用 Spline 函数拟合实验数据

王 丽 玫

本文叙述了 Spline 和 B-Spline 的定义及其性质；介绍用三次 Spline 拟合多家实验数据的方法和计算程序。

一、引　　言

在拟合实验数据过程中，当曲线形状不甚复杂时，可用正交多项式

$$g(x)=\sum_{j=1}^{N} C_{kj}T_j(x).$$

作拟合，此时的基底是正交多项式 $T_j(x)$；当曲线形状复杂或者自变量涉及的范围很宽时，再用此法就不适合了，在这种情况下，通常采用具有局部性质的Spline函数作拟合，即令拟合函数为：

$$S(x)=\sum_{l=1}^{N} A_l BS_{lk}(x).$$

此时的基底 $BS_{lk}(x)$是"标准化"B-Spline，它具有较好的灵活性和稳定性，并具备了一般说来足够的光滑度，而且比较简单。

本工作首先叙述 Spline 和 B-Spline 的定义及其性质，然后介绍用三次 Spline 拟合多家实验数据的方法和计算程序。

二、多项式 Spline 函数和它的 B-Spline 基底

在区间$[\alpha,\beta]$作一个分割：

$$(t_0)=\alpha<t_1<t_2<\cdots<t_N<\beta=(t_{N+1}). \tag{1}$$

(1)称为多项式 Spline 的一组节点。以此为节点的$(k-1)$次 Spline 函数 $S(x)$满足：

〈i〉 对于 $i=1,2,\cdots,N+1$，在每个开区间(t_{i-1},t_i)内是一个次数$\leqslant(k-1)$的多项式；

〈ii〉 在开区间(α,β)有$(k-2)$次连续函数。

因此对于形如(1)的每组节点，这样一类的 Spline 函数构成具有$(N+k)$个自由参数的线性空间，它的基底一般取便于计算的 B-Spline。

在拟合实验数据中，通常使用的 B-Spline 是"标准化"B-Spline，它定义为：

$$BS_{lk}=(t_{l+k}-t_l)g_k(t_l,t_{l+1},\cdots,t_{l+k};x), \tag{2}$$

其中

$$g_k(S,x)=(S-x)_+^{k-1}=(\max\{(S-x),0\})^{k-1}$$

$$=\begin{cases}(S-x)^{k-1} & S>x,\\ 0 & S\leqslant x.\end{cases} \tag{3}$$

是截断幂函数。$g_k(t_l,t_{l+1},\cdots,t_{l+k};x)$表示函数$g_k(S,x)$在$t_l,t_{l+1},\cdots,t_{l+k}$的$k$阶差商，即

$$g_k(t_l,t_{l+1},\cdots,t_{l+k};x)=\sum_{j=0}^{k}\frac{(t_{l+j}-x)_+^{k-1}}{\prod\limits_{\substack{i=0\\ i\neq j}}^{k}(t_{l+j}-t_{l+i})}. \tag{4}$$

可见在区间(t_l,t_{l+k})内$BS_{lk}(x)$取严格正值(即$BS_{lk}(x)>0$)，而在其外边恒等于零。

在本工作中，取$k=4$，即用三次 B-Spline，其表达式为：

$$BS_{lk}(x)=(t_{l+k}-t_l)\cdot\sum_{j=0}^{k}\frac{(t_{l+j}-x)_+^{k-1}}{D(t_{l+j})}. \tag{5}$$

由上述性质知：

$$BS_{l4}(x)=(t_{l+4}-t_l)\cdot\begin{cases}0, & x\leqslant t_l\\ \dfrac{(t_{l+1}-x)^3}{D(t_{l+1})}+\dfrac{(t_{l+2}-x)^3}{D(t_{l+2})}+\dfrac{(t_{l+3}-x)^3}{D(t_{l+3})}+\dfrac{(t_{l+4}-x)^3}{D(t_{l+4})}, & t_l\leqslant x<t_{l+1}\\ \dfrac{(t_{l+2}-x)^3}{D(t_{l+2})}+\dfrac{(t_{l+3}-x)^3}{D(t_{l+3})}+\dfrac{(t_{l+4}-x)^3}{D(t_{l+4})}, & t_{l+1}\leqslant x<t_{l+2}\\ \dfrac{(t_{l+3}-x)^3}{D(t_{l+3})}+\dfrac{(t_{l+4}-x)^3}{D(t_{l+4})}, & t_{l+2}\leqslant x<t_{l+3}\\ \dfrac{(t_{l+4}-x)^3}{D(t_{l+4})}, & t_{l+3}\leqslant x<t_{l+4}\\ 0. & x\geqslant t_{l+4}\end{cases} \tag{6}$$

