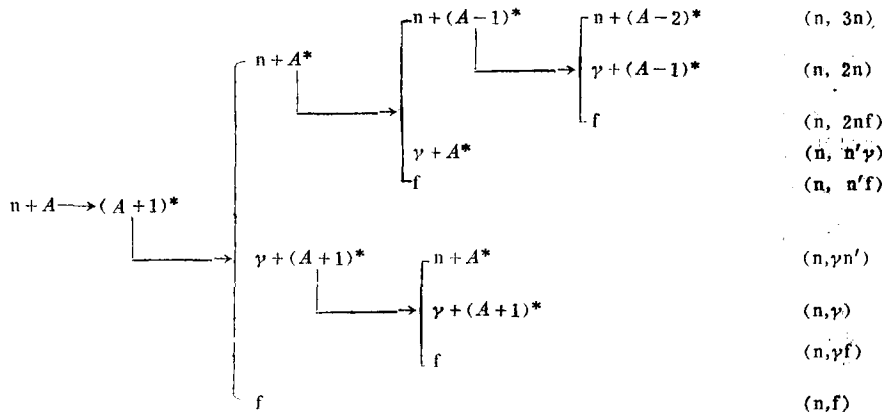


图 1 中子与裂变核复合核反应的多次衰变图

对于重核来说，由于发射带电粒子道截面很小，因而暂不考虑。下面我们将分别给出  $(n, n)$ ,  $(n, n'\gamma)$ ,  $(n, 2n)$ ,  $(n, 3n)$ ,  $(n, \gamma)$ ,  $(n, \gamma n')$ ,  $(n, \gamma f)$ ,  $(n, f)$ ,  $(n, n'f)$  和  $(n, 2nf)$  等核反应过程的截面计算公式。

## 二、截面公式

原子核在低激发能区为分立能级，在高激发能区，由于能级非常密，认为是连续能级，用能级密度描述。为了简单起见，我们只考虑发生散射后的剩余核  $A$  的分立能级，而其它情况一律当连续能级处理。对于重核来说，由于分立能级的激发能比较低，因而它只能通过释放  $\gamma$  来趋向平衡。同样，为了简单起见，本文一律不考虑宽度涨落修正。

下面分别给出上述各种复合核多次衰变过程的截面公式。

### 1. 分立能级的散射截面公式

$$\sigma_{k'} = g \sum_{J\pi} \frac{2J+1}{T_{(A)}^{J\pi}} \sum_{l_0 j_0} T_{0l_0 j_0(A)} \sum_{l_1 j_1} T_{k'l_1 j_1(A)}, \quad (1)$$

其中 
$$g = \frac{\pi}{2(2I_0+1)K^2}, \quad (2)$$

而 
$$K = \frac{\sqrt{2\mu E}}{\hbar}. \quad (3)$$

$E$  为质心系入射中子能量； $\mu$  是折合质量； $J, \pi$  分别为系统的总角动量和宇称； $l_0, j_0, I_0$  和  $l_1, j_1, I_1$  分别为反应前和反应后的轨道角动量、粒子总角动量和原子核角动量。反应前靶核处于基态，用“0”表示，而  $K'$  为剩余核能级标号。穿透系数

$$T_{K', l_1 j_1(A)} = T_{l_1 j_1(A)}(E - \epsilon_{K'}). \quad (4)$$

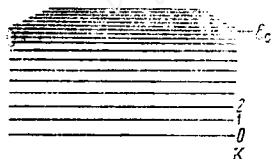


图 2 A 核能级示意图

$\epsilon_{K'}$  为  $K'$  激发态的激发能。  $T_{l_1 j_1(A)}$  为  $A$  核的穿透系数，可由光学模型计算给出。  $T_{(A)}^{J\pi}$  为靶核  $A$  的总穿透系数，后边再给具体表达式。

