中国科学 A 辑: 数学 2009 年 第 39 卷 第 8 期: 1003～1010
www.scichina.com math.scichina.com
《中国科学》杂志社
SCIENCE IN CHINA PRESS

多元非正规样本定理

陈广贵 ①②*, 房艮孙 ②

① 西华大学数学与计算机学院, 成都 610039
② 北京师范大学数学科学学院, 北京 100875
E-mail: ggchen69@tom.com, fanggs@bnu.edu.cn

收稿日期: 2008-05-21; 接受日期: 2009-01-09; * 通信作者
国家自然科学基金 (批准号: 10671019)、教育部博士点基金 (批准号: 20050027007) 和四川省科技厅重点项目基金 (批准号: 05JY029-138) 资助项目

摘要 本文研究了多元指数型整函数在非等距节点的 Marcinkiewicz-Zygmund 型不等式. 据此, 得到了多元非正规样本定理.

关键词 Marcinkiewicz-Zygmund 型不等式 多元非正规样本定理 指数型整函数

MSC(2000) 主题分类 94A20, 94A12, 41A35, 41A80

1 引言

根据样本定理, 我们能够利用信号在样本点处的值重构, 所以它在通讯、数据处理等方面有着广泛的应用, 成为最重要的数学工具之一 [1−3]. 最早的样本定理是 Whittaker-Kotelnikov-Shannon 型样本定理 [4,5], 它可以叙述为: 如果 f 是带有限于 $[-\sigma,\sigma]$ 中的信号函数, 即它的 Fourier 变换的紧支集在 $[-\sigma,\sigma]$ 中, 则 f 可以通过其在等距节点 $x_k = k\pi/\sigma$, $k = 0, \pm1, \pm2, \dots$ 的样本值完全重构. 样本定理有多种表现形式, 其中 Kotelnikov 给出了以下定理 A 的证明 (见文献 [5]):

定理 A[4,5] 设 $f \in L_2(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R})$, 而且 f 的 Fourier 变换 $\hat{f}$ 的支集包含在 $[-\sigma,\sigma]\,(\sigma > 0)$ 中. 则 f 可以表示为以下的样本级数:

$$f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f\left(\frac{k\pi}{\sigma}\right)\frac{\sin\sigma(x-k\pi/\sigma)}{\sigma(x-k\pi/\sigma)}, \tag{1}$$

其中 (1) 式右边的级数在 Hilbert 空间 $L_2(\mathbb{R})$ 中收敛, 也在 $\mathbb{R}$ 的任意紧集上一致收敛.

定理 A 给出了在 $L_2(\mathbb{R})$ 意义和一致意义下, 带有限函数通过其离散点的样本值重够的算法. 由于节点是等距分布的, 定理 A 通常被称为正规样本定理. 许多学者已经把它沿不同的方向进行了推广 [6−12], 特别 Paley 和 Wiener[10] 将它从等距样本点 $\{k\pi/\sigma\}$ 推广到非等距样本点, 即:

令 $X = \{x_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ 是满足条件 $D := \sup_{k\in\mathbb{Z}} |x_k - k| < 1/4$ 的实数序列, G 是按以下方式定

引用格式: 陈广贵, 房艮孙. 多元非正规样本定理. 中国科学 A, 2009, 39(8): 1003–1010
Chen G G, Fang G S. Multivariate irregular sampling theorem. Sci China Ser A, 2009, 52, DOI: 10.1007/s11425-009-0139-y

义的整函数:

$$G(x) := (x - x_0)\prod_{k=1}^{\infty}(1 - x/x_k)(1 - x/x_{-k}). \tag{2}$$

则对任意 $f \in B_{\pi,2}(\mathbb{R})$, 有

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(x_k)G_k(x), \tag{3}$$

其中

$$G_k(x) := \begin{cases} \dfrac{G(x)}{G'(x_k)(x - x_k)}, & 若\ x \in \mathbb{R}\backslash\{x_k\}; \\ G_k(x) = 1, & 若\ x = x_k. \end{cases} \tag{4}$$

由于其样本点是非等距分布的, 故这样的样本定理通常称为非正规样本定理. 无论从纯数学的角度还是实际工程应用的角度, 这样的推广都是必要的 (见文献 [5, 13–15]).

非正规样本定理的大多数结果都是在 Hilbert 空间 $B_{\sigma,2}(\mathbb{R})$ 中得到的. 它们的证明都用到了一些 Hilbert 空间的本质特征, 例如 Plancherel-Parseval 等式. 因此, 另一个推广方向是用经典的 Lebesgue 空间 $L_p(\mathbb{R})\,(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ (赋以范数 $\|\cdot\|_{p(\mathbb{R})}$) 来代替 Hilbert 空间 $L_2(\mathbb{R})$. 特别, Hinsen[16] 完善了 Paley-Winer[10] 和 Kadic[17] 的结果, 并在 $B_{\pi,p}(\mathbb{R})\,(1 \leqslant p < \infty)$ 空间中得到了一元非正规样本定理.

定理 B[16] 令 $1 \leqslant p < \infty$, $\{x_k\}$ 是满足条件 $|t_k - k| \leqslant L\,(k \in \mathbb{Z})$ 的实序列. 而且, 当 $1 \leqslant p \leqslant 2$ 时, $L < 1/4$; 当 $2 \leqslant p < \infty$ 时, $L < 1/2p$. 则对任意 $f \in B_{\pi,p}(\mathbb{R})$, 有

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(t_k)G_k(x),$$

其中, 上式右边的级数在复平面的任一有界子集上一致收敛.

