基于区间—遗传算法求解非线性方程组

姜 浩[1],韩亚利[2],成礼智[1]
JIANG Hao[1],HAN Ya-li[2],CHENG Li-zhi[1]

1.国防科学技术大学 理学院,长沙 410073
2.长沙航空职业技术学院,长沙 410124
1.Department of Science,National University of Defense Technology,Changsha 410073,China
2.Changsha Aeronautical Vocational and Technical College,Changsha 410124,China
E-mail:2173576jh@163.com

JIANG Hao,HAN Ya-li,CHENG Li-zhi.Solving nonlinear systems via interval-genetic algorithm.Computer Engineering and Applications,2009,45(25):62-64.

Abstract: The problem on solving nonlinear equations is transformed into that of function optimization.A new Interval-Genetic Algorithm(IGA) is presented via combination of genetic algorithm and interval algorithm.The algorithm has the advantages of the genetic algorithm such as group search and global convergence and the interval algorithm such as the special computational test for the existence of a solution.At each iteration the interval algorithm provides the reliable domain for the genetic algorithm to search,and the genetic algorithm gives the safe starting regions to the interval algorithm.Finally,numerical experiments show that the IGA has global convergence,high convergence rate and solution precision,and is a reliable approach in solving nonlinear equations.

Key words: interval algorithm;genetic algorithm;nonlinear equations

摘 要:将非线性方程组的求解转化为函数优化问题,结合遗传算法的群体搜索、全局收敛的优点,及区间算法特有的解的存在性检验准则,提出了一种区间—遗传算法。在迭代计算过程中,区间算法为遗传算法搜索提供可靠区域,同时遗传算法为区间算法提供安全的初始区域。数值实验表明,该算法能够在较大范围的初始区间内快速,可靠地迭代得到高精度的区间解,是求解非线性方程组的一种有效的算法。

关键词:区间算法;遗传算法;非线性方程组
DOI:10.3778/j.issn.1002-8331.2009.25.019 **文章编号:**1002-8331(2009)25-0062-03 **文献标识码:**A **中图分类号:**TP18

1 引言

非线性方程组求解是科学与工程计算中经常遇到的问题,传统的牛顿型迭代法是一种常见的经典算法,但该方法由于对初始值的依赖性特别强,局部收敛等缺陷,限制了其在实际工程领域里的广泛应用。区间算法[1]以区间分析为基础,用区间变量代替点变量按照区间运算规则进行区间计算,从而在求解非线性方程组中取得了很好的效果,主要有区间 Newton 法及其改进算法如 Krawczyk-Moore 算法等,算法在迭代的每一步都给出了确定的误差界限,且迭代过程中可以判别解的存在性和唯一性,但是对于初始区间依赖性也较强,虽然应用二分法和分支定界算法可以在较大范围中找到解,但运算量较大。而遗传算法[2]作为一种非线性全局优化搜索算法具有较强的搜索能力,但是它也具有一些自身的缺陷,其在后段的寻优速度较差,而且寻优结果往往很难达到期待的理想的精度。

将区间算法和遗传算法结合求解非线性方程组,首先将非线性方程组的求解问题转化为一个最优化问题,应用遗传算法在较大范围内搜寻方程组的解,得到一组近似最优解,并以此为中心构造一个区间向量,然后应用区间 Krawczyk-Moore 算子判断这一区间向量是否含有解,进而调节区间向量的宽度或再次调用遗传算法搜寻,以此有效控制遗传算法的"早熟"收敛性,最后找到包含解的区间,然后应用区间 Krawzyk-Moore 算子快速计算出精确的区间解。最后数值实验表明算法能在较大范围内快速精确地求出非线性方程组的区间解。

2 基础理论

2.1 区间算法[1,3]

区间与区间运算定义:实数集 R 上的一个连续子集 $X=[\underline{X},\overline{X}]$称为实区间,所有实区间的集合记作 IR。区间 X 的中点、宽

