中国科学 A 辑: 数学 2009 年 第 39 卷 第 8 期: 1011～1022
www.scichina.com math.scichina.com
《中国科学》杂志社
SCIENCE IN CHINA PRESS

Littlewood-Paley 算子的交换子

陈艳萍 ①, 丁勇 ②③

① 北京科技大学应用科学学院数力系, 北京 100083
② 北京师范大学数学科学学院, 北京 100875
③ 数学与复杂系统教育部重点实验室, 北京 100875
E-mail: yanpingch@126.com, dingy@bnu.edu.cn

收稿日期: 2007-09-29; 接受日期: 2008-12-23
国家自然科学基金 (批准号: 10571015, 10826046) 和教育部博士点基金 (批准号: 20050027025) 资助项目

摘要 设 $b \in L_{\rm loc}(\mathbb{R}^n)$, 记 L 为包含 Littlewood-Paley g 函数, Lusin 面积积分以及 g_λ^* 函数在内的 Littlewood-Paley 算子. 本文证明了交换子 $[b, L]$ 的 L^p 有界性蕴含了 $b \in {\rm BMO}(\mathbb{R}^n)$. 由此作者给出了交换子 $[b, L]$ L^p 有界性的一个刻画. 注意到 L 的核函数条件弱于 Lipshitz 条件并且 Littlewood-Paley 算子 L 是次线性的, 因此本文的结果本质上改进并推广了 Uchiyama 的著名结果.

关键词 Littlewood-Paley g 函数 面积积分 g_λ^* 函数 交换子 BMO

MSC(2000) 主题分类 **42B30, 42B99**

1 引言

对 $b \in L_{\rm loc}(\mathbb{R}^n)$, 由 b 和 Calderón-Zygmund 奇异积分算子 T_Ω 生成的交换子 $[b, T_\Omega]$ 定义如下:

$$[b, T_\Omega]f(x) = {\rm p.v.} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\Omega(x-y)}{|x-y|^n}(b(x)-b(y))f(y)\,dy,$$

其中 Ω 满足下列条件:

$$\Omega(\lambda x) = \Omega(x), \quad \forall\, \lambda > 0, \quad x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}; \tag{1.1}$$

记 S^{n-1} 为 $\mathbb{R}^n$ 上的具有 Lebesgue 测度 $d\sigma$ 的单位球面, 那么

$$\int_{S^{n-1}} \Omega(x')\,d\sigma(x') = 0, \tag{1.2}$$

和

$$\int_{S^{n-1}} |\Omega(x')|\,d\sigma(x') < \infty. \tag{1.3}$$

1976 年, Coifman, Rochberg 和 Weiss[1] 得到了下面的著名结果:

定理 A[1] 假设 Ω 满足 (1.1) 和 (1.2). 此外, $\Omega \in {\rm Lip}(S^{n-1})$, 即

$$|\Omega(x') - \Omega(y')| \leqslant |x'-y'|, \quad \text{对任意的 } x', y' \in S^{n-1}. \tag{1.4}$$

引用格式: 陈艳萍, 丁勇. Littlewood-Paley 算子的交换子. 中国科学 A, 2009, 39(8): 1011–1022
Chen Y P, Ding Y. Commutators of Littlewood-Paley operators. Sci China Ser A, 2009, 52, DOI: 10.1007/s11425-009-0178-4

(i) 如果 $b\in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$, 那么 $[b,T_\Omega]$ 在 $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1<p<\infty$, 上有界.

(ii) 如果对某个 p, $1<p<\infty$, $[b,R_j]$ $(j=1,\dots,n)$ 在 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 上有界, 那么 $b\in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$, 其中 R_j 是第 j 个 Reisz 变换.

称 $L_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ 中函数 b 属于 $\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$, 如果

$$\|b\|_{\mathrm{BMO}}:=\sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^n\\ r>0}} M(b,Q(x,r))<\infty,$$

其中 $Q(x,r)$ 表示以 x 为中心、r 为直径的方体. 此外,

$$M(b,Q(x,r))=\frac{1}{|Q|}\int_Q |b(y)-b_Q|\,dy,$$

且 $b_Q=\frac{1}{|Q|}\int_Q b(y)\,dy$.

1978 年 Uchiyama[2] 推广了定理 A. 更准确地说, Uchiyama 证明了定理 A 结论 (ii) 中的 Riesz 变换 R_j 可被一般的 Calderón-Zygmund 奇异积分算子 T_Ω 所代替.

定理 B[2] 假设 Ω 满足 (1.1), (1.2) 及 (1.4). 如存在某个 p, $1<p<\infty$, 使得 $[b,T_\Omega]$ 在 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 上有界, 那么 $b\in\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$.