Levin[5] 和房艮孙 [18] 分别利用复调和分析和实调和分析的方法得到了

定理 C[5,18] 令 $\sigma > 0$, $f \in B_{\sigma,p}(\mathbb{R})(1 < p < \infty)$. 则

(i) $f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(k\pi/\sigma)\frac{\sin\,\sigma(x-k\pi/\sigma)}{\sigma(x-k\pi/\sigma)}, \forall x \in \mathbb{R}$, 而且右边的级数在 $\mathbb{R}$ 上一致收敛;

(ii) $\|f(x) - \sum_{|k|\leqslant N} f(k\pi/\sigma)\frac{\sin\,\sigma(x-k\pi/\sigma)}{\sigma(x-k\pi/\sigma)}\|_{p(\mathbb{R})} \to 0, N \to \infty$;

(iii) 存在两个仅与 p 有关的正常数 $C_p{}'$ 和 $C_p{}''$, 使得

$$C_p{}'\|f\|_{p(\mathbb{R})} \leqslant \left(\frac{\pi}{\sigma}\sum_{k\in\mathbb{Z}}|f\left(\frac{k\pi}{\sigma}\right)|^p\right)^{1/p} \leqslant C_p{}''\|f\|_{p(\mathbb{R})}.$$

(iv) 如果 $y = \{y_k\} \in \ell_p(\mathbb{Z})$, 则存在唯一的 $g \in B_{\sigma,p}(\mathbb{R})$, 使得 $g(k\pi/\sigma) = y_k, \forall k \in \mathbb{Z}$, 其中, $\ell_p(\mathbb{Z}^d)$ 是定义在 $\mathbb{R}^d$ 的整格点 $\mathbb{Z}^d$ ($\mathbb{Z} := \mathbb{Z}^1$) 上, 并赋予通常范数 $\|\cdot\|_{p(\mathbb{Z}^d)}$ 的序列空间.

第三个推广方向是将定理 A 推广到多元. 为了叙述这一方向的结果, 我们首先介绍一些概念和符号.

令 $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_d) > 0$, $g(\mathbf{z})$ 是定义在 d-维复空间 $\mathbb{C}^d$ 上的整函数. 其中, $\sigma > 0$ 表示 $\sigma_i > 0, i = 1, \ldots, d$. 一个整函数 $g(\mathbf{z})$ 称为指数 σ 型的, 如果对每个 $\varepsilon > 0$, 存在正常数 $A = A(\varepsilon)$, 使得

$$|g(\mathbf{z})| \leqslant A\,\exp\left(\sum_{i=1}^{d}(\sigma_i + \varepsilon)|z_i|\right), \quad \forall\,\mathbf{z} = (z_1, \ldots, z_d) \in \mathbb{C}^d. \tag{5}$$

$E_\sigma(\mathbb{R}^d)$ 表示所有指数 σ 型的整函数的集合. $B_\sigma(\mathbb{R}^d)$ 表示 $E_\sigma(\mathbb{R}^d)$ 中在 $\mathbb{R}^d$ 上的限制是有界的函数全体构成的集合. 令

$$B_{\sigma,p}(\mathbb{R}^d) := B_\sigma(\mathbb{R}^d) \cap L_p(\mathbb{R}^d), \quad 1 \leqslant p < \infty, \quad B_{\sigma,\infty}(\mathbb{R}^d) := B_\sigma(\mathbb{R}^d). \tag{6}$$

根据 Schwartz 定理 [19, p. 110], 有

$$B_{\sigma,p}(\mathbb{R}^d) = \{f \in L_p(\mathbb{R}^d) : \mathrm{supp}\hat{f} \subset [-\sigma,\sigma]^d\}. \tag{7}$$

其中, $\hat{f}$ 表示 f 在广义函数意义下的傅立叶变换 [19, p. 30],

$$[-\sigma,\sigma]^d := \{\mathbf{x} = (x_1,\ldots,x_d) \in \mathbb{R}^d : x_i \in [-\sigma_i,\sigma_i],\ i = 1,\ldots,d\}.$$

当 $p = 2$ 时, $B_{\sigma,p}(\mathbb{R}^d)$ 就是经典的 Paley-Wiener 空间. 由 Schwartz 定理, 如果函数 $f \in L_p(\mathbb{R}^d)$, 且带在 $[-\sigma,\sigma]^d$ 中, 则 $f \in B_{\sigma,p}(\mathbb{R}^d)$. Pazen[20]、王和房 [21] 分别利用实分析和调和分析的方法证明了以下定理 D 的第一部分当 $p = 2$ 和 $p \in (1,\infty)\backslash\{2\}$ 的结果.

定理 D[20, 21] 设 $\sigma = (\sigma_1,\ldots,\sigma_d) > 0$, $f \in B_{\sigma,p}(\mathbb{R}^d)$, $1 < p < \infty$. 则

(i) 对任意的 $\mathbf{x} = (x_1,\ldots,x_d) \in \mathbb{R}^d$, 有

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k}=(k_1,\ldots,k_d)\in\mathbb{Z}^d} f(\mathbf{k}\pi/\sigma)\frac{\sin\,\sigma_1(x_1 - k_1\pi/\sigma_1)}{\sigma_1(x_1 - k_1\pi/\sigma_1)}\cdots\frac{\sin\,\sigma_d(x_d - k_d\pi/\sigma_d)}{\sigma_d(x_d - k_d\pi/\sigma_d)}.$$

而且右面的级数在 $\mathbb{R}^d$ 上一致收敛;

(ii)

$$\left\|f(\mathbf{x}) - \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d,|\mathbf{k}|\leqslant N} f(\mathbf{k}\pi/\sigma)\frac{\sin\,\sigma_1(x_1 - k_1\pi/\sigma_1)}{\sigma_1(x_1 - k_1\pi/\sigma_1)}\cdots\frac{\sin\,\sigma_d(x_d - k_d\pi/\sigma_d)}{\sigma_d(x_d - k_d\pi/\sigma_d)}\right\|_{p(\mathbb{R}^d)} \to 0,$$