基金项目:国家自然科学基金(the National Natural Science Foundation of China under Grant No.60573027);全国优秀博士学位论文作者专项资金资助项目(the Foundation for the Author of National Excellent Doctoral Dissertation of PR China No.200543)。
作者简介:姜浩(1983-),男,硕士研究生,主要研究领域:数值代数,区间理论,最优化方法等;成礼智(1962-),男,教授,博士生导师,博士,主要研究领域:小波变换与图像处理、计算数学等。
收稿日期:2008-05-15 **修回日期:**2008-08-11

度和半径分别定义为：$mid(X)=(\underline{X}+\overline{X})/2$，$w(X)=\overline{X}-\underline{X}$，$rad(X)=w(X)/2$。

区间四则运算法则：$\forall X\in IR, Y\in IR, X\ op\ Y=\{\widetilde{X}\ op\ \widetilde{Y}|\widetilde{X}\in X, \widetilde{Y}\in Y\}$，其中 $op=\{+,-,*,/\}$。加减法运算简单；当乘法运算时，；当进行除法运算时，$X\cdot Y=[\min(\underline{x}\underline{x},\underline{x}\overline{x},\overline{x}\underline{x},\overline{x}\overline{x}),\max(\underline{x}\underline{x},\underline{x}\overline{x},\overline{x}\underline{x},\overline{x}\overline{x})]$要求除数 Y 不包含零，即 $0\notin Y$。

分量为区间的向量为区间向量，对区间向量 $\boldsymbol{X}=(X_1,X_2,\cdots,X_n)^{\mathrm{T}}$ 定义中点，宽度和半径分别为：$m(\boldsymbol{X})=(m(X_1),m(X_2)\cdots m(X_n))^{\mathrm{T}}$，$w(\boldsymbol{X})=\max\limits_i(w(X_i))$，$rad(\boldsymbol{X})=w(\boldsymbol{X})/2$。

区间向量和区间矩阵定义和运算规则分别是实向量和实矩阵定义和运算规则的推广，只是分量或元素间运算采用区间运算规则。

2.2 区间迭代法[1,3]

对非线性方程组

$$f(x)=0, x\in D\subset R^n \tag{1}$$

以及给定的初始区间向量 $\boldsymbol{X}^{(0)}$，Moore 在区间算术和 Newton 法基础上提出了区间 Newton 法，但由于算法的每次迭代中需要求区间矩阵的逆或求解具有区间系数的线性方程组，工作量比较大，随后 Krawczyk 做了切合实际的改进，避免了区间矩阵的求逆，提出了 Krawczyk 算法。Moore 在此基础上构造了 Krawczky-Moore 算子。算子不但可以准确包含非线性组的解，而且迭代过程中可以判别解的存在性和唯一性。

$$\begin{cases}\boldsymbol{X}^{(0)}=X, X^{(k+1)}=X^{(k)}\cap K(y,X^{(k)})\\ K(y,X^{(k)})=y^k-Y^{(k)}f(y^k)-[I-Y^{(k)}F'(X^{(k)})](X^{(k)}-y^k)\end{cases}\quad k=0,1,\cdots \tag{2}$$

式中：k 为迭代次数，$K(y,X^{(k)})$为第 k 次迭代的区间算子，y^k 是 $X^{(k)}$中任意一点，$\boldsymbol{Y}^{(k)}$为非奇异矩阵，$F'(X^{(k)})$为$f(x)$的雅克比矩阵在区间向量 $\boldsymbol{X}^{(k)}$上的区间扩展，$y^k=m(X^{(k)})$，$Y^{(k)}=[m(F'(X^{(k)}))]^{-1}$。

性质 1 若 x^* 是式(1)的解，且 $x^*\in X^{(k)}$，则 $x^*\in K(y,X^{(k)})$；

性质 2 若 $X^{(k)}\cap K(y,X^{(k)})=\phi$，则式(1)在 $X^{(k)}$无解；

性质 3 若 $K(y,X^{(k)})\subset X^{(k)}$，则式(1)在 $X^{(k)}$必有解。

2.3 遗传算法[2]

