◎研究、探讨◎

# 模糊粗糙集拓扑性质的进一步研究

詹婉荣[1],于　海[1],张瑞玲[2]
ZHAN Wan-rong[1],YU Hai[1],ZHANG Rui-ling[2]

1.洛阳师范学院 数学科学学院,河南 洛阳 471022
2.洛阳师范学院 信息技术学院,河南 洛阳 471022
1.Academy of Mathematics and Science,Luoyang Normal College,Luoyang,Henan 471022,China
2.Academy of Information Technology,Luoyang Normal College,Luoyang,Henan 471022,China
E-mail:zhanwanrong@126.com

**ZHAN Wan-rong,YU Hai,ZHANG Rui-ling.Further research on topological properties of fuzzy rough sets.Computer Engineering and Applications,2009,45(24):28-29.**

**Abstract:** It's first pointed out that the conclusion of theorem 7 doesn't hold in the paper [Fuzzy rough sets based on Lukasiewicz $t$-norm and residuated implication],and a counter-example is found.Secondly,it is revised from two aspects:(1)When $R$ is a reflexive fuzzy relation,$T'=\{A\in F(U)|\underline{R}(A)=A\}$ is a fuzzy topology;(2)When $R$ is a reflexive and transitive fuzzy relation, the conclusions of the above-mentioned paper hold.Finally,necessary and sufficient condition that a fuzzy set $A$ is an open set of the fuzzy topology $T$ is obtained.Thus several other properties of the fuzzy topology $T$ are given.

**Key words:** rough set;fuzzy rough set;fuzzy topology;reflexive fuzzy relation;transitive fuzzy relation

**摘　要:**首先指出文献《基于Lukasiewicz三角模及其剩余蕴涵的模糊粗糙集》中定理7的结论不成立,并给出了反例。其次,从两个方面对上述文献进行了修正:(1)当$R$是自反模糊关系时,$T'=\{A\in F(U)|\underline{R}(A)=A\}$是一模糊拓扑;(2)当$R$是自反、传递的模糊关系时,上述文献中的结论成立。最后,给出了模糊集$A$为模糊拓扑$T$的开集的充分必要条件,从而得到了模糊拓扑$T$的另外几个性质。

**关键词:**粗糙集;模糊粗糙集;模糊拓扑;自反模糊关系;传递模糊关系
**DOI:**10.3778/j.issn.1002-8331.2009.24.009　**文章编号:**1002-8331(2009)24-0028-02　**文献标识码:**A　**中图分类号:**TP18

## 1　引言

模糊集和粗糙集理论在处理不确定性和不精确性问题方面都推广了经典集合论,它们都可以用来描述知识的不精确性和不完全性。针对模糊知识和模糊概念,人们提出了模糊粗糙集理论,由于模糊粗糙集理论整合了模糊集与粗糙集两种理论,具有更强的生命力。近年来,许多文献研究了粗糙集与拓扑空间之间的关系[1-5],为利用拓扑学的方法研究粗糙集理论奠定了基础。文[1]基于Lukasiewicz三角模及其剩余蕴涵算子,研究了模糊粗糙集的拓扑性质。但文[1]中定理7的结论不成立。该文对文[1]的结果进行修正,并在此基础上进一步研究了模糊粗糙集的拓扑性质。

## 2　文[1]结论的修正

$\otimes$和$\rightarrow$分别是Lukasiewicz三角模和Lukasiewicz蕴涵算子,其他基本概念及符号,均来自文[1],不再重复。

文[1]中的定理7:设$(U,R)$为一模糊近似空间,$R$是自反模糊关系。对于任意$A_i\in F(U),i\in I$,其中$I$是一指标集,有

$$\underline{R}(\bigcup_{i\in I}\underline{R}(A_i))=\bigcup_{i\in I}\underline{R}(A_i)$$

以下用定理7[1]和定理8[1]表示文[1]中的定理7和定理8。

首先指出定理7[1]的结论不成立。举反例如下:

设$U=\{x_1,x_2,x_3\}$,$R=\frac{1}{(x_1,x_1)}+\frac{1}{(x_1,x_2)}+\frac{0}{(x_1,x_3)}+\frac{1}{(x_2,x_1)}+\frac{1}{(x_2,x_2)}+\frac{0}{(x_2,x_3)}+\frac{0}{(x_3,x_1)}+\frac{1}{(x_3,x_2)}+\frac{1}{(x_3,x_3)}$,则$(U,R)$为一模糊近似空间,$R$是自反模糊关系。取模糊集$A_1=\frac{1}{x_1}+\frac{0}{x_2}+\frac{0}{x_3}$,$A_2=\frac{0}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}$。由$\underline{R}(A)(x)=\inf_{y\in U}(R(x,y)\rightarrow A(y))$容易计算:$\underline{R}(A_1)=$

**基金项目:**河南省基础与前沿研究计划项目(the Fundamental and Frontier Research Project of Henan Province under Grant No.082300410270);河南省教育厅自然科学基金资助项目(the Natural Science Foundation Project of Department of Education of Henan Province under Grant No.2009A520019)。
**作者简介:**詹婉荣(1981-),女,助教,研究领域:不确定性推理和粗糙集理论;于海(1979-),男,助教,研究领域:不确定性推理和粗糙集理论;张瑞玲(1964-),女,教授,研究领域:粗糙集理论和概念格。
**收稿日期:**2009-04-13　**修回日期:**2009-06-01

$\frac{0}{x_1}+\frac{0}{x_2}+\frac{0}{x_3}$，$\underline{R}(A_2)=\frac{0}{x_1}+\frac{0}{x_2}+\frac{1}{x_3}$。于是 $\underline{R}(A_1)\cup\underline{R}(A_2)=\frac{0}{x_1}+\frac{0}{x_2}+\frac{1}{x_3}$。而 $\underline{R}(\underline{R}(A_1)\cup\underline{R}(A_2))=\frac{0}{x_1}+\frac{0}{x_2}+\frac{0}{x_3}$，所以 $\underline{R}(\underline{R}(A_1)\cup\underline{R}(A_2))\neq\underline{R}(A_1)\cup\underline{R}(A_2)$。即定理7[1]的结论不成立。

由于定理7[1]的结论不成立，定理8[1]中的 $T=\{\underline{R}(A)|A\in F(U)\}$ 不是 $U$ 上的模糊拓扑。

下面从两个方面对文[1]进行修正。

一方面，仍假设 $R$ 是自反模糊关系，重新构造拓扑，有下述定理。

**定理1** 设 $(U,R)$ 为一模糊近似空间，$R$ 是自反模糊关系，则 $T'=\{A\in F(U)|\underline{R}(A)=A\}$ 是 $U$ 上的模糊拓扑。

**证明** （1）由 $\underline{R}(U)=U$，$\underline{R}(\phi)=\phi$ 可得 $U,\phi\in T'$；

（2）由 $\underline{R}(A\cap B)=\underline{R}(A)\cap\underline{R}(B)$ 可得，$A,B\in T'$ 时，$A\cap B\in T'$；

（3）设 $A_i\in T'$，$i\in I$，即 $\underline{R}(A_i)=A_i$，下证 $\underline{R}(\bigcup_{i\in I}A_i)=\bigcup_{i\in I}A_i$。事实上，一方面，由于 $R$ 为自反的，$\underline{R}(\bigcup_{i\in I}A_i)\subseteq\bigcup_{i\in I}A_i$；另一方面，对任意 $i\in I$，${}^{-}\bigcup_{i\in I}A_i=\bigcap_{i\in I}{}^{-}A_i\subseteq{}^{-}A_i$，由 $\overline{R}$ 的单调性可得 $\overline{R}({}^{-}\bigcup_{i\in I}A_i)\subseteq\overline{R}({}^{-}A_i)$，所以 $\overline{R}({}^{-}\bigcup_{i\in I}A_i)\subseteq\bigcap_{i\in I}\overline{R}({}^{-}A_i)=\bigcap_{i\in I}{}^{-}\underline{R}({}^{--}A_i)=\bigcap_{i\in I}{}^{-}\underline{R}(A_i)=\bigcap_{i\in I}{}^{-}A_i={}^{-}(\bigcup_{i\in I}A_i)$。于是 $\bigcup_{i\in I}A_i\subseteq{}^{-}\overline{R}({}^{-}\bigcup_{i\in I}A_i)=\underline{R}(\bigcup_{i\in I}A_i)$。所以 $\bigcup_{i\in I}A_i\in T'$。