其中

$$D(t_{l+j})=\prod_{\substack{i=0\\ i\neq j}}^{4}(t_{l+j}-t_{l+i}) \qquad j=0,1,\cdots 4.$$

在这里必须提及，B-Spline 可以表示成以下两种形式[1]：

$$\mathrm{BS}_{l4}(x)=(t_{l+4}-t_l)\sum_{j=0}^{4}\frac{(t_{l+j}-x)_+^3}{D(t_{l+j})}=(t_{l+4}-t_l)\sum_{j=0}^{4}\frac{(x-t_{l+j})_+^3}{D(t_{l+j})}. \tag{7}$$

我们在以下可以看到，这给计算$BS_{l4}(x)$提供了方便。

根据 Curry 和 Schoenberg[2] 的定理，任何一个以(1)为节点的 3 次 Spline $S(x)$，可以唯一地表成$N+4=G$个$BS_{l4}(x)$的线性组合：

$$S(x)=\sum_{l=1}^{G}A_lBS_{l4}(x). \tag{8}$$

为了得到$(N+4)$个 B-Spline，我们在区间$[\alpha,\beta]$两端各加入 4 个连续节点，为：

$$t_{-3}\leqslant t_{-2}\leqslant t_{-1}\leqslant t_0=\alpha,\ \beta=t_{N+1}\leqslant t_{N+2}\leqslant t_{N+3}\leqslant t_{N+4},$$

在具体的计算中，一般取等号形式[3,4]，即

$$t_{-3}=t_{-2}=\cdots=\alpha,\quad \beta=t_{N+1}=\cdots=t_{N+4}. \tag{9}$$

三、用 B-Spline 拟合实验数据——固定节点问题（线性问题）

本工作只叙述用固定节点的 B-Spline 拟合实验数据问题，至于非线性问题（即自由节点问题），在另一工作中叙述。

如果节点是固定的，设有一组实验点 $x_1, x_2, \cdots, x_M$ 及相应的测量值 $y_1, y_2, \cdots, y_M$，一般情况下，用三次 Spline 函数作数据拟合是直接的线性最小二乘问题。也即要求，在给出一组固定节点的条件下，按(8)式构造 $S(x)$，其中系数 A_l 由使

$$F=\sum_{i=1}^{M} d_i[y_i-S(x_i)]^2=\sum_{i=1}^{M} d_i\left[y_i-\sum_{l=1}^{G} A_l BS_{l4}(x_i)\right]^2.$$

达到极小得到，这里 d_i 是 y_i 的权函数。

在核数据拟合中，我们经常碰到的是多家多点的拟合问题，并且由于每家及每个实验点的可靠性不一致，而有不同的权重，因此 F 的表达式略为不同，在本工作中，我们采用的是[5]所给出 F 表达式：

$$F=-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{K}\left[\sum_{i=1}^{n_k}(\Delta y_{ik})^{-2}\{y_{ik}-S(x_{ik})\}^2-\sum_{i=1}^{n_k}(\Delta y_{ik})^{-2}\{y_{ik}-S(x_{ik})\}^2\cdot\right.$$
$$\left.\cdot\left\{\sum_{i=1}^{n_k}(\Delta y_{ik})^{-2}+\Sigma_k^{-2}\right\}^{-1}\right]. \tag{10}$$

这里用到的符号跟[5]完全一样，按众所周知的最小二乘原理，A_l 满足如下方程组：

$$\sum_{k=1}^{K}\sum_{l=1}^{G} A_l\left\{\frac{\left[\sum_{i=1}^{n_k}(\Delta y_{ik})^{-2}BS_l(x_{ik})\right]\cdot\left[\sum_{i=1}^{n_k}(\Delta y_{ik})^{-2}BS_m(x_{ik})\right]}{\sum_{i=1}^{n_k}(\Delta y_{ik})^{-2}+\Sigma_k^{-2}}-\right.$$
$$\left.-\sum_{i=1}^{n_k}(\Delta y_{ik})^{-2}BS_l(x_{ik})\cdot BS_m(x_{ik})\right\}$$
$$=\sum_{k=1}^{K}\left\{\frac{\left[\sum_{i=1}^{n_k}(\Delta y_{ik})^{-2}y_{ik}\right]\cdot\left[\sum_{i=1}^{n_k}(\Delta y_{ik})^{-2}BS_m(x_{ik})\right]}{\sum_{i=1}^{n_k}(\Delta y_{ik})^{-2}+\Sigma_k^{-2}}-\sum_{i=1}^{n_k}(\Delta y_{ik})^{-2}y_{ik}BS_m(x_{ik})\right\} \tag{11}$$