遗传算法是模仿自然选择和遗传机制的一种智能优化随机搜索算法，具有全局群体搜索能力。它与传统的搜索算法不同，遗传算法从一组随机产生的初始解（称为“种群（population）”）开始搜索过程。种群中的每个个体是问题的一个解的编码串（称为“染色体（chromosome）”），染色体是一串符号，例如二进制字符串。这些染色体在后续迭代中不断进化，称为遗传。在每一代中用“适值（fitness）”来测量染色体的好坏。生成下一代染色体，称为后代（offspring）。后代是右前一代染色体通过遗传运算（即交叉（Crossover）和变异（mutation）运算）形成的。在新一代形成中，根据适值大小选择部分后代，淘汰部分后代，从而保持种群大小是常数。适值高的染色体被选中的概率高。这样，经过若干代之后，算法收敛于最好的染色体，它很有可能就是问题的最优解。

3 区间—遗传算法

非线性方程组(1)的求解可等价于下面的一个优化问题：

$$\min: fitness(x)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(f_i(x))^2}, x\in D\subset R^n \tag{3}$$

当其最小值为 0 时对应的 x 为方程组的解。

正是由于这一等价关系，把非线性方程组的求解问题转化为式(3)所示的优化问题后，非线性数值优化方法如最速下降法，单纯型法等就可以应用于求解非线性方程组，但由于这些算法有初始点敏感、局部收敛等局限性，实际应用并不广泛。而近年来较为流行的遗传算法被证明具有良好的全局收敛性和较强的鲁棒性，在全局优化领域取得了不错的效果。该文就是结合区间算法在非线性方程组中的特性和遗传算法在优化问题中的优势，提出了区间—遗传算法。

算法的基本设计思路是：在式(3)的优化问题中方充分发挥遗传算法的全局收敛性和群体搜索能力，首先快速地在较大范围内找到解的大致位置；然后在式(1)中利用区间算法特有的性质，应用式(2)的迭代算法准确可靠地判断指定的区间内是否含有解，如果判断无解可以强制遗传算法重新搜索，同时指导遗传算法的搜寻范围，不必在无解的区域搜索，减少了不必要的运算，避免了遗传算法的“早熟”现象；如果有解，则可以应用区间迭代算法快速计算出高精度结果，弥补了遗传算法精度不高和后期收敛较慢的缺点。算法中实行两次遗传算法搜索能够加快搜索速度，提高遗传算法精度。

算法描述：

步骤 1 将式(1)转化为式(3)，在初始区间随机产生一个初始种群，应用遗传算法搜寻。

步骤 2 在搜寻过程中，为避免遗传算法再次陷入局部最优解，在种群的选择步骤，采取强制手段排除生成在步骤 5 中已判断出无解的区间向量中的个体，并用种群中的最优个体替换，最终产生近似最优解 x_1，并以此为中心构造一个区间向量 $\boldsymbol{B}_1$，半径为 r_1。

步骤 3 在构造出的区间向量 $\boldsymbol{B}_1$ 内随机产生一个初始种群，再次调用遗传算法搜寻，产生近似最优解 x_2。

步骤 4 以上步骤得到的近似最优解 x_2 为中心构造一个区间向量 $\boldsymbol{B}_2$，半径为 $r_2(r_1\geqslant r_2)$。

步骤 5 以区间向量 $\boldsymbol{B}_2$ 为初始区间，应用 Krawczyk-Moore 算子性质判断是否含有非线性方程组的解：无解，则记录区间向量 $\boldsymbol{B}_2$ 并转步骤 1；迭代发散，则转步骤 4 并缩小半径 r_2；有解，则继续迭代并收敛到方程组的解 x^*。