当 $N \to \infty$;

(iii) 存在仅依赖 p 和 d 的正常数 A_p 和 B_p, 使得

$$A_p\|f\|_{p(\mathbb{R}^d)} \leqslant \left(\left(\frac{\pi}{\sigma}\right)^1 \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d} |f(\mathbf{k}\pi/\sigma)|^p\right)^{1/p} \leqslant B_p\|f\|_{p(\mathbb{R}^d)}; \tag{8}$$

(iv) 如果 $y = \{y_\mathbf{k}\} \in \ell_p(\mathbb{Z}^d)$, 则存在唯一的 $g \in B_{\sigma,p}(\mathbb{R}^d)$, 使得 $g(\mathbf{k}\pi/\sigma) = y_\mathbf{k}$, $\forall\,\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d$, 其中 $(\mathbf{k}\pi/\sigma)^1 = (k_1\pi/\sigma_1)\cdots(k_d\pi/\sigma_d), \mathbf{k}\pi/\sigma = (k_1\pi/\sigma_1,\ldots,k_d\pi/\sigma_d)$. 而 $|\mathbf{k}| \leqslant N$ 表示 $|k_i| \leqslant N$, $i = 1,\ldots,d$.

本文的主要目的是在空间 $L_p(\mathbb{R}^d)\,(1 < p < \infty)$ 中建立多元非正规样本定理.

设 $\lambda = \{\lambda_\mathbf{n}\}_{\mathbf{n}\in\mathbb{Z}^d}$, $\lambda_\mathbf{n} = (\lambda_\mathbf{n}^1,\ldots,\lambda_\mathbf{n}^d)$ 是 $\mathbb{R}^d$ 中的序列, 并定义

$$\delta_i := \sup_{\mathbf{n}=(n_1,\ldots,n_d)\in\mathbb{Z}^d} \|\lambda_\mathbf{n}^i - n_i\pi/\sigma_i\|_\infty, \qquad i = 1,\ldots,d.$$

在此要强调的是, $\mathbf{n} = (n_1,\ldots,n_d)$ 的一个分量改变, $\lambda_\mathbf{n}$ 的所有分量都可能改变. 下面叙述我们的主要结果.

定理 1 设 $\lambda = \{\lambda_\mathbf{n}\}$ 是 $\mathbb{R}^d$ 中的序列, 而且, $\sigma = (\sigma_1,\ldots,\sigma_d) > 0$. 如果

$$\delta_i < \begin{cases} \pi/4\sigma_i, & 1 < p \leqslant 2, \\ \pi/2p\sigma_i, & 2 \leqslant p < \infty, \end{cases} \qquad \sum_{i=1}^d \sigma_i\delta_i < \ln(A_p/B_p + 1), \tag{9}$$

则对任意 $f \in B_{\sigma,p}(\mathbb{R}^d)\,(1 < p < \infty)$, 有

$$A_p(1 - T_d)\|f\|_{p(\mathbb{R}^d)} \leqslant \left(\left(\frac{\pi}{\sigma}\right)^1 \sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{Z}^d} |f(\lambda_\mathbf{n})|^p\right)^{1/p} \leqslant B_p(1 + T_d)\|f\|_{p(\mathbb{R}^d)}. \tag{10}$$

其中, A_p 和 B_p 的定义见 (8) 式, $T_d = B_p/A_p(e^{\sum_{i=1}^d \sigma_i\delta_i} - 1) < 1$.

注 1 定理 1 中的条件 (9) 仅仅是结论 (10) 的充分条件. 对于 $\sigma = \pi$ 时的一元非正规样本点, Hinsen 在定理 B 中得到了扰动常数: 当 $1 \leqslant p < 2$ 时是 1/4; 当 $2 \leqslant p < \infty$ 时是 $1/2p$; 当 $p = 2$ 时, 由 Kadic-1/4 定理 [17], 精确的扰动常数是 1/4. 然而, 在定理 1 中, 对多元非正规样本点, 我们仅能得到较小的扰动常数. 也就是说, 多元非正规样本点的每个分量只能在较小的范围内扰动. 我们猜想: 对于 $p = 2$, 多元非正规样本点的每个分量的精确扰动常数是 $\pi/4\sigma_i$.

注 2 Marcinkiewicz 不等式 [22] 在逼近论中扮演了重要的角色, 它建立了阶 $\leqslant m$ 的三角多项式的 L_p 范与它在一致离散格点的值的离散 ℓ_p^{2m-1} 范的等价关系. 定理 C 的第 3 部分是一元指数型整函数在等距样本点的 Marcinkiewicz 型不等式. 定理 1 中的不等式 (10) 是多元指数型整函数在非正规样本点的 Marcinkiewicz 型不等式.

对于多元带有限信号, 由定理 1, 我们得到在非等距节点的 Lagrange 型插值定理.

定理 2 假设 $1 < p < \infty$, $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_d)$. 而且, $\lambda = \{\lambda_{\mathbf{n}}\}_{\mathbf{n}\in\mathbb{Z}^d}$ 满足定理 1 的条件.

(i) 如果 $g \in B_{\sigma,p}(\mathbb{R}^d)$, 则 $\{g(\lambda_{\mathbf{n}})\}_{\mathbf{n}\in\mathbb{Z}^d} \in \ell_p(\mathbb{Z}^d)$.

