协调决策形式背景及其属性约简

陈 秀,李克典
CHEN Xiu,LI Ke-dian

漳州师范学院 数学与信息科学系,福建 漳州 363000
Department of Mathmatics and Information Science,Zhangzhou Normal University,Zhangzhou,Fujian 363000,China
E-mail:tiankong13142003@yahoo.com.cn

CHEN Xiu,LI Ke-dian.Attribute reduction in consistent decision formal context.Computer Engineering and Applications,2009,45(26):56-57.

Abstract: This paper deals with consistent decision formal context and the attribute reduction in it.A relation based on formal context is defined here.In addition,this paper proposes theory of knowledge reduction based on consistent decision formal context and gives the judgement theorems and discernibility matrices,from which methods of attribute reduction in consistent decision formal context can be derived.
Key words: consistent decision formal context;decision consistent set;decision attribute reduction;discernibility matrices

摘 要:主要讨论协调决策形式背景的属性约简。首先定义了形式背景基础上的二元关系,并给出了协调决策形式背景,决策约简的定义。同时,给出了决策可辨识矩阵,得到协调决策形式背景知识的约简方法。
关键词:协调决策形式背景;决策协调集;决策约简;可辨识矩阵
DOI:10.3778/j.issn.1002-8331.2009.26.016 **文章编号:**1002-8331(2009)26-0056-02 **文献标识码:**A **中图分类号:**TP18

1 引言

自波兰数学家 Pawlak 提出粗糙集理论[1]以来,它已经被广泛应用于知识发现、人工智能、机器学习等领域,并引起了世界各地学者对其进行研究。许多研究者已经对经典粗糙集进行了不同的扩展[2-4]。

形式背景是形式概念分析的核心,是一种特殊的信息系统,也是研究知识发现与数据挖掘的重要内容。属性约简是知识发现的重要课题,是针对不同的目的要求,删除冗余的、不重要的属性,使知识表示简化。目前已有许多文献对属性约简进行了深入地研究,并且得到许多很好的结果。但这些结论都是基于信息系统的。关于形式背景,文献[3-4]对于形式背景以及由形式背景导出的概念格已经有很深入的研究。文献[5]在一般二元关系的形式背景中引入上下近似算子,讨论属性约简理论和方法。该文在文献[5]的基础上对于增加决策属性,形成决策形式背景进行研究,并得到其决策约简理论与方法。这对一般决策信息系统的知识发现有一定的意义。

2 形式背景的基本概念

定义 1[5] 称(U,A,I)为一个形式背景,其中$U=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$为对象集,每个$x_i(i\leqslant n)$成为一个对象;$A=(a_1,a_2,\cdots,a_m)$为属性集,每个$a_i(i\leqslant m)$称为一个属性;I是U和A之间的二元关系,$I\subseteq U\times A$。若$(x,a)\in I$,则称x具有属性a,记为xIa。若$(x,a)\notin I$,则称x不具有属性a。对于$B\subseteq A$,称(U,A,I_B)为(U,A,I)的子形式背景,其中$I_B=I\cap(U\times B)$。

定义 2[5] 设(U,A,I)是一个形式背景,$B\subseteq A$,对于每个$x\in U$,记$f_B(x)=\{a\in B|xI_Ba\}$,事实上,$f_B(x)=f_A(x)\cap B$,称$f_B(x)$为对象x在B中的属性集,对每个$a\in B$,记$g(a)=\{x\in U|xIa\}$,称$g(a)$为属性a的对象集。若对于每个$x\in U$,$f_B(x)\neq\phi$,$f_A(x)\neq A$,且对每个$a\in B$,$g(a)\neq\phi$,$g(a)\neq U$,则称形式背景(U,B,I_B)是正则的。以下假设(U,A,I)是正则的。对于形式背景(U,B,I_B),如果(U,B,I_B)是正则的,那么$\{g(a)|a\in B\}$是U的一个覆盖。