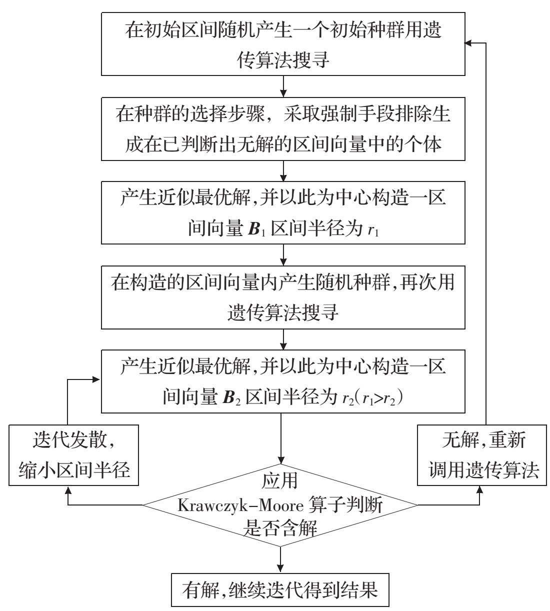

图 1 算法流程图

表 1 数值结果

算例	精确解	IGA(该文算法)	参考文献结果	备注
1	4	[3.999 9,4.000 1]	3.994 0	文献[5]
	3	[2.999 9,3.000 1]	3.007 9	
	1	[0.999 9,1.000 1]	1.007 9	
2	2	[1.999 999 999 998 23,2.000 000 000 001 77]	[1.999 975 1,2.000 025 1]	文献[6]
	3	[2.999 999 999 997 38,3.000 000 000 002 62]	[2.999 960 4,3.000 039 7]	
	5	[4.999 999 999 996 51,5.000 000 000 003 47]	[4.999 999 91,5.000 000 8]	
3	–	[0.658 768 345 880 55,0.658 768 345 881 25]	[0.658 768 343 3,0.658 768 348 6]	文献[7]
	–	[–1.001 177 172 198 43,–1.001 177 172 196 95]	[–1.001 177 172,–1.001 177 172]	
	–	[1.071 892 302 370 68,1.071 892 302 513 10]	[1.071 892 300,1.071 892 308]	

4 数值实验

为检验提出的区间—遗传算法的性能,选取了三个具有代表性的例子进行数值模拟。所有的程序是基于区间算法程序包 Intlab v5.4,及 Matlab7.0 自带的遗传算法工具箱[4]gads 编程实现的。

D 和 S 分别代表该文和文献中的初始区域。

算例 1[5]

$$\begin{cases} x_1^{x_2}+x_2^{x_1}-5x_1x_2x_3=85 \\ x_1^{3}-x_2^{x_3}-x_3^{x_2}=60 \\ x_1^{x_3}+x_3^{x_1}-x_2=2 \end{cases}$$

$D_1=\{(x_1,x_2,x_3)|0\leqslant x_1\leqslant 10,0\leqslant x_2\leqslant 10,0\leqslant x_3\leqslant 10\}$

$S_1=\{(x_1,x_2,x_3)|3\leqslant x_1\leqslant 5,2\leqslant x_2\leqslant 4,0.5\leqslant x_3\leqslant 2\}$

算例 2[6]

$$\begin{cases} 821x^2-263yz+661=0 \\ 613xz-977yx-268=0 \\ 977xz+373x-647yz-811=0 \end{cases}$$

$D_2=\{(x_1,x_2,x_3)|0\leqslant x_1\leqslant 10,0\leqslant x_2\leqslant 10,0\leqslant x_3\leqslant 10\}$

算例 3[7]

$$\begin{cases} -94x^{15}-64+90x^2-38xy^3=0 \\ 64-22y^2z^{20}-37xy=0 \\ -20x-7y+4y^{20}+1+z=0 \end{cases}$$

$D_3=\{(x_1,x_2,x_3)|-5\leqslant x_1\leqslant 5,-5\leqslant x_2\leqslant 5,-5\leqslant x_3\leqslant 5\}$

$S_3=\{(x_1,x_2,x_3)|-2\leqslant x_1\leqslant 2,-2\leqslant x_2\leqslant 2,-2\leqslant x_3\leqslant 2\}$