$$m=1,2,\cdots G.$$

其矩阵形式为：

$$\boldsymbol{CA}=\boldsymbol{T}. \tag{12}$$

在这里要注意，为使 $\boldsymbol{C}$ 是对称正定，必须在(11)式左右端各乘以(-1)，这样在计算点 x' 的方差时便为：

$$\sigma^2(x')=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{B}. \tag{13}$$

其中

$$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=[BS_1(x'),\cdots,BS_G(x')].$$

根据Spline理论，在x'处只有4个BS_l不为零。若$t_l\leqslant x'<t_{l+1}$，则只有$BS_l(x')$，$BS_{l+1}(x')$，$BS_{l+2}(x')$，$BS_{l+3}(x')$不为零，因此，(13)式的具体表达式为：

$$\sigma^2(x')=\begin{cases}\displaystyle\sum_{v=l}^{l+3}\sum_{u=1}^{v+3}C_{vu}^{-1}BS_u(x')BS_v(x'), & v\leqslant 4\\ \displaystyle\sum_{v=l}^{l+3}\sum_{u=v-3}^{v+3}C_{vu}^{-1}BS_v(x')BS_u(x'), & v>4, t_{l-1}\leqslant x'<t_l.\end{cases} \tag{14}$$

为了判断拟合的好坏程度，一般还附带算出

$$S\chi^2=\frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{K}\sum_{i=1}^{n_k}(\Delta y_{ik})^{-2}[y_{ik}-b_k-S(x_{ik})]^2}{\displaystyle\sum_{k=1}^{K}n_k-(N+4)}. \tag{15}$$

如果$S\chi^2$达到极小，则表示节点的选择为最佳。

同时，还算出对应于节点区间$[t_{l-1},t_l]$中的χ_l^2：

$$\chi_l^2=\sum_{P=1}^{R}[y_P-b_{kp}-S(x_{kp})]^2/(R-1), \tag{16}$$

其中R为该区域的实验点数。如果χ_l^2的值过大，则应根据实验点的分布调节节点。

四、数学问题的解

1．线性方程组的解和矩阵的求逆

(11)式是关于A_l的线性方程组的问题，其系数矩阵可以证明是对称、正定的[6]。由于系数矩阵的特殊性质，我们采用LDL^T分解法[6]求解。用这个方法的好处是比通常的Gauss消去法节省一半的内存和运算量。

我们可以将系数矩阵$\boldsymbol{C}$分解成下列形式：

$$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{LDL}^T. \tag{17}$$

计算分解式(18)中矩阵$\boldsymbol{L}$与$\boldsymbol{D}$的元素l_{qs}和d_s的公式为：

$$\begin{cases}d_s=C_{ss}-\displaystyle\sum_{h=1}^{s-1}l_{sh}^2d_h,\\ l_{qs}=\left(C_{qs}=\displaystyle\sum_{h=1}^{s-1}l_{qh}\cdot l_{sh}\cdot d_q\right)/d_s, \qquad q=s+1,s+2,\cdots G,\end{cases} \tag{18}$$

$$s=1,2,\cdots G.$$

为了节省乘法运算及存储单元，可以令：

$$\tilde{C}_{qs}=l_{qs}\cdot d_s,$$

并将计算次序改为按行计算$\boldsymbol{L}$的元素，从上式即可得如下计算公式：

$$\begin{cases}\widetilde{C}_{qs}=C_{qs}-\sum_{h=1}^{s-1}\widetilde{C}_{qh}\cdot l_{sh}, & l_{qs}=\widetilde{C}_{qs}/d_s, \quad s=1,2,\cdots q-1,\\ d_q=C_{qq}-\sum_{h=1}^{q-1}\widetilde{C}_{qh}\cdot l_{qh}. & q=1,2,\cdots G.\end{cases} \tag{19}$$

求得矩阵 $\boldsymbol{L}$ 和 $\boldsymbol{D}$ 后，解方程组 $\boldsymbol{CA}=\boldsymbol{T}$ 即可分三步完成：