(ii) 如果 $y = \{y_{\mathbf{n}}\} \in \ell_p(\mathbb{Z}^d)$, 则存在唯一的 $g \in B_{\sigma,p}(\mathbb{R}^d)$, 使得 $g(\lambda_{\mathbf{n}}) = y_{\mathbf{n}}, \forall\, \mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d$.

注 3 如果 $\lambda = \{\lambda_{\mathbf{n}}\}_{\mathbf{n}\in\mathbb{Z}^d}$ 满足定理 1 的条件, 则由定理 2, λ 是稳定的插值序列.

由定理 2, 我们可以证明: 多元带有限函数 $f \in B_{\sigma,p}(\mathbb{R}^d)$ 能够用 cardinal 级数表示. 它类似于多元的 Paley-Wiener 插值定理 (见 (3) 式), 这就是如下.

定理 3 设 $1 < p < \infty$, $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_d)$. 而且, $\lambda = \{\lambda_{\mathbf{n}}\}_{\mathbf{n}\in\mathbb{Z}^d}$ 满足定理 1 的条件. 则对任意 $f \in B_{\sigma,p}(\mathbb{R}^d)$, 有 $f(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{Z}^d} f(\lambda_{\mathbf{n}})G_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}), \forall\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$. 而且, 上等式中右边的级数在 $L_q(\mathbb{R}^d)(1 < p \leqslant q \leqslant \infty)$ 中收敛. 特别地, 级数在 $\mathbb{R}^d$ 中一致收敛. 其中,

$$
\begin{aligned}
&G_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^d \frac{G_{\mathbf{n},i}(x_i)}{G_{\mathbf{n},i}{}'(\lambda_{\mathbf{n}}^i)(x_i - \lambda_{\mathbf{n}}^i)}, \quad \forall\, \mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d,\\
&\mathbf{n} = (n_1, \ldots, n_i, \ldots, n_d) \in \mathbb{Z}^d, \quad \mathbf{n}_i^j := (n_1, \ldots, n_{i-1}, j, n_{i+1}, \ldots, n_d),\\
&G_{\mathbf{n},i}(x_i) = g(\lambda_{\mathbf{n}_i^0}^i; x_i) \prod_{j=1}^\infty g(\lambda_{\mathbf{n}_i^j}^i; x_i) g(\lambda_{\mathbf{n}_i^{-j}}^i; x_i), \qquad x_i \in \mathbb{R}, \quad 1 \leqslant i \leqslant d, \quad j \in \mathbb{Z},
\end{aligned}
$$

当 $t \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ 时, $g(t, x) = 1 - x/t$; $g(0, x) = x$.

注 4 (i) Zayed[12] 在 Paley-Wiener 空间 $B_{\sigma,2}(\mathbb{R}^d)$ 中得到了类似的多元 Paley-Wiener 插值定理. 然而, 他只考虑了当 $\mathbf{n} = (n_1, \ldots, n_d)$ 的一个分量改变时, $\lambda_{\mathbf{n}}$ 只改变其相应的分量的情况.

(ii) 定理 3 是 Whittaker-Kotelnikov-Shannon 样本定理的推广, 它表明: 在 $L_q\,(1 < p \leqslant q \leqslant \infty)$ 范意义下, 带有限 L_p 函数可以用该函数在非等距样本点 $\lambda_{\mathbf{n}}$ 的值重构.

(iii) 由本定理和定理 1, $\{G_n(\mathbf{x})\}$ 是 $B_{\sigma,p}(\mathbb{R}^d)$ 的无条件基.

当然, 我们只有知道精确的样本值 $f(\lambda_{\mathbf{n}})$, 上面的重构才是无误差的. 可是, 我们通常只知道具有误差 $\varepsilon_{\mathbf{n}}$ 的样本值 $\tilde{f}(\lambda_{\mathbf{n}})$, 即: $\tilde{f}_{\mathbf{n}} = f(\lambda_{\mathbf{n}}) + \varepsilon_{\mathbf{n}}$, $\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d$, $\{\varepsilon_{\mathbf{n}}\} \in \ell_p(\mathbb{Z}^d)$. 因此, 我们只能利用这样的样本值构造函数 $\tilde{f} \in B_{\sigma,p}$:

$$
\tilde{f}(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{Z}^d} \tilde{f}_{\mathbf{n}} G_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}),
$$

使得 $\tilde{f}(\lambda_{\mathbf{n}})=\tilde{f}_{\mathbf{n}}$. 而且, 上面的级数在 $L_p(\mathbb{R}^d)$ 意义下收敛. 由定理 1 和 Jackson-Nikolskii 不等式 (见引理 5), 我们得到误差 $f-\tilde{f}$ 的界.

推论 1 设 $\lambda=\{\lambda_{\mathbf{n}}\}$ 满足定理 1 的条件, $1<p<\infty$, $f\in B_{\sigma,p}(\mathbb{R}^d)$, $\{\varepsilon_{\mathbf{n}}\}\in\ell_p(\mathbb{Z}^d)$. 则

$$\frac{1}{B_p(1+T_d)}\left(\left(\frac{\pi}{\sigma}\right)^1\sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{Z}^d}|\varepsilon_{\mathbf{n}}|^p\right)^{1/p}\leqslant\|f-\tilde{f}\|_{p(\mathbb{R}^d)}\leqslant\frac{1}{A_p(1-T_d)}\left(\left(\frac{\pi}{\sigma}\right)^1\sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{Z}^d}|\varepsilon_{\mathbf{n}}|^p\right)^{1/p},$$

$$|f(\mathbf{x})-\tilde{f}(\mathbf{x})|\leqslant 2^d\prod_{i=1}^d\sigma_i^{1/p}\frac{1}{A_p(1-T_d)}\left(\left(\frac{\pi}{\sigma}\right)^1\sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{Z}^d}|\varepsilon_{\mathbf{n}}|^p\right)^{1/p},\qquad\forall\mathbf{x}\in\mathbb{R}^d.$$

2 主要结果的证明

为证明定理 1, 我们给出一些引理.