### 2. 放出一个中子后剩余核处在连续能级的截面公式

$A$  核能级示意图见图 2。当剩余核激发能大于  $\epsilon_c$  时便认为是连续能级。复合核  $(A+1)^*$  放出一个中子后，剩余核处在连续能级的截面为：

$$\sigma_N = g \sum_{J\pi} \frac{2J+1}{T_{(A)}^{J\pi}} \sum_{l_0 j_0} T_{0l_0 j_0(A)} \sum_{l_1 j_1} T_{N, l_1 j_1}, \quad (5)$$

其中

$$T_{N, l_1 j_1} = \begin{cases} \sum_{I_1 \pi_1} \int_0^{E - \epsilon_c} T_{l_1 j_1(A)}(E_1) \rho_A(I_1 \pi_1, E - E_1) dE_1, & \text{当 } (E - \epsilon_c) > 0 \text{ 时} \\ 0, & \text{当 } (E - \epsilon_c) \leq 0 \text{ 时} \end{cases} \quad (6)$$

式中， $E_1$  为发射的中子能量； $I_1$  和  $\pi_1$  为剩余核激发态的角动量和宇称； $\rho_A$  为剩余核  $A$  的能级密度，可取参考文献[4]所给的形式。由图 1 可以看出，实际上  $\sigma_N$  为多种反应截面之和。

### 3. 接连放出两个中子的截面公式

接连放出两个中子的过程，即  $(A+1)^* \rightarrow n +$

$A^* \rightarrow 2n + (A-1)^*$ 的过程。由图1可知,  $(A-1)^*$ 仍有多种衰变方式。计算这种过程的截面公式为:

$$\sigma_{2N} = g \sum_{J\pi} \frac{2J+1}{T_{(A)}^{J\pi}} \sum_{l_0 j_0} T_{0l_0 j_0(A)} \sum_{l_1 j_1} T_{2N, l_1 j_1}, \quad (7)$$

其中

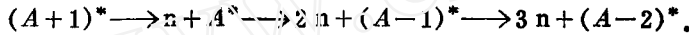
$$T_{2N, l_1 j_1} = \sum_{I_1 \pi_1} \int_0^{E-B_A} T_{l_1 j_1(A)}(E_1) \rho_A(I_1 \pi_1, E-E_1) \left[ \sum_{l_2 j_2} R_{2N, l_2 j_2}(I_1 \pi_1, E_1) \right] dE_1. \quad (8)$$

分支比可用以下公式计算:

$$R_{2N, l_2 j_2}(I_1 \pi_1, E_1) = \frac{\sum_{I_2 \pi_2} \int_0^{E-E_1-B_A} T_{l_2 j_2(A-1)}(E_2) \rho_{A-1}(I_2 \pi_2, E-E_1-B_A-E_2) dE_2}{T_{(A-1)}^{I_1 \pi_1}(E-E_1-B_A)}, \quad (9)$$

其中,  $B_A$  为  $A$  核的中子结合能,  $l_2$  和  $j_2$  为放出的第二个中子的轨道角动量和粒子总角动量,  $I_2$  和  $\pi_2$  为放出第二个中子后剩余核  $(A-1)$  的激发态的角动量和宇称。  $\rho_{A-1}$  为  $(A-1)$  核的能级密度。  $T_{(A-1)}^{I_1 \pi_1}(E-E_1-B_A)$  相当于能量为  $(E-E_1-B_A)$  的中子与  $(A-1)$  核发生反应, 系统总角动量和宇称为  $I_1$  和  $\pi_1$  时的总穿透系数, 给出方法与  $T_{(A)}^{I_1 \pi_1}$  相类似。  $R_{2N, l_2 j_2}(I_1 \pi_1, E_1)$  代表激发能为  $E+B_{A+1}$  的复合核  $(A+1)$  发射能量为  $E_1$ 、角动量为  $l_1, j_1$  的第一个中子后, 还有多大比例能发射角动量为  $l_2, j_2$  的第二个中子。由图1可以看出,  $\sigma_{2N}$  也是几种反应截面之和。