在进行测试时,遗传算法种群为 100,进化代数最高取 400,其他采用缺省的设置。区间算法采用上下界的表示形式,其中初始构造的区间向量半径分别为 $r_1=0.5$,$r_2=0.1$(经过多次尝试得出)。终止准则为区间宽度 $w(X)\leqslant 10^{-6}$。表 1 给出了该文算法与参考文献算法的结果比较。

采用的初始区间都要比文献中采用的初始区间大得多,同时精度要高得多,体现了算法的大范围全局搜索能力,及高精度特点。在算例 1 中,算法比文献[5]应用改进遗传算法得到的解的精度要高;在算例 2 中,文献[6]应用改进吴方法,精度为 8,而该文算法精度为 15,用时也不到 2 秒;在算例 3 中,文献[7]应用预处理区间牛顿法和二分法及分支定界法求出了 4 个根,但用时达到了 10 秒,该文算法则能够非常快速地求出其中两个根,计算 100 次得到的平均时间仅为 3 秒左右。区间—遗传算法对这 3 个算例不但得到了精确的区间解,而且用时很少,并且肯定能够找到解,可靠性得到了保证,这说明该文方法比传统的遗传算法和区间算法都有较高的执行效率。

5 结论

结合优化与迭代机制,利用遗传算法的群体搜索、全局收敛的优点,及区间算法特有的在某区间内解的存在性检验准则,提出了一种新的区间—遗传算法来求解非线性方程组。该算法能够在较大范围内快速精确地求出非线性方程组的区间解。其设计策略对于解决实际问题有较好的借鉴意义。

进一步工作准备从以下方面着手:(1)对遗传算法的三大步骤进行改进,提高遗传算法自身的性能;(2)结合符号方法改进该文算法;(3)结合区间—遗传算法及分支定界技术对求方程多解问题进行研究;(4)应用遗传算法的隐含并行性提出并行的区间—遗传算法,解决更高维,更复杂的问题。

参考文献:

[1] Moore R E.Methods and applications of interval analysis[M].Philadelphia:SIAM,1979.

[2] 张颖,刘艳秋.软计算方法[M].北京:科学出版社,2002.

[3] 王德人,张连生,邓乃扬.非线性方程的区间算法[M].上海:上海科学技术出版社,1987.

[4] 雷英杰,张善文,李续武,等.MATLAB 遗传算法工具箱及应用[M].西安:西安电子科技大学出版社,2005.

[5] 曾毅.改进的遗传算法在非线性方程组求解中的应用[J].华东交通大学学报,2004,21(4):132–134.

[6] 陈发来,杨武.区间算法在吴消元法解代数方程组中的应用[J].中国科学:A 辑 数学,2005,35(8):910–921.

[7] 李耀辉,薛继伟,冯勇.基于预处理和区间计算的非线性方程组实根求解[J].四川大学学报:工程科学版,2004,36(5):86–93.

(上接 61 页)

[8] Zajic T,Mahler R.A particle–systems implementation of the PHD multi–target tracking filter[C]//Kadar I.SPIE Proceedings on Signal Processing,Sensor Fusion,and Target Recognition XII,2003,5096:291–299.

[9] Sidenbladh H,Wirkander S L.Particle filtering for random sets[J].IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems,2003,28:1–31.

[10] Mahler R.Objective functions for Bayesian control–theoretic sensor management,I:Multitarget first–moment approximation[C]//Proceedings of the 2002 IEEE Conference on Aerospace Systems,Big Sky MT,2003:8–15.

[11] 韩崇昭,朱洪艳,段战胜.多源信息融合[M].北京:清华大学出版社,2004.

[12] 熊伟,何友,张晶伟.多传感器顺序粒子滤波算法[J].电子学报,2005,33(6):1116–1119.

[13] Hoffman J R,Mahler R.Multi–target miss distance via optimal assignment[J].IEEE Transactions on Systems,Man and Cybernetics–Part A:Systems and Humans,2004,34(3):327–336.