结合定理 A 的结论 (i) 和定理 B, Uchiyama 真正得到了奇异积分交换子 $[b,T_\Omega]$ 的 L^p 有界性的刻画.

1990 年, Torchinsky 和 Wang[3] 把定理 A 的结论 (i) 推广到 Marcinkiewicz 积分 μ_Ω 的交换子, 这里

$$\mu_\Omega f(x)=\left(\int_0^\infty\left|\int_{|x-y|\leqslant t}\frac{\Omega(x-y)}{|x-y|^{n-1}}f(y)\,dy\right|^2\frac{dt}{t^3}\right)^{1/2},$$

而 Ω 满足 (1.1)–(1.3). Marcinkiewicz 积分 μ_Ω 首先由 Stein 引入 [4], 此后许多学者研究过此类算子 (例如, 可参考文献 [5–9]). μ_Ω 本质上是一个 Littlewood-Paley g 函数. 实际上, 如果取 $\varphi(x)=\Omega(x)|x|^{-n+1}\chi_{\{|x|\leqslant 1\}}(x)$ 和 $\varphi_t(x)=t^{-n}\varphi(\frac{x}{t})$, $t>0$, 那么

$$\mu_\Omega f(x)=\left(\int_0^\infty|\varphi_t*f(x)|^2\frac{dt}{t}\right)^{1/2}.$$

设 $b\in L_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, 由 b 和 Marcinkiewicz 积分 μ_Ω 生成的交换子 $[b,\mu_\Omega]$ 定义如下:

$$[b,\mu_\Omega]f(x)=\left(\int_0^\infty\left|\int_{|x-y|\leqslant t}\frac{\Omega(x-y)}{|x-y|^{n-1}}(b(x)-b(y))f(y)\,dy\right|^2\frac{dt}{t^3}\right)^{1/2}.$$

定理 C[3] 设 $b\in\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$, 且 Ω 满足 (1.1), (1.2) 和 (1.4). 那么 $[b,\mu_\Omega]$ 在 $L^p(\mathbb{R}^n)$ $(1<p<\infty)$ 上有界.

显然, 定理 C 是定理 A 中结论 (i) 的推广. 2002 年, Ding, Lu 和 Yabuta[10] 进一步改进了定理 C, 完全去掉了 Ω 的光滑性.

定理 D[10] 设 $b\in\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$ 以及 Ω 满足 (1.1) 和 (1.2). 如果 $\Omega\in L^q(S^{n-1})$ $(q>1)$, 那么对任意的 $1<p<\infty$, $[b,\mu_\Omega]$ 在 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 上有界.

注意到定理 C 和定理 D 都推广和改进了定理 A 中的结论 (i). 因此, 一个自然和有趣的问题是, 当奇异积分算子 T_Ω 被 μ_Ω 代替时, 定理 B 是否仍然成立? 本文对上述问题给出肯定的回答. 实际上, 我们将证明对 Marcinkiewicz 积分 μ_Ω, 定理 B 中的结论在 Ω 更弱的情况下仍然成立.

本文中的第一个结论是关于 Littlewood-Paley g 函数的交换子的.

定理 1 设 Ω 满足 (1.1), (1.2) 和下列条件:

$$|\Omega(x') - \Omega(y')| \leqslant \frac{C_1}{\left(\log \frac{2}{|x'-y'|}\right)^{\gamma}}, \quad C_1 > 0, \quad \gamma > 1, \quad x', y' \in S^{n-1}. \tag{1.5}$$

如果交换子 $[b, \mu_\Omega]$ 对某个 $1 < p < \infty$ 在 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 上有界, 则 $b \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$.

注记 1 易知条件 (1.5) 弱于 $\mathrm{Lip}_\alpha(S^{n-1})$, $0 < \alpha \leqslant 1$. 因此我们的结论在一定意义上改进了定理 B.

注记 2 在定理 1 的证明中我们采用了文献 [2] 的一些思想. 然而, 由于 μ_Ω 既不是卷积算子也不是线性算子, 因此在定理 1 的证明中将需要更多的新思想和一些非平凡的估计.

由于条件 (1.5) 蕴含了 $\Omega \in L^q(S^{n-1})$, $q \geqslant 1$, 因此结合定理 1 和定理 D, 我们立刻得到下列结果:

推论 1 设 Ω 满足 (1.1), (1.2) 和 (1.5). 那么对 $1 < p < \infty$, 交换子 $[b, \mu_\Omega]$ 在 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 上有界当且仅当 $b \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$.