〈i〉 解下三角形方程组 $\boldsymbol{LZ}=\boldsymbol{T}$，得出向量 $\boldsymbol{Z}$；

〈ii〉 计算向量 $\boldsymbol{W}$ 的各分量：

$$W_f=z_f/d_f; \quad f=1,2,\cdots G.$$

〈iii〉 解上三角形方程组 $\boldsymbol{L}^T\boldsymbol{A}=\boldsymbol{W}$，即得到方程组的解。矩阵的逆，通过同时解 $(N+4)$ 个有特殊形式的右端的方程组来得到。

2. 一个给定点上的 B-Spline 函数的计算

由 Spline 的性质知，对每一个给定点，只有 4 个 B-Spline 不为零，为此我们对基本公式(5)经过一系列简化得到如下便于一次同时算出的形式。为程序实现上的需要，把节点重新编号并统一记为：

$$\mathrm{X}_1=\mathrm{X}_2=\mathrm{X}_3=\mathrm{X}_4=\alpha,$$
$$\mathrm{X}_{4+l}=t_l,$$
$$\mathrm{X}_{N+5}=\mathrm{X}_{N+6}=\mathrm{X}_{N+7}=\mathrm{X}_{N+8}=\beta.$$

当 $t_{l-1}\leqslant x_i<t_l$，这时 x_i 所属的节点区间为 $(\mathrm{X}_{l+3},\mathrm{X}_{l+4})$，而 4 个不为零的 B-Spline 为：

$$\begin{cases}BS_l(x_i)=\dfrac{(\mathrm{X}_{l+4}-x_i)^3}{(\mathrm{X}_{l+4}-\mathrm{X}_{l+3})(\mathrm{X}_{l+4}-\mathrm{X}_{l+2})(\mathrm{X}_{l+4}-\mathrm{X}_{l+1})},\\[2ex] BS_{l+1}(x_i)=\dfrac{(\mathrm{X}_{l+5}-x_i)^2(x_i-\mathrm{X}_{l+3})}{(\mathrm{X}_{l+4}-\mathrm{X}_{l+3})(\mathrm{X}_{l+5}-\mathrm{X}_{l+3})(\mathrm{X}_{l+5}-\mathrm{X}_{l+2})}+\\[2ex] \qquad +\dfrac{(\mathrm{X}_{l+4}-x_i)(x_i-\mathrm{X}_{l+2})(\mathrm{X}_{l+5}-x_i)}{(\mathrm{X}_{l+4}-\mathrm{X}_{l+3})(\mathrm{X}_{l+4}-\mathrm{X}_{l+2})(\mathrm{X}_{l+5}-\mathrm{X}_{l+2})}+\\[2ex] \qquad +\dfrac{(\mathrm{X}_{l+4}-x_i)^2(x_i-\mathrm{X}_{l+1})}{(\mathrm{X}_{l+4}-\mathrm{X}_{l+3})(\mathrm{X}_{l+4}-\mathrm{X}_{l+2})(\mathrm{X}_{l+4}-\mathrm{X}_{l+1})},\\[2ex] BS_{l+2}(x_i)=\dfrac{(x_i-\mathrm{X}_{l+3})^2(\mathrm{X}_{l+6}-x_i)}{(\mathrm{X}_{l+4}-\mathrm{X}_{l+3})(\mathrm{X}_{l+5}-\mathrm{X}_{l+3})(\mathrm{X}_{l+6}-\mathrm{X}_{l+3})}+\\[2ex] \qquad +\dfrac{(x_i-\mathrm{X}_{l+3})(\mathrm{X}_{l+5}-x_i)(x_i-\mathrm{X}_{l+2})}{(\mathrm{X}_{l+4}-\mathrm{X}_{l+3})(\mathrm{X}_{l+5}-\mathrm{X}_{l+3})(\mathrm{X}_{l+5}-\mathrm{X}_{l+2})}+\\[2ex] \qquad +\dfrac{(X_{l+4}-x_i)(x_i-X_{l+2})^2}{(X_{l+4}-X_{l+3})(X_{l+4}-X_{l+2})(X_{l+5}-X_{l+2})},\\[2ex] BS_{l+3}(x_i)=\dfrac{(x_i-X_{l+3})^3}{(X_{l+4}-X_{l+3})(X_{l+5}-X_{l+3})(X_{l+6}-X_{l+3})},\end{cases} \tag{20}$$