定义 3[5] 在形式背景(U,B,I_B)中,对于属性集A中的属性,对任意$a\in A$,记$[a]=\{b\in A|g(a)=g(b)\}$,则$\{[a]\}$是属性集A的一个划分。

3 形式背景的基本概念

定义 4 设(U,A,I)与(U,D,J)是两个形式背景,有相同的论域,则称(U,A,I,D,J)为决策形式背景,A为条件属性,D为决策属性。对$B\subseteq A$,对于每个$x\in U$,记$f_B(a)=\{a\in B|xI_Ba\}$,称$f_B(a)$为对象x在B中的属性集,对每个$a\in B$,记$g(a)=\{x\in U|xIa\}$,称$g(a)$为属性a的对象集,对任意$b\in C$,$l(b)=\{x\in U|xJb\}$,

基金项目:国家自然科学基金(the National Natural Science Foundation of China under Grant No.10571151)。
作者简介:陈秀(1984-),女,硕士研究生,主要研究方向为粗糙集理论及其应用;李克典(1956-),男,教授,主要研究方向为一般拓扑学及其应用、粗糙集理论及其应用。
收稿日期:2008-05-16 **修回日期:**2008-08-04

称 $l(b)$ 为决策属性 b 的对象集。

定义 5 对任意 $x\in U$，若令 $n_B(x)=\bigcap\limits_{a\in f_B(x)} g(a)$，则 $\{n_B(x)|x\in U\}$ 称为 U 上的一个邻域系统。对 $a\in A$，$x\in U$，若 xIa，则 $n_{\{a\}}(x)=g(a)$。否则，$n_{\{a\}}(x)=\phi$。

在决策形式背景中，令 $R_B=\{(x,y)\in U\times U|f_B(x)=f_B(y)\}$，显然 R_B 为等价关系。对任意 $x\in U$，$B\subseteq A$，令 $R_B(x)=\{y\in U|(x,y)\in R_B\}$。

命题 1 对于任意 $x\in U$，有

（1）$x\in n_B(x)$；

（2）$n_B(x)=R_B(x)$；

（3）$y\in n_B(x)\Leftrightarrow x\in n_B(y)\Leftrightarrow f_B(x)=f_B(y)$；

（4）若 $B_1\subseteq B_2$，则 $n_{B_1}(x)\supseteq n_{B_2}(x)$；

（5）若 $B_1,B_2\subseteq A$，则 $n_{B_1\cup B_2}(x)=n_{B_1}(x)\cap n_{B_2}(x)$；

在决策形式背景 (U,A,I,D,J) 中，若 $R_A\subseteq R_D$，称 (U,A,I,D,J) 为协调决策形式背景。

定义 6 设 (U,A,I,D,J) 为协调决策形式背景，若存在 $B\subseteq A$，使 $R_B\subseteq R_D$，称 B 为决策协调集。若 B 为决策协调集且对任意的 $a\in B$，$B-\{a\}$ 不是决策协调集，则称 B 为决策约简集。

定理 1 设 (U,A,I,D,J) 为协调决策形式背景，$B\subseteq A$，则 B 为决策协调集 $\Leftrightarrow n_B(x)\subseteq n_D(x)$。

证明 由定义 5 及定义 6 可得。

定理 2 设 (U,A,I,D,J) 为协调决策形式背景，$B\subseteq A$，则 B 为决策约简集 $\Leftrightarrow B$ 为协调集且对任意的 $a\in B$，$\exists x_0\in D$ 使 $n_{B-\{a\}}(x)\not\subseteq n_D(x)$。

证明 由定理 1 及定义 6 可得。

定义 7 在协调决策形式背景 (U,A,I,D,J) 中，$a\in A$，对任意 $x\in U$，都有 $n_{A-\{a\}}(x)\not\subseteq n_D(x)$，则称 $[a]$ 是决策可约属性类，a 是决策可约属性，否则称 $[a]$ 是不可约属性类，a 是类不可约属性。