注记 3 推论 1 给出了 Marcinkiewicz 积分 μ_Ω 的交换子 $[b, \mu_\Omega]$ 的 L^p 有界性的刻画.

我们现考虑其他 Littlewood-Paley 算子. 周知, Littlewood-Paley 算子除了 Littlewood-Paley g 函数之外还包括 Lusin 面积积分 S 和 Littlewood-Paley g_λ^* 函数. 由于 Littlewood-Paley 算子在调和分析和偏微分方程 (见文献 [11–13]) 中的重要作用, 因此研究 Lusin 面积积分 S 和 Littlewood-Paley g_λ^* 函数交换子的 L^p 有界性的刻画亦是一个重要而有趣的问题.

设 $0 < \rho < n$, 记 $\varphi^\rho(x) = \Omega(x)|x|^{-n+\rho}\chi_{\{|x|\leqslant 1\}}(x)$, 其中 Ω 满足条件 (1.1)–(1.3). 那么参数型面积积分和参数型 Littlewood-Paley g_λ^* 函数分别定义为

$$S^\rho f(x) = \left(\iint_{\Gamma(x)} \left|\varphi_t^\rho * f(y)\right|^2 \frac{dydt}{t^{n+1}} \right)^{1/2}$$

和

$$g_\lambda^{*,\rho} f(x) = \left(\iint_{\mathbb{R}_+^{n+1}} \left(\frac{t}{t+|x-y|}\right)^{\lambda n} \left|\varphi_t^\rho * f(y)\right|^2 \frac{dydt}{t^{n+1}} \right)^{1/2},$$

其中 $\Gamma(x) = \{(y,t) \in \mathbb{R}_+^{n+1} : |x-y| < t\}$ 以及 $\lambda > 1$.

1960 年, Hörmander[6] 首先研究了参数型 Marcinkiewicz 积分 (即 Littlewood-Paley g 函数). 1990 年, Torchinsky 和 Wang[3] 对 $\rho = 1$ 和 $\Omega \in \mathrm{Lip}_\alpha(S^{n-1})\,(0 < \alpha \leqslant 1)$, 给出了加权的 S^ρ 和 $g_\lambda^{*,\rho}$ 的 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 有界性. 对更一般的 ρ, 1999 年 Sakamoto 和 Yabuta[14] 给出了 S^ρ 和 $g_\lambda^{*,\rho}$ 的 L^p 有界性.

现在我们给出交换子 $[b, S^\rho]$ 和 $[b, g_\lambda^{*,\rho}]$ 的定义. 设 $b \in L_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, $0 < \rho < n$ 以及 $\lambda > 1$. 那么交换子 $[b, S^\rho]$ 和 $[b, g_\lambda^{*,\rho}]$ 分别定义为

$$[b, S^\rho] f(x) = \left(\iint_{\Gamma(x)} \left| \frac{1}{t^\rho} \int_{|y-z|\leqslant t} \frac{\Omega(y-z)}{|y-z|^{n-\rho}} (b(x)-b(z)) f(z) dz \right|^2 \frac{dydt}{t^{n+1}} \right)^{1/2}$$

和

$$[b, g_\lambda^{*,\rho}] f(x) = \left(\iint_{\mathbb{R}_+^{n+1}} \left(\frac{t}{t+|x-y|}\right)^{\lambda n} \left| \frac{1}{t^\rho} \int_{|y-z|\leqslant t} \frac{\Omega(y-z)}{|y-z|^{n-\rho}} (b(x)-b(z)) f(z) dz \right|^2 \frac{dydt}{t^{n+1}} \right)^{1/2}.$$

最近, Ding 和 Xue[15] 给出了交换子 $[b, S^\rho]$ 和 $[b, g_\lambda^{*,\rho}]$ 的 L^p 有界性.

定理 E[15] 设 $\Omega \in L^2(S^{n-1})$ 满足 (1.1), (1.2) 以及下列条件:

$$\int_0^1 \frac{\omega_2(\delta)}{\delta} (1 + |\log \delta|)^\sigma d\delta < \infty, \qquad \sigma > 2, \tag{1.6}$$

其中, 记 ω_2 为 Ω 的 2 次积分连续模, 定义如下

$$\omega_2(\delta)=\sup_{\|\gamma\|\leqslant\delta}\left(\int_{S^{n-1}}|\Omega(\gamma x')-\Omega(x')|^2d\sigma(x')\right)^{1/2},$$

其中 γ 表示 S^{n-1} 上的一个旋转, $\|\gamma\|=\sup_{x'\in S^{n-1}}|\gamma x'-x'|$.