这里第一、四表达式，由定义及(7)式直接给出，第二、三式从定义出发，按(7)式经过一系列推导得到，我们以第二式为例推导如下(第三式与此相仿，不赘述)：

当 $X_{l+3}\leqslant x_i<X_{l+4}$，

$$BS_{l+1}(x_i)=(X_{l+5}-X_{l+1})\left[\frac{(X_{l+5}-x_i)^3}{\prod\limits_{\substack{j=0\\j\neq4}}^{4}(X_{l+1+j}-X_{l+5})}+\frac{(X_{l+4}-x_i)^3}{\prod\limits_{\substack{j=0\\j\neq3}}^{4}(X_{l+1+j}-X_{l+4})}\right].$$

我们逐项处理如下：

$$\frac{(X_{l+5}-X_{l+1})(X_{l+5}-x_i)^3}{\prod\limits_{\substack{j=0\\j\neq 4}}^{4}(X_{l+1+j}-X_{l+5})}=\frac{(X_{l+5}-x_i)^3(X_{l+5}-X_{l+1})}{(X_{l+5}-X_{l+1})(X_{l+5}-X_{l+2})(X_{l+5}-X_{l+3})(X_{l+5}-X_{l+4})}$$

$$=\frac{(X_{l+5}-x_i)^3(X_{l+4}-X_{l+3})}{(X_{l+5}-X_{l+2})(X_{l+5}-X_{l+3})(X_{l+5}-X_{l+4})(X_{l+4}-X_{l+3})}$$

$$=\frac{(X_{l+5}-x_i)^3(X_{l+4}-X_{l+5}+X_{l+5}-X_{l+3})}{(X_{l+5}-X_{l+2})(X_{l+5}-X_{l+3})(X_{l+5}-X_{l+4})(X_{l+4}-X_{l+3})}$$

$$=-\frac{(X_{l+5}-x_i)^2(X_{l+5}-X_{l+3}+X_{l+3}-x_i)}{(X_{l+5}-X_{l+2})(X_{l+5}-X_{l+3})(X_{l+4}-X_{l+3})}+$$

$$+\frac{(X_{l+5}-x_i)^3}{(X_{l+5}-X_{l+2})(X_{l+5}-X_{l+4})(X_{l+4}-X_{l+3})}$$

$$=-\frac{(X_{l+5}-x_i)^2}{(X_{l+5}-X_{l+2})(X_{l+4}-X_{l+3})}+\frac{(X_{l+5}-x_i)^2(x_i-X_{l+3})}{(X_{l+5}-X_{l+2})(X_{l+5}-X_{l+3})(X_{l+4}-X_{l+3})}+$$

$$+\frac{(X_{l+5}-x_i)^2(X_{l+5}-X_{l+4}+X_{l+4}-x_i)}{(X_{l+5}-X_{l+2})(X_{l+5}-X_{l+4})(X_{l+4}-X_{l+3})}$$

$$=\frac{(X_{l+5}-x_i)^2(x_i-X_{l+3})}{(X_{l+5}-X_{l+2})(X_{l+5}-X_{l+3})(X_{l+4}-X_{l+3})}+$$

$$+\frac{(X_{l+5}-x_i)^2(X_{l+4}-x_i)}{(X_{l+5}-X_{l+2})(X_{l+5}-X_{l+4})(X_{l+4}-X_{l+3})}$$

$$\frac{(X_{l+5}-X_{l+1})(X_{l+4}-x_i)^3}{\prod\limits_{\substack{j=0\\j\neq 3}}^{4}(X_{l+1+j}-X_{l+4})}=-\frac{(X_{l+5}-X_{l+1})(X_{l+4}-x_i)^3}{(X_{l+4}-X_{l+1})(X_{l+4}-X_{l+2})(X_{l+4}-X_{l+3})(X_{l+5}-X_{l+4})}$$

$$=-\frac{(X_{l+4}-x_i)^3(X_{l+5}-X_{l+4}+X_{l+4}-X_{l+1})}{(X_{l+4}-X_{l+1})(X_{l+4}-X_{l+2})(X_{l+4}-X_{l+3})(X_{l+5}-X_{l+4})}$$

$$=-\frac{(X_{l+4}-x_i)^3}{(X_{l+4}-X_{l+1})(X_{l+4}-X_{l+2})(X_{l+4}-X_{l+3})}-$$