引理 1[19](Bernstein 不等式) 令 $1\leqslant p<\infty$, $\sigma=(\sigma_1,\dots,\sigma_d)>0$, $f\in B_{\sigma,p}(\mathbb{R}^d)$, $\mathbf{m}=(m_1,\dots,m_d)\in\mathbb{Z}^d$, $m_i\geqslant 0$, $i=1,\dots,d$. 则 $f^{(\mathbf{m})}\in B_{\sigma,p}(\mathbb{R}^d)$, 而且,

$$\int_{\mathbb{R}^d}|f^{(\mathbf{m})}(\mathbf{x})|^p\,d\mathbf{x}\leqslant\sigma_1^{pm_1}\cdots\sigma_d^{pm_d}\int_{\mathbb{R}^d}|f(\mathbf{x})|^p d\mathbf{x}.$$

其中 $f^{(\mathbf{m})}:=\frac{\partial^{m_1+\cdots+m_d}}{\partial x_1^{m_1}\cdots\partial x_d^{m_d}}f$.

由引理 1 和定理 D, 有

引理 2 如果 $1<p<\infty$, $\sigma=(\sigma_1,\dots,\sigma_d)>0$, $f\in B_{\sigma,p}(\mathbb{R}^d)$, $\mathbf{m}=(m_1,\dots,m_d)\in\mathbb{Z}^d$, $\mathbf{m}\geqslant 0$, 则

$$\left(\frac{\pi}{\sigma}\right)^1\sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{Z}^d}|f^{(\mathbf{m})}\left(\frac{\mathbf{n}\pi}{\sigma}\right)|^p\leqslant B_p^p\prod_{i=1}^d\sigma_i^{pm_i}\int_{\mathbb{R}^d}|f(\mathbf{x})|^p\,d\mathbf{x}.$$

以下介绍的引理 3 在定理 1 的证明中起到了非常重要的作用.

引理 3 设 $\lambda=\{\lambda_{\mathbf{n}}\}_{\mathbf{n}\in\mathbb{Z}^d}\,(\lambda_{\mathbf{n}}=(\lambda_{\mathbf{n}}^1,\dots,\lambda_{\mathbf{n}}^d))$ 是 $\mathbb{R}^d$ 中满足条件

$$\sup_{\mathbf{n}\in\mathbb{Z}^d}\|\lambda_{\mathbf{n}}^i-n_i\pi/\sigma_i\|_\infty=\delta_i>0,\quad i=1,\dots,d$$

的序列. 则

$$\sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{Z}^d}|f(\lambda_{\mathbf{n}})-f\left(\frac{\mathbf{n}\pi}{\sigma}\right)|^p\leqslant T_d^p\sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{Z}^d}\left|f\left(\frac{\mathbf{n}\pi}{\sigma}\right)\right|^p,$$

其中,

$$T_d=B_p/A_p[e^{\sum_{i=1}^d(\frac{\sigma_i}{\rho_i})^p}-1]^{1/p}[e^{\sum_{i=1}^d(\rho_i\sigma_i)^q}-1]^{1/q},\qquad 1/p+1/q=1,\tag{11}$$

ρ_i, $i=1,\dots,d$ 是任意的正常数.

证明 我们仅就 $d=2$ 的情形加以证明, $d\neq 2$ 的情形, 证明类似. 证明过程中总是假设 $\mathbf{m}=(m_1,m_2)\in\mathbb{Z}^2$, $m_1\geqslant 0$, $m_2\geqslant 0$, $m_1^2+m_2^2>0$. 对任意 $\mathbf{n}=(n_1,n_2)\in\mathbb{Z}^2$, 所有的 $\mathbf{x}=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^d$, 利用 Young[23] 的思想和 Taylor 公式, 有

$$f(\mathbf{x})=f\left(\frac{\mathbf{n}\pi}{\sigma}\right)+\sum_{\mathbf{m}}\frac{1}{(m_1+m_2)!}C_{m_1+m_2}^{m_1}f^{(\mathbf{m})}\left(\frac{\mathbf{n}\pi}{\sigma}\right)\left(x_1-\frac{n_1\pi}{\sigma_1}\right)^{m_1}\left(x_2-\frac{n_2\pi}{\sigma_2}\right)^{m_2}.$$

因此, 由 Hölder 不等式, 有

$$\begin{aligned}
&\left|f(\lambda_{\mathbf{n}})-f\left(\frac{\mathbf{n}\pi}{\sigma}\right)\right| \\
&\quad=\left|\sum_{\mathbf{m}}\frac{1}{(m_1+m_2)!}C_{m_1+m_2}^{m_1}f^{(\mathbf{m})}\left(\frac{\mathbf{n}\pi}{\sigma}\right)\left(\lambda_{\mathbf{n}}^1-\frac{n_1\pi}{\sigma_1}\right)^{m_1}\left(\lambda_{\mathbf{n}}^2-\frac{n_2\pi}{\sigma_2}\right)^{m_2}\right| \\
&\quad\leqslant\sum_{\mathbf{m}}\frac{1}{m_1!m_2!}\left|f^{(\mathbf{m})}\left(\frac{}{n\pi}\sigma\right)\right|\delta_1^{m_1}\delta_2^{m_2} \\
&\quad=\sum_{\mathbf{m}}\frac{1}{\rho_1^{m_1}\rho_2^{m_2}(m_1!)^{1/p}(m_2!)^{1/p}}\left|f^{(\mathbf{m})}\left(\frac{n\pi}{\sigma}\right)\right|\frac{(\rho_1\delta_1)^{m_1}(\rho_2\delta_2)^{m_2}}{(m_1!)^{1/q}(m_2!)^{1/q}} \\
&\quad\leqslant\left\{\sum_{\mathbf{m}}\left[\frac{1}{\rho_1^{m_1p}\rho_2^{m_2p}m_1!m_2!}\left|f^{(\mathbf{m})}\left(n\pi\sigma\right)\right|^p\right]\right\}^{1/p}\left[\sum_{\mathbf{m}}\frac{(\rho_1\delta_1)^{m_1q}(\rho_2\delta_2)^{m_2q}}{m_1!m_2!}\right]^{1/q} \\
&\quad\leqslant[e^{\sum_{i=1}^2(\rho_i\delta_i)^q}-1]^{1/q}\left[\sum_{\mathbf{m}}\frac{1}{\rho_1^{m_1p}\rho_2^{m_2p}m_1!m_2!}\left|f^{(\mathbf{m})}\left(\frac{\mathbf{n}\pi}{\sigma}\right)\right|^p\right]^{1/p}.
\end{aligned}$$