4.  $(n, 3n)$  截面公式  $(n, 3n)$  反应是指以下复合核衰变过程:



由于我们限制中子能量不超过 17 MeV,  $(n, 4n)$  过程一般不能发生,  $(A-2)^*$  只能通过释放  $\gamma$  退激发。计算  $(n, 3n)$  过程的截面公式为:

$$\sigma_{3n} = g \sum_{J\pi} \frac{2J+1}{T_{(A)}^{J\pi}} \sum_{l_0 j_0} T_{0l_0 j_0(A)} \sum_{l_1 j_1} T_{3n, l_1 j_1}, \quad (10)$$

其中

$$T_{3n, l_1 j_1} = \sum_{I_1 \pi_1} \int_0^{E-B_A-B_{A-1}} T_{l_1 j_1(A)}(E_1) \rho_A(I_1 \pi_1, E-E_1) \left[ \sum_{l_2 j_2} Q_{3n, l_2 j_2}(I_1 \pi_1, E_1) \right] dE_1, \quad (11)$$

而  $Q_{3n, l_2 j_2}(I_1 \pi_1, E_1)$

$$= \frac{\sum_{I_2 \pi_2} \int_0^{E-E_1-B_A-B_{A-1}} T_{l_2 j_2(A-1)}(E_2) \rho_{A-1}(I_2 \pi_2, E-E_1-B_A-E_2) \left[ \sum_{l_3 j_3} R_{3n, l_3 j_3}(I_2 \pi_2, E_1 E_2) \right] dE_2}{T_{(A-1)}^{I_1 \pi_1}(E-E_1-B_A)} dE_2. \quad (12)$$

又  $R_{3n, l_3 j_3}(I_2 \pi_2, E_1 E_2)$

$$= \frac{\sum_{I_3 \pi_3} \int_0^{E-E_1-B_A-E_2-B_{A-1}} T_{l_3 j_3(A-2)}(E_3) \rho_{A-2}(I_3 \pi_3, E-E_1-B_A-E_2-B_{A-1}-E_3) dE_3}{T_{(A-2)}^{I_2 \pi_2}(E-E_1-B_A-E_2-B_{A-1})}. \quad (13)$$

这里,  $B_{A-1}$  是  $(A-1)$  核的中子结合能,  $l_3$  和  $j_3$  为放出的第三个中子的轨道角动量和粒子总角动量,  $I_3$  和  $\pi_3$  为放出第三个中子后剩余核  $(A-2)$  的激发态的角动量和宇称。  $\rho_{A-2}$  为  $(A-2)$  核的能级密度。  $T_{(A-2)}^{I_2 \pi_2}(E-E_1-B_A-E_2-B_{A-1})$  相当于能量为  $(E-E_1$

$-B_A - E_2 - B_{A-1}$ ) 的中子与  $(A-2)$  核发生反应, 系统总角动量为  $I_2$ 、宇称为  $\pi_2$  时的总穿透系数。 $R_{3n, l_1 j_1, l_2 j_2}(I_2 \pi_2, E_1 E_2)$  为发射完能量为  $E_1$  的第一个中子和能量为  $E_2$  的第二个中子以后, 角动量和宇称为  $I_2$  和  $\pi_2$  的复合核  $(A-1)$  还有多大几率能发射角动量为  $l_3$ 、 $j_3$  的第三个中子。 $Q_{3n, l_1 j_1, l_2 j_2}(I_1 \pi_1, E_1)$  为发射完能量为  $E_1$  的第一个中子后, 角动量和宇称为  $I_1$  和  $\pi_1$  的复合核  $A$  能发射角动量为  $l_2$ 、 $j_2$  的第二个中子, 而且接着还能发射第三个中子的情况所占的比例。

**5. (n, f) 截面公式** 由于我们可以把裂变道和发射粒子道同等看待, 于是可以写出 (n, f) 的截面公式如下:

$$\sigma_f = g \sum_{J\pi} \frac{2J+1}{T_{(A)}^{J\pi}} \sum_{l_0 j_0} T_{0l_0 j_0} T_f^{J\pi} \quad (14)$$