（4）对于任意常值模糊值 $\overline{\alpha}\in F(U)$，$x\in U$：$\underline{R}(\overline{\alpha})(x)=\inf_{y\in U}(R(x,y)\to\overline{\alpha}(y))=\inf_{y\in U}(R(x,y)\to\overline{\alpha})=R(x,x)\to\alpha=\alpha$，即 $\underline{R}(\overline{\alpha})=\overline{\alpha}$，故 $\overline{\alpha}\in T'$。

综上可知，$T'$ 是 $U$ 上的一个模糊拓扑。

另一方面，对定理7[1]中的自反模糊关系 $R$ 再添加一个条件：$R$ 是传递的，这时按照定理7[1]的证明方法可以证明定理7[1]的结论才成立。由此可知，定理8[1]的结论也成立，即有下面的定理。

**定理2** 设 $R$ 是自反、传递的模糊关系，则 $T=\{\underline{R}(A)|A\in F(U)\}$ 是 $U$ 上的一个模糊拓扑。

当 $R$ 是自反、传递的模糊关系时，文[1]中定理9的结论也成立。

**定理3** 设 $R$ 是自反、传递的模糊关系，$T=\{\underline{R}(A)|A\in F(U)\}$，$i,c$ 分别表示 $T$ 的内部与闭包算子，则对于任意的 $A\in F(U)$：

（1）$\underline{R}(A)=i(A)=\cup\{\underline{R}(B)|\underline{R}(B)\subseteq A\}$；

（2）$\overline{R}(A)=c(A)=\cap\{{}^{-}\underline{R}(B)|{}^{-}\underline{R}(B)\supseteq A\}$。

## 3　模糊拓扑 $T$ 的进一步性质

当 $R$ 是自反、传递的模糊关系时，进一步研究模糊拓扑 $T$ 的性质。

首先指出：当 $R$ 是自反、传递的模糊关系时，

$T=\{\underline{R}(A)|A\in F(U)\}=\{A\in F(U)|\underline{R}(A)=A\}$

给出模糊集 $A$ 为模糊拓扑 $T$ 的开集的充分必要条件。

**定理4** 设 $A\in F(U)$，则 $A\in T$ 当且仅当 $\forall x,y\in U$，$R(x,y)\leqslant A(x)\to A(y)$。

**证明** 当 $A\in T$ 时，$\underline{R}(A)(x)=\inf_{y\in U}(R(x,y)\to A(y))=A(x)$。所以，对任意 $x,y\in U$，$A(x)\leqslant R(x,y)\to A(y)$，即 $R(x,y)\leqslant A(x)\to A(y)$。

反过来，如果 $\forall x,y\in U$，$R(x,y)\leqslant A(x)\to A(y)$，即 $A(x)\leqslant R(x,y)\to A(y)$。于是，$A(x)\leqslant\inf_{y\in U}(R(x,y)\to A(y))=\underline{R}(A)(x)$，即 $A\leqslant\underline{R}(A)$。又因为 $\underline{R}(A)\leqslant A$，故 $A=\underline{R}(A)\in T$。