据此, 以及引理 2、Bernstein 不等式和定理 D, 有

$$\begin{aligned}
&\sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{Z}^2}\left|f(\lambda_{\mathbf{n}})-f\left(\frac{\mathbf{n}\pi}{\sigma}\right)\right|^p \\
&\quad\leqslant[e^{\sum_{i=1}^2(\rho_i\delta_i)^q}-1]^{p/q}\sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{Z}^2}\sum_{\mathbf{m}}\frac{1}{\rho_1^{m_1p}\rho_2^{m_2p}m_1!m_2!}\left|f^{(\mathbf{m})}\left(\frac{\mathbf{n}\pi}{\sigma}\right)\right|^p \\
&\quad=[e^{\sum_{i=1}^2(\rho_i\delta_i)^q}-1]^{p/q}\sum_{\mathbf{m}}\frac{1}{\rho_1^{m_1p}\rho_2^{m_2p}m_1!m_2!}\sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{Z}^2}\left|f^{(\mathbf{m})}\left(\frac{\mathbf{n}\pi}{\sigma}\right)\right|^p \\
&\quad\leqslant[e^{\sum_{i=1}^2(\rho_i\delta_i)^q}-1]^{p/q}\sum_{\mathbf{m}}\frac{1}{\rho_1^{m_1p}\rho_2^{m_2p}m_1!m_2!}\left(\frac{\sigma}{\pi}\right)^1B_p^p\int_{\mathbb{R}^2}|f^{(\mathbf{m})}(\mathbf{x})|^pd\mathbf{x} \\
&\quad\leqslant[e^{\sum_{i=1}^2(\rho_i\delta_i)^q}-1]^{p/q}\left(\frac{\sigma}{\pi}\right)^1B_p^p\sum_{\mathbf{m}}\frac{1}{\rho_1^{m_1p}\rho_2^{m_2p}m_1!m_2!}\sigma_1^{pm_1}\sigma_2^{pm_2}\int_{\mathbb{R}^2}|f(\mathbf{x})|^pd\mathbf{x} \\
&\quad=[e^{\sum_{i=1}^2(\rho_i\delta_i)^q}-1]^{p/q}\left(\frac{\sigma}{\pi}\right)^1B_p^p\|f\|_{p(\mathbb{R}^2)}^p\sum_{\mathbf{m}}\frac{1}{m_1!}\frac{1}{m_2!}\left(\frac{\sigma_1}{\rho_1}\right)^{pm_1}\left(\frac{\sigma_2}{\rho_2}\right)^{pm_2} \\
&\quad=[e^{\sum_{i=1}^2(\rho_i\delta_i)^q}-1]^{p/q}[e^{\sum_{i=1}^2(\sigma_i/\rho_i)^p}-1]\left(\frac{\sigma}{\pi}\right)^1B_p^p\|f\|_{p(\mathbb{R}^2)}^p \\
&\quad\leqslant[e^{\sum_{i=1}^2(\rho_i\delta_i)^q}-1]^{p/q}[e^{\sum_{i=1}^2(\sigma_i/\rho_i)^p}-1]B_p^p/A_p^p\sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{Z}^2}\left|f\left(\frac{n\pi}{\sigma}\right)\right|^p \\
&\quad=T_2^p\sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{Z}^2}\left|f\left(\frac{\mathbf{n}\pi}{\sigma}\right)\right|^p.
\end{aligned}$$

引理 3 得证.

现在, 我们证明定理 1.

定理 1 的证明 由引理 3 有 $\sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{Z}^d}|f(\lambda_{\mathbf{n}})-f(\mathbf{n}\pi/\sigma)|^p\leqslant T_d^p\sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{Z}^d}|f(\mathbf{n}\pi/\sigma)|^p$, T_d 见 (11) 式. 因此

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{Z}^d}|f(\lambda_{\mathbf{n}})|^p\right)^{1/p}&\leqslant\left(\sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{Z}^d}|f(\mathbf{n}\pi/\sigma)|^p\right)^{1/p}+T_d\left(\sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{Z}^d}|f(\mathbf{n}\pi/\sigma)|^p\right)^{1/p} \\
&=(1+T_d)\left(\sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{Z}^d}|f(\mathbf{n}\pi/\sigma)|^p\right)^{1/p}.
\end{aligned}$$

由不等式 (8), 有

$$\left(\left(\frac{\pi}{\sigma}\right)^1 \sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{Z}^d} |f(\lambda_{\mathbf{n}})|^p\right)^{1/p} \leqslant (1+T_d)\left(\left(\frac{\pi}{\sigma}\right)^1 \sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{Z}^d} |f(\mathbf{n}\pi/\sigma)|^p\right)^{1/p}$$
$$\leqslant B_p(1+T_d)\|f\|_{p(\mathbb{R}^d)}. \tag{12}$$