定理 3 在协调决策形式背景 (U,A,I,D,J) 中，$a\in A$，则 $[a]$ 是决策可约属性类 $\Leftrightarrow R_{A-\{a\}}\subseteq R_D$。

证明 由定理 1 及定义 7 即得。

定理 4 设 (U,A,I,D,J) 为协调决策形式背景，B 是它的一决策约简集，则对任意 $a\in A$，都有 $|[a]\cap B|=1$ 或者 $|[a]\cap B|=0$。

证明（反证法） 假设存在 $a\in A$，使 $[a]\cap B\neq\phi$ 且 $|[a]\cap B|>1$。

不妨设存在 $a,b\in[a]\cap B$。由 $a,b\in[a]$，知 $g(a)=g(b)$。又 B 为决策约简集，则 B 必为决策协调集。因此，对任意 $x\in U$，都有 $n_B(x)\subseteq n_D(x)$。若 $x\in g(a)$，则 $n_{\{a\}}(x)\subseteq n_{\{b\}}(x)=g(a)$，且 $n_B(x)=n_{B-\{a,b\}}(x)\cap n_{\{a,b\}}(x)=n_{B-\{a,b\}}(x)\cap n_{\{a\}}(x)=n_{B-\{b\}}(x)$。

所以 $n_{B-\{b\}}(x)\not\subseteq n_D(x)$，由定义 6 知，$B-\{b\}$ 为决策协调集，这与 B 为决策约简集矛盾。另一方面，若 $x\notin g(a)$，则 $n_{\{a\}}(x)=n_{\{b\}}(x)=\phi$，有 $n_{B-\{b\}}(x)\subseteq n_D(x)$，则 $B-\{b\}$ 为决策协调集与 B 为决策约简集矛盾。

综上所述，有对任意 $a\in A$，对决策约简集 B，有 $|[a]\cap B|=1$ 或者 $|[a]\cap B|=0$。

定义 8 设 (U,A,I,D,J) 为协调决策形式背景，令

$$D([x_i]_A,[x_j]_A)=\begin{cases} f_A(x_i)\cup f_A(x_j)-f_A(x_i)\cap f_A(x_j), & [x_i]_D\cap[x_j]_D=\phi \\ \phi, & [x_i]_D\cap[x_j]_D\neq\phi \end{cases}$$

则称 $D([x_i]_A,[x_j]_A)$ 为 $[x_i]_A,[x_j]_A$ 的决策辨识集，称 $\boldsymbol{D}=D([x_i]_A,[x_j]_A)$ 为决策形式背景的决策辨识矩阵。

定理 5 设 (U,A,I,D,J) 为协调决策形式背景，$B\subseteq A$，若 B 为协调集 $\Leftrightarrow$ 对任意 $D([x_i]_A,[x_j]_A)\neq\phi$，有

$B\cap D([x_i]_A,[x_j]_A)\neq\phi$

证明 B 是决策协调集 $\Leftrightarrow R_B\subseteq R_D$，即对任意 $(x_i,x_j)\notin R_D$，必有 $(x_i,x_j)\notin R_B$，即 $[x_i]_A\cap[x_j]_A=\phi$ 必有 $f_B(x_i)\neq f_B(x_j)$，则必存在 $a\in B$，使得 $f_{\{a\}}(x_i)=\{a\}$，$f_{\{a\}}(x_j)=\phi$。又 $f_B(x)=f_A(x)\cap B$，从而 $f_A(x_i)\neq f_A(x_j)$，则 $D([x_i]_A,[x_j]_A)=f_A(x_i)\cup f_A(x_j)-f_A(x_i)\cap f_A(x_j)$，若 $D([x_i]_A,[x_j]_A)\neq\phi$，$B\subseteq A$，则 $a\in D([x_i]_A,[x_j]_A)$。故 $B\cap D([x_i]_A,[x_j]_A)\neq\phi$。