为了简单起见, 我们只考虑单峰位垒,  $T_f^{J\pi}$  可按以下公式计算<sup>[5]</sup>:

$$T_f^{J\pi} = \int_0^\infty \frac{\rho_{f, A+1}(J\pi, e)}{1 + \exp\left[-\frac{2\pi(E + B_{A+1} - V_{f, A+1} - e)}{\hbar\omega_{A+1}}\right]} de, \quad (15)$$

其中,  $V_{f, A+1}$  为复合核  $(A+1)$  的裂变位垒高度,  $\hbar\omega_{A+1}$  为特征参量,  $\rho_{f, A+1}$  为裂变的鞍点态能级密度。

**6. (n, n'f) 截面公式** 复合核  $(A+1)^*$  放出一个中子后, 剩余核  $A^*$  再发生裂变的过程称为 (n, n'f) 过程, 截面公式为:

$$\sigma_{n'f} = g \sum_{J\pi} \frac{2J+1}{T_{(A)}^{J\pi}} \sum_{l_0 j_0} T_{0l_0 j_0(A)} \sum_{l_1 j_1} T_{n'f, l_1 j_1}, \quad (16)$$

其中

$$T_{n'f, l_1 j_1} = \sum_{I_1 \pi_1} \int_0^{E-e_0} T_{l_1 j_1(A)}(E_1) \rho_A(I_1 \pi_1, E - E_1) R_{n'f}(I_1 \pi_1, E_1) dE_1, \quad (17)$$

而

$$R_{n'f}(I_1 \pi_1, E_1) = \frac{\int_0^\infty \frac{\rho_{f, A}(I_1 \pi_1, e)}{1 + \exp[-2\pi(E - E_1 - V_{f, A} - e)/(\hbar\omega_A)]} de}{T_{(A-1)}^{I_1 \pi_1}(E - E_1 - B_A)} \quad (18)$$

为了自洽起见, 在(17)式中积分上限取为  $E - e_0$ , 表明当复合核发射一个中子后, 若剩余核已处在分立能级, 便不会发生裂变了。实际上, 由(18)式可以看出, 当  $E_1 > E - e_0$  时, 由于  $e_0 \ll V_{f, A}$ , 所求出的  $R_{n'f}$  已经可以忽略不计了。

**7. (n, 2nf) 截面公式** 复合核  $(A+1)^*$  放出两个中子后, 剩余核  $(A-1)^*$  再发生裂变的过程称为 (n, 2nf) 过程, 截面公式为:

$$\sigma_{2nf} = g \sum_{J\pi} \frac{2J+1}{T_{(A)}^{J\pi}} \sum_{l_0 j_0} T_{0l_0 j_0(A)} \sum_{l_1 j_1} T_{2nf, l_1 j_1}, \quad (19)$$

其中

$$T_{2nf, l_1 j_1} = \sum_{I_1 \pi_1} \int_0^{E-B_A} T_{l_1 j_1(A)}(E_1) \rho_A(I_1 \pi_1, E - E_1) \left[ \sum_{l_2 j_2} Q_{2nf, l_2 j_2}(I_1 \pi_1, E_1) \right] dE_1, \quad (20)$$

而  $Q_{2n_f, l_2, j_2}(I_1 \pi_1, E_1)$

$$= \frac{\sum_{I_2 \pi_2} \int_0^{E-E_1-B_A} T_{l_2, j_2(A-1)}(E_2) \rho_{A-1}(I_2 \pi_2, E-E_1-B_A-E_2) R_{2n_f}(I_2 \pi_2, E_1 E_2) dE_2}{T_{(A-1)}^{l_2 \pi_2}(E-E_1-B_A)}, \quad (21)$$