利用同样的方法和不等式 (12) , 有

$$A_p(1-T_d^p)\|f\|_{p(\mathbb{R}^d)} \leqslant \left(\left(\frac{\pi}{\sigma}\right)^1 \sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{Z}^d} |f(\lambda_{\mathbf{n}})|^p\right)^{1/p}. \tag{13}$$

令 $\rho_i = \sigma_i^{1/q}/\delta_i^{1/p}, i=1,\dots,d$. 则 $T_d = B_p/A_p(e^{\sum_{i=1}^d \sigma_i\delta_i}-1)$. 由于 $\sum_{i=1}^d \sigma_i\delta_i < \ln(A_p/B_p+1)$, 我们有 $T_d<1$. 再由 (12) 和 (13) 式, 我们证明了定理 1.

为证明定理 2, 我们介绍引理 4.

引理 4[23] T 是 Banach 空间 X 到 Banach 空间 Y 的有界线性算子. 如果存在两个正常数 M 和 $\varepsilon\,(0<\varepsilon<1)$, 具有下列性质: 对 Y 的单位球上的任意向量 y, 存在 $x\in X$ 使得 $\|x\|\leqslant M, \|Tx-y\|\leqslant\varepsilon$, 则 T 是从 X 到 Y 上的满射.

定理 2 的证明 定理 2 的第 1 部分很容易由定理 1 得到, 我们略去其证明. 现在, 我们证明定理 2 的第 2 部分. 考虑从 $B_{\sigma,p}(\mathbb{R}^d)$ 到 $\ell_p(\mathbb{Z}^d)$ 的映射 L_σ: $f\to f(\lambda_{\mathbf{n}})$. 由定理 2 的 (i), L_σ 是有界线性算子. 对任意 $\omega=\{\omega_{\mathbf{n}}\}\in\ell_p(\mathbb{Z}^d)\,(\|\omega\|_{p(\mathbb{Z}^d)}<1)$. 由定理 D, 存在唯一 $f\in B_{\sigma,p}(\mathbb{R}^d)$ 使得 $f(\mathbf{n}\pi/\sigma)=\omega_{\mathbf{n}}, \forall\,\mathbf{n}\in\mathbb{Z}^d$, 而且满足条件:

$$\|f\|_{p(\mathbb{R}^d)} \leqslant \frac{1}{A_p}\left[\left(\frac{\pi}{\sigma}\right)^1\right]^{1/p}\|\omega\|_{p(\mathbb{Z}^d)} \leqslant \frac{1}{A_p}\left[\left(\frac{\pi}{\sigma}\right)^1\right]^{1/p}.$$

在引理 3 中, 令 $\rho_i=\sigma_i^{1/q}/\delta_i^{1/p}$, $i=1,\dots,d$. 则

$$\|L_\sigma f-\omega\|_{p(\mathbb{Z}^d)} = \|f(\lambda_{\mathbf{n}})-\omega_{\mathbf{n}}\|_{p(\mathbb{Z}^d)} \leqslant \frac{A_p}{B_p}(e^{\sum_{i=1}^d\sigma_i\delta_i}-1)\|\omega\|_{p(\mathbb{Z}^d)} \leqslant \frac{A_p}{B_p}(e^{\sum_{i=1}^d\sigma_i\delta_i}-1)<1.$$

由引理 4, L_σ 将 $B_{\sigma,p}(\mathbb{R}^d)$ 映到 $\ell_p(\mathbb{Z}^d)$ 上. 因此, 存在函数 $g\in B_{\sigma,p}(\mathbb{R}^d)$, 使得 $g(\lambda_{\mathbf{n}})=y_{\mathbf{n}},\forall\,\mathbf{n}\in\mathbb{Z}^d$. 现在, 我们证明 g 的唯一性. 如果还存在函数 $g_1\in B_{\sigma,p}(\mathbb{R}^d)$ 满足同样的插值条件: $g_1(\lambda_{\mathbf{n}})=y_{\mathbf{n}},\quad\forall\,\mathbf{n}\in\mathbb{Z}^d$. 则由定理 1, 有

$$\|g-g_1\|_{p(\mathbb{R}^d)} \leqslant \frac{1}{A_p(1-T_d)}\left(\left(\frac{\pi}{\sigma}\right)^1\sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{Z}^d}|y_{\mathbf{n}}-y_{\mathbf{n}}|^p\right)^{1/p}=0.$$

因此, $g=g_1$. 定理 2 得证.

众所周知的 Jackson-Nikolskii 不等式 (见引理 5) 将用来证明定理 3.

引理 5[19] 设 $f\in B_{\pi,p}(\mathbb{R}^d)$, $1\leqslant p<q\leqslant\infty$. 则 $\|f\|_{q(\mathbb{R}^d)}\leqslant 2^d\prod_{i=1}^5\sigma_i^{1/p-1/q}\|f\|_{p(\mathbb{R}^d)}$.

现在, 我们证明定理 3.