模糊关系 $R$ 也可由模糊拓扑 $T$ 中的开集确定。

**定理5** 设 $R$ 是自反、传递的模糊关系，$T=\{\underline{R}(A)|A\in F(U)\}$，则 $R(x,y)=\inf_{A\in T}(A(x)\to A(y))$，$\forall x,y\in U$

**证明** 由定理4知，$\forall A\in T$，$R(x,y)\leqslant A(x)\to A(y)$。于是 $R(x,y)\leqslant\inf_{A\in T}(A(x)\to A(y))$。

为了证明相反的不等式，取模糊集 $A'$：$A'(z)=R(x,z)$，$\forall z\in U$。

先证明 $A'\in T$。由于 $R$ 是传递的，则对任意 $y$，$R(x,z)\otimes R(z,y)\leqslant R(x,y)$。于是 $R(x,z)\leqslant R(z,y)\to R(x,y)$。因此，$R(x,z)\leqslant\inf_{y\in U}(R(z,y)\to R(x,y))$。从而，$\underline{R}(A')(z)=\inf_{y\in U}(R(z,y)\to A'(y))=\inf_{y\in U}(R(z,y)\to R(x,y))\geqslant R(x,z)=A'(z)$，即 $\underline{R}(A')\geqslant A'$。又 $\underline{R}(A')\leqslant A'$，所以 $A'\in T$。

因为 $\inf_{A\in T}(A(x)\to A(y))\leqslant A'(x)\to A'(y)=1\to R(x,y)=R(x,y)$，所以 $R(x,y)=\inf_{A\in T}(A(x)\to A(y))$。

再给出模糊拓扑 $T$ 的另外一些性质。

**定理6** 设 $R$ 是自反、传递的模糊关系，$T=\{\underline{R}(A)|A\in F(U)\}$，则 $T$ 满足以下性质：

（1）设 $A_i\in T$，$i\in I$（$I$ 为指标集），则 $\bigcap_{i\in I}A_i\in T$；

（2）设 $A\in T$，则对任意 $\alpha\in[0,1]$，$\overline{\alpha}\otimes A\in T$；

（3）设 $A\in T$，则对任意 $\alpha\in[0,1]$，$\overline{\alpha}\to A\in T$。

**证明** （1）设 $A_i\in T$，由定理4可知 $\forall x,y\in U$，$R(x,y)\leqslant A_i(x)\to A_i(y)$，即 $A_i(x)\otimes R(x,y)\leqslant A_i(y)$。对任意 $i\in I$，$(\bigcap_{i\in I}A_i)(x)\otimes R(x,y)\leqslant A_i(x)\otimes R(x,y)\leqslant A_i(y)$，于是 $(\bigcap_{i\in I}A_i)(x)\otimes R(x,y)\leqslant\inf_{i\in I}A_i(y)=(\bigcap_{i\in I}A_i)(y)$。所以 $R(x,y)\leqslant(\bigcap_{i\in I}A_i)(x)\to(\bigcap_{i\in I}A_i)(y)$。即 $\bigcap_{i\in I}A_i\in T$。

（2）设 $A\in T$，由定理4知 $\forall x,y\in U$，$A(x)\otimes R(x,y)\leqslant A(y)$，于是 $\alpha\otimes A(x)\otimes R(x,y)\leqslant\alpha\otimes A(y)$，即 $(\overline{\alpha}\otimes A)(x)\otimes R(x,y)\leqslant(\overline{\alpha}\otimes A)(y)$，所以 $R(x,y)\leqslant(\overline{\alpha}\otimes A)(x)\to(\overline{\alpha}\otimes A)(y)$，即 $\overline{\alpha}\otimes A\in T$。

（3）设 $A\in T$，由定理4可知 $R(x,y)\leqslant A(x)\to A(y)$，由 $\to$ 的性质容易证明：$A(x)\to A(y)\leqslant(\alpha\to A(x))\to(\alpha\to A(y))$。于是，$R(x,y)\leqslant(\alpha\to A(x))\to(\alpha\to A(y))=(\overline{\alpha}\to A)(x)\to(\overline{\alpha}\to A)(y)$。即 $\overline{\alpha}\to A\in T$。

## 参考文献：

[1] 钟玉田，王峰，秦克云.基于 Lukasiewicz 三角模及其剩余蕴涵的模糊粗糙集[J].计算机工程与应用，2007，43(36)：37-39.

（下转32页）