又  $R_{2n_f}(I_2 \pi_2, E_1 E_2)$

$$= \frac{\int_0^\infty \frac{\rho_{f, A-1}(I_2 \pi_2, \varepsilon)}{1 + \exp[-2\pi(E-E_1-B_A-E_2-V_{f, A-1}-\varepsilon)/(\hbar\omega_{A-1})]} d\varepsilon}{T_{(A-1)}^{l_2 \pi_2}(E-E_1-B_A-E_2-B_{A-1})}. \quad (22)$$

8. (n, 2n)截面 由图 1 很容易看出(n, 2n)截面为:

$$\sigma_{2n} = \sigma_{2N} - \sigma_{3n} - \sigma_{2n_f}. \quad (23)$$

9. 连续能级的(n, n'γ)截面 由图 1 可以看出, 连续能级的(n, n'γ)反应截面为:

$$\sigma_o = \sigma_N - \sigma_{2N} - \sigma_{n'f}. \quad (24)$$

10. 第一次衰变放 γ 射线的截面公式 我们把放 γ 射线的道和发射粒子的道同等看待, 于是我们可以写出(A+1)\* → γ + (A+1)\*过程的截面公式为:

$$\sigma_r = g \sum_{J\pi} \frac{2J+1}{T_{(A)}^{J\pi}} \sum_{l_0 j_0} T_{0l_0 j_0} T_{r}^{J\pi}. \quad (25)$$

其中辐射俘获穿透系数用巨偶极共振模型<sup>[5, 6]</sup>计算:

$$T_{r}^{J\pi} = C_0^{J\pi} \int_0^{E+B_{A+1}} E_\gamma^3 f(E_\gamma) \left[ \sum_{l' \pi'} \rho_{A+1}(l' \pi', E+B_{A+1}-E_\gamma) \right] dE_\gamma, \quad (26)$$

其中

$$C_0^{J\pi} = S_\gamma^{J\pi} / \int_0^{B_{A+1}} E_\gamma^3 f(E_\gamma) \left[ \sum_{l' \pi'} \rho_{A+1}(l' \pi', B_{A+1}-E_\gamma) \right] dE_\gamma, \quad (27)$$

$S_\gamma^{J\pi}$  为  $E=0$  时的 γ 射线强度函数, 可由实验观测确定。而外形函数取巨偶极共振型:

$$f(E_\gamma) = \frac{2}{\pi} \sum_\lambda \frac{\Gamma_{\gamma\lambda} E_\gamma}{(E_\gamma^2 - E_{\gamma\lambda}^2)^2 + (\Gamma_{\gamma\lambda} E_\gamma)^2}. \quad (28)$$

$E_{\gamma\lambda}$  和  $\Gamma_{\gamma\lambda}$  为巨偶极共振参数。

11. (n, γn')截面公式 当靶核俘获能量为  $E$  的入射中子后, 形成复合核(A+1)\*, 其激发能为  $E+B_{A+1}$ 。如果, 第一次衰变放 γ 射线, 而且  $E_\gamma < E$ , 剩余核(A+1)\*还可能发射中子, 即为(n', γ'n)反应(见图 3)。其截面公式为:

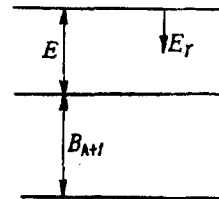


图 3 复合核(A+1)\*的激发能

$$\sigma_{\gamma n'} = g \sum_{J\pi} \frac{2J+1}{T_{(A)}^{J\pi}} \sum_{l_0 j_0} T_{0l_0 j_0(A)} T_{\gamma n'}^{J\pi}, \quad (29)$$

其中

$$T_{\gamma n'}^{J\pi} = C_0^{J\pi} \int_0^E E_\gamma^3 f(E_\gamma) \left[ \sum_{l_1 \pi_1} \rho_{A+1}(l_1 \pi_1, E+B_{A+1}-E_\gamma) \times \left( \sum_{l_1 j_1} R_{\gamma n', l_1 j_1}(l_1 \pi_1, E_\gamma) \right) \right] dE_\gamma. \quad (30)$$