$$-\frac{(X_{l+4}-x_i)^3}{(X_{l+4}-X_{l+2})(X_{l+4}-X_{l+3})(X_{l+5}-X_{l+4})}$$

$$=-\frac{(X_{l+4}-x_i)^2(X_{l+4}-X_{l+1}+X_{l+1}-x_i)}{(X_{l+4}-X_{l+1})(X_{l+4}-X_{l+2})(X_{l+4}-X_{l+3})}-$$

$$-\frac{(X_{l+4}-x_i)^2(X_{l+4}-X_{l+5}+X_{l+5}-x_i)}{(X_{l+4}-X_{l+2})(X_{l+4}-X_{l+3})(X_{l+5}-X_{l+4})}$$

$$=\frac{(X_{l+4}-x_i)^2(x_i-X_{l+1})}{(X_{l+4}-X_{l+1})(X_{l+4}-X_{l+2})(X_{l+4}-X_{l+3})}-$$

$$-\frac{(X_{l+4}-x_i)^2(X_{l+5}-x_i)}{(X_{l+4}-X_{l+2})(X_{l+4}-X_{l+3})(X_{l+5}-X_{l+4})}.$$

故

$$BS_{l+1}(x_i)=\frac{(X_{l+5}-x_i)^2(x_i-X_{l+3})}{(X_{l+5}-X_{l+2})(X_{l+5}-X_{l+3})(X_{l+4}-X_{l+3})}+$$

$$+\frac{(X_{l+5}-x_i)^2(X_{l+4}-x_i)}{(X_{l+5}-X_{l+2})(X_{l+5}-X_{l+4})(X_{l+4}-X_{l+3})}-$$

$$-\frac{(X_{l+4}-x_i)^2(X_{l+5}-x_i)}{(X_{l+4}-X_{l+2})(X_{l+4}-X_{l+3})(X_{l+5}-X_{l+4})}+$$

$$+\frac{(X_{l+4}-x_i)^2(x_i-X_{l+1})}{(X_{l+4}-X_{l+1})(X_{l+4}-X_{l+2})(X_{l+4}-X_{l+3})}$$

$$=\frac{(X_{l+5}-x_i)^2(x_i-X_{l+3})}{(X_{l+5}-X_{l+2})(X_{l+5}-X_{l+3})(X_{l+4}-X_{l+3})}+$$

$$+\frac{(X_{l+4}-x_i)(x_i-X_{l+2})(X_{l+5}-x_i)}{(X_{l+4}-X_{l+2})(X_{l+4}-X_{l+3})(X_{l+5}-X_{l+2})}+$$

$$+\frac{(X_{l+4}-x_i)^2(x_i-X_{l+1})}{(X_{l+4}-X_{l+1})(X_{l+4}-X_{l+2})(X_{l+4}-X_{l+3})}.$$

五、程 序 和 结 果

用Spline函数拟合实验数据，主要的计算量是B-Spline的计算，本程序的特点是根据Spline的性质按(20)式将每个实验点（和计算点）的4个不为零的B-Spline，一次同时算出并存贮在一组单元里，这样可以大大减少运算量和存贮量，使得在小机器DJS-21上也能对实验点数较多的问题作拟合。

本工作编制程序后，在DJS-21机上先后计算了如下具有代表性的例子：

(1) 计算 A. Horsley[5] 的3个具体实例，结果完全符合。

(2) 多家有阈能点的方案，并与正交多项式[7]计算结果比较。

(3) 南京大学伍必和老师提供的实验点少、曲线复杂的方案，用多种节点组进行试算。

(4) ^{235}U 中子散射截面(单家)拟合。

(5) 实验点数多的氘的全截面拟合(333个实验点，146个计算点)，仅用9分钟时间。

在本工作中，庄友祥同志帮助准备了 A. Horsley[5] 中的3个实例；于宝生、刘继才等同志提供了一些实验数据，用以考验本工作，作者在此一并致谢。

参 考 文 献

[1] T. N. E. Greville, Theory and Application of Spline Functions, 1969.
[2] David L. B. Jupp, *SIAM J. Numer. Anal.*, **15**, 328 (1978).
[3] Corl de Boor, *J. Approxi. Theory*, **6**, 50 (1972).
[4] Corl de Boor, LA-4728-MS (1971).
[5] A. Horsley et al., *Nucl. Instrum. Methods*, **62**, 29 (1968).
[6] 冯康等，数值计算方法，国防工业出版社，1978年。
[7] 王丽政等，原子能科学技术，3, 325 (1980).