定理 3 的证明 对任意 $i=1,\dots,d$, $\mathbf{n}=(n_1,\dots,n_i,\dots,n_d)$, 由定理 2, 存在唯一的 $g\in B_{\sigma_i,p}(\mathbb{R})$, 使得 $g(\lambda_{\mathbf{n}}^i)=1$, 而对 $j\neq n_i$, 有 $g(\lambda_{\mathbf{n}_i^j}^i)=0$. 注意到 $\mathbf{n}_i^{n_i}=\mathbf{n}$, 再由定理 B, 有

$$g(x)=\sum_{j=-\infty}^{+\infty} g(\lambda_{\mathbf{n}_i^j})\frac{G_{\mathbf{n},i}(x_i)}{G'_{\mathbf{n},i}(\lambda_{\mathbf{n}_i^j}^i)(x_i-\lambda_{\mathbf{n}_i^j}^i)} = \frac{G_{\mathbf{n},i}(x_i)}{G'_{\mathbf{n},i}(\lambda_{\mathbf{n}}^i)(x_i-\lambda_{\mathbf{n}}^i)}.$$

因此, $\frac{G_{\mathbf{n},i}(x_i)}{G'_{\mathbf{n},i}(\lambda_{\mathbf{n}}^i)(x_i-\lambda_{\mathbf{n}}^i)}\in B_{\sigma_i,p}(\mathbb{R})$. 而且, $G_{\mathbf{n}}(\mathbf{x})\in B_{\sigma,p}(\mathbb{R}^d)$. 令

$$f_N(\mathbf{x})=\sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{Z}^d,|\mathbf{n}|\leqslant N} f(\lambda_{\mathbf{n}})G_{\mathbf{n}}(x), \qquad N\in\mathbb{N},$$

则 $f_N \in B_{\sigma,p}(\mathbb{R}^d)$. 由于 $f \in B_{\sigma,p}(\mathbb{R}^d)$, 由定理 1, $\{f(\lambda_{\mathbf{n}})\} \in \ell_p(\mathbb{Z}^d)$. 从而由 Jackson-Nikolskii 不等式和定理 1, 有

$$\begin{aligned}|f - f_N\|_{q(\mathbb{R}^d)} &\leqslant 2^d \prod_{i=1}^{d} \sigma_i^{1/p-1/q} \|f - f_N\|_{p(\mathbb{R}^d)} \\ &\leqslant 2^d \prod_{i=1}^{d} \sigma_i^{1/p-1/q} \frac{1}{A_p(1-T_d)} \left(\left(\frac{\pi}{\sigma}\right)^1 \sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{Z}^d \setminus \{\mathbf{m}\in\mathbb{Z}^d : |\mathbf{m}| \leqslant N\}} |f(\lambda_{\mathbf{n}})|^p \right)^{1/p} \to 0, \quad N \to \infty.\end{aligned}$$

定理 3 得证.

致谢 作者非常感谢两位匿名评审专家提出的有价值的评论, 它们增强了本文的可读性.

参考文献

1 Shannon C E. A mathematical theory of communication. *Bell System Tech Report J*, **27**: 379–423 (1948)

2 Weston J D. A note on the theory of communication. *Philos Mag*, **40**: 449–453 (1939)

3 Zayed A. Kramer's sampling theorem for multidimensional signals and its relationship Lagrange-type interpolation. *Multidimens Syst Signal Process*, **3**: 323–340 (1992)

4 Whittaker J M. Interpolatory Function Theory. Cambridge: Cambridge University Press, 1935

5 Levin B Y. Lectures on Entire Functions. In: Translations of Mathematical Monographs 150. Providence, RI: American Mathematical Society, 1996

6 Benedetto J J. Irregular sampling and frames, In: Wavelets: A Tutorial in Theory and Applications, Chui C K, ed. San Diego: Acadenic Press, 1992, 445–507

7 Butzer P L. A survey of the Whittaker-Shannon sampling theorem and some of its extension. *J Math Res Exposition*, **3**: 185–212 (1983)

8 Butzer P L, Higgins J R, Stens R L. Classical and approximate sampling theorems; studies in the $L^p(\mathbb{R})$ and the uniform norm. *J Approx Theory*, **137**: 250–263 (2005)

9 Higgins J R. Five short stories about the cardinal series. *Bull Amer Math Soc*, **121**: 45–89 (1985)

10 Paley R, Wiener N. Fourier Transform in Complex Domain. In: Colloq Publ Vol. 19. Providence, RI: American Mathematical Society, 1934

11 Sun W. Density of wavelet frames. *Appl Comput Anal*, **22**: 264–272 (2007)

12 Zayed A. A sampling theorem for signals band-limited to general domain in several dimensions. *J Math Anal Appl*, **187**: 196–211 (1994)

13 Aldroubi A, Gröchenig K. Nonuniform sampling and reconstruction in shift-invariant spaces. *SIAM Review*, **43**: 585–620 (2001)

14 Hinsen G. Explicit irregular sampling formulas. *J Comp Appl Math*, **40**: 177–198 (1992)

15 Zayed A. Sampling in Hilbert space. *Proc Amer Math Soc*, **124**: 3767–3776 (1996)

16 Hinsen G. Irregular sampling of band-limited L^p-functions. *J Approx Theory*, **72**: 346–364 (1993)

17 Kadec M I. The exact value of the Paley-Wiener constant. *Soviet Math Dokl*, **5**: 559–561 (1964)

18 Fang G S. Whittaker-Kotelnikov-Shannnon sampling theorem and aliasing error. *J Approx Theory*, **85**: 115–131 (1996)

19 Nikolskii S M. Approximation of Functions of Several Variables and Imbedding Theorems. Berlin: Springer-Verlag, 1975

20 Parzen E. A simple proof and some extensions of sampling theorems. Tech Stanford: Rep. 7. Stanford: Stanford University, 1956

21 王建军, 房良孙. 多元样本定理和混淆误差. 应用数学学报, **19**: 481–488 (1996)

22 Zygmund A. Trigonometric Polynomials. Vols. I, II. Cambridge: Cambridge University Press, 1959

23 Young R M. An Introduction to Non-harmonic Fourier series. New York : Academic Press, 1980