而

$$R_{\gamma n', l_1 j_1}(I' \pi', E_\gamma) = \frac{1}{T_{(A)}^{I' \pi'}(E - E_\gamma)} \left\{ \sum_{K'} T_{l_1 j_1(A)}(E - E_\gamma - \varepsilon_{K'}) + \sum_{I_1 \pi_1} \int_0^{E - E_\gamma - \varepsilon_c} T_{l_1 j_1(A)} \rho_A(I_1 \pi_1, E - E_\gamma - E_1) dE_1 \right\}. \quad (31)$$

在(31)式的大括号中, 第一项为分立能级的贡献, 第二项为连续能级的贡献。

**12. (n, γf)截面公式** 如果复合核(A+1)\*放出γ后, 还可能发生裂变, 即为(n, γf)反应, 其截面公式为:

$$\sigma_{\gamma f} = g \sum_{J\pi} \frac{2J+1}{T_{(A)}^{J\pi}} \sum_{l_0 j_0} T_{l_0 j_0} T_{\gamma f}^{J\pi}, \quad (32)$$

其中

$$T_{\gamma f}^{J\pi} = C_0^{J\pi} \int_0^{E+B_{A+1}} E^3 f(E_\gamma) \left[ \sum_{I' \pi'} \rho_{A+1}(I' \pi', E + B_{A+1} - E_\gamma) \times R_{\gamma f}(I' \pi', E_\gamma) \right] dE_\gamma, \quad (33)$$

$$\text{而 } R_{\gamma f}(I' \pi', E_\gamma) = \frac{1}{T_{(A)}^{I' \pi'}(E - E_\gamma)} \int_0^{E+B_{A+1}-E_\gamma} \frac{\rho_{A+1}(I' \pi', \varepsilon)}{1 + \exp[-2\pi(E + B_{A+1} - E_\gamma - V_{f, A+1} - \varepsilon)/(\hbar\omega_{A+1})]} d\varepsilon \quad (34)$$

**13. (n, γ)截面** 由图 1 可以看出, (n, γ)反应截面应为:

$$\sigma_\gamma = \sigma_f - \sigma_{\gamma n'} - \sigma_{\gamma f}. \quad (35)$$

**14. 靶核A的总穿透系数** 在截面公式中所出现的靶核A的总穿透系数由下式给出:

$$T_{(A)}^{J\pi} = \sum_{l_1 j_1} \left[ \sum_{K'} T_{K', l_1 j_1(A)} + T_{N, l_1 j_1} \right] + T_f^{J\pi} + T_f^{J\pi}. \quad (36)$$

### 三、讨 论

当入射中子能量不超过 17 MeV 时, 主要反应道的截面公式在前面都已给出, 其中包括了截面较小的 (n, γn')和(n, γf)反应。因而, 也就给出了在 高能段用考虑角动量和宇称守恒的统计理论进行计算的方法。但是, 当前在计算机上实现以上计算还是有困难的, 因为(A-1)核和(A-2)核的光学模型穿透系数的计算量非常大。不过我们相信, 随着计算机速度的提高, 计算方法的改进, 以及采用一定的近似方法, 这种困难会逐步得到解决和克服。

### 参 考 文 献

[1] W. Hauser & H. Feshbach, *Phys. Rev.*, **87**, 366(1952).  
 [2] 张竟上、王书暖, 核反应理论方法及其应用文集 (二机部核数据中心编), 原子能出版社, 1980年, 226页。  
 [3] W. K. Bertram, AAEC/TM 542(1970).  
 [4] A. Gilbert et al., *Can. J. Phys.*, **43**, 1446(1965).  
 [5] J. E. Lynn, AERE-R 7468.  
 [6] S. Igarasi, *J. Nucl. Sci. Technol.*, **12**, 67(1975).

(编辑部收到日期: 1980年1月29日)