反之，若 $B\cap D([x_i]_A,[x_j]_A)\neq\phi$，要证 $R_B\subseteq R_D$，只要证若 $[x_i]_D\cap[x_j]_D=\phi$，则 $[x_i]_B\cap[x_j]_B=\phi$。设存在 $a\in B\cap D([x_i]_A,[x_j]_A)\neq\phi$，则 $a\in B$ 且 $a\in D([x_i]_A,[x_j]_A)$，所以，$[x_i]_D\cap[x_j]_D=\phi$ 且 $f_{\{a\}}(x_i)\neq f_{\{a\}}(x_j)$，从而 $f_B(x_i)\neq f_B(x_j)$，因此，$[x_i]_B\cap[x_j]_B=\phi$。故 $R_B\subseteq R_D$，即 B 为协调集。

在协调决策形式背景中，根据条件属性，决策属性和各属性约简的关系，可对条件属性集 A 中的属性进行分类：

定义 9 设 $\{B_i\}_{i\in\tau}$ 是协调决策形式背景 (U,A,I,D,J) 的所有决策约简集，则把 A 中的属性分为三类：

（1）决策核心属性集：$C=\bigcap\limits_{i\in\tau} B_i$；

（2）决策相对必要属性集：$K=\bigcup\limits_{i\in\tau} B_i-C$；

（3）决策不必要属性集：$I=A-\bigcup\limits_{i\in\tau} B_i$。

定理 6 (U,A,I,D,J) 为协调决策形式背景，则以下命题等价：

（1）a 是决策核心；

（2）$R_{A-\{a\}}\not\subseteq R_D$；

（3）$[a]$ 是不可约属性类且 $|[a]|=1$。

证明 （1）$\Leftrightarrow$（2）由定义 9 及定理 2 可得。

（2）$\Rightarrow$（3）若 $|[a]|>1$，则有 $R_A=R_{A-\{a\}}$，从而 $R_{A-\{a\}}\subseteq R_D$，这与 $R_{A-\{a\}}\not\subseteq R_D$ 矛盾，所以，$|[a]|=1$。又由 $R_{A-\{a\}}=R_{A-\{a\}}\not\subseteq R_D$，可得 $[a]$ 是不可约属性类。

（3）$\Rightarrow$（2）若 $[a]$ 是不可约属性类且 $|[a]|=1$，即 $[a]=\{a\}$，由定义 7 有 $n_{A-\{a\}}(x)\not\subseteq n_D(x)$。由定义 9，可得 a 为核心属性，即 $R_{A-\{a\}}\not\subseteq R_D$。

定理 7 设 (U,A,I,D,J) 为协调决策形式背景，则以下命题等价：

（1）$a\in A$ 是决策不必要属性。

（2）$R(a)\subseteq R_D\cup R_{\{a\}}$，其中 $R(a)=\cup\{R_{B-\{a\}}|R_B\subseteq R_D,B\subseteq A\}$。

定理 8 决策不必要属性一定是类可约属性。

证明 设 $a\in I$，则由定义有 $[a]\cap C=\phi$ 且 $R_{A-\{a\}}\subseteq R_D$。由于 $R_{[a]}=R_{\{a\}}$，故 $R_{[a]}\subseteq R_C$。

因此，$R_A=R_C\cup R_{[a]}\cup R_{A-C\cup[a]}=R_C\cup R_{A-C\cup[a]}=R_{A-[a]}$。从而 $R_{A-[a]}\subseteq R_D$，即 $[a]$ 使可约属性类，即 a 是类可约属性。

定理 9 (U,A,I,D,J) 为协调决策形式背景，则以下命题等价：

（1）$a\in A$ 是决策相对必要属性；

（2）$R(a)\subseteq R_D\cup R_{\{a\}}$。

4 实例分析

给出表 1 所示形式背景，其中 $U=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6\}$ 为对象集，$A=\{a,b,c,d,e\}$ 是条件属性，$D=\{d_1,d_2\}$ 是决策属性。

（下转 67 页）