如果 $\rho>n/2$ 以及 $b\in\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$, 那么, 对 $1<p<\infty$, 存在常数 $C>0$ 使得对任意 $f\in L^p(\mathbb{R}^n)$,

(i) $\|[b,S^\rho](f)\|_p\leqslant C\|b\|_{\mathrm{BMO}}\|f\|_p$;

(ii) $\|[b,g_\lambda^{*,\rho}](f)\|_p\leqslant C\|b\|_{\mathrm{BMO}}\|f\|_p\quad(\lambda>2)$.

我们下面给出的有关交换子 $[b,S^\rho]$ 和 $[b,g_\lambda^{*,\rho}]$ 的结果, 可以看作是定理 E 的反向结果.

定理 2 设 $0<\rho<n$. 如 Ω 满足 (1.1), (1.2) 和 (1.5), 且对某个 p, $1<p<\infty$, $[b,S^\rho]$ 在 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 上有界, 那么 $b\in\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$.

定理 3 设 $0<\rho<n$ 及 $\lambda>1$. 如 Ω 满足 (1.1), (1.2) 和 (1.5), 且对某个 p, $1<p<\infty$, $[b,g_\lambda^{*,\rho}]$ 在 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 上有界, 那么 $b\in\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$.

注意到条件 (1.5) 蕴含着 Ω 满足 (1.6), 我们对定理 2 和定理 3 有如下的推论.

推论 2 令 $1<p<\infty$. 如 $\rho>n/2$ 且 Ω 满足 (1.1), (1.2) 和 (1.5). 那么交换子 $[b,S^\rho]$ 在 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 上有界当且仅当 $b\in\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$.

推论 3 令 $1<p<\infty$. 如 $\rho>n/2$, $\lambda>2$ 并且 Ω 满足 (1.1), (1.2) 和 (1.5). 那么交换子 $[b,g_\lambda^{*,\rho}]$ 在 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 上有界当且仅当 $b\in\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$.

注记 4 推论 2 和 3 给出了 Lusin 面积积分和 Littlewood-Paley g_λ^* 函数的交换子的 L^p 有界性的刻画.

注记 5 易证 $[b,S^\rho](f)(x)\leqslant 2^{\lambda n}[b,g_\lambda^{*,\rho}](f)(x)$, $\lambda>1$ (见文献 [16]), 因此定理 3 实际上是定理 2 的直接结果证明.

2 定理 1 的证明

为了证明定理 1 我们首先给出下面两个引理.

引理 2.1[16] 如果 $|x|>2|y|$, 那么 $\left|\frac{x-y}{|x-y|}-\frac{x}{|x|}\right|\leqslant\frac{2|y|}{|x|}$.

类似于文献 [17, p. 1093] 中 (2.8) 的证明, 易得下面的结论:

引理 2.2 如果 Ω 满足条件 (1.1), (1.2) 和 (1.5), 那么对 $0<\beta\leqslant n$ 和 $|x|>2|y|$,

$$\left|\frac{\Omega(x-y)}{|x-y|^\beta}-\frac{\Omega(x)}{|x|^\beta}\right|\leqslant\frac{C}{|x|^\beta(\log\frac{|x|}{|y|})^\gamma}.$$

现回到定理 1 的证明. 下面记 B_j $(j=1,\dots,15)$ 为仅依赖于 Ω,n,p,γ 和 $B_i\,(1\leqslant i<j)$ 的正常数. 假设 $[b,\mu_\Omega]$ 是 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 上的有界算子. 不失一般性, 不妨设 $\|[b,\mu_\Omega]\|_{L^p\mapsto L^p}=1$. 为了证明 $b\in\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$, 只需说明存在常数 $B>0$ 使得对任意的 $x_0\in\mathbb{R}^n$ 和 $r>0$

$$M(b,Q(x_0,r))\leqslant B. \tag{2.1}$$

易知

$$\begin{aligned}&\frac{1}{|Q(x_0,r)|}\int_{Q(x_0,r)}\left|b(y)-\frac{1}{|Q(x_0,r)|}\int_{Q(x_0,r)}b(z)\,dz\right|dy\\&\quad=\frac{1}{|Q(0,1)|}\int_{Q(0,1)}\left|\widetilde{b}(y)-\frac{1}{|Q(0,1)|}\int_{Q(0,1)}\widetilde{b}(z)\,dz\right|dy,\end{aligned}$$

其中 $\widetilde{b}(y)=b(ry+x_0)$, $y\in\mathbb{R}^n$. 我们断言

$$\|[\widetilde{b},\mu_\Omega]\|_{L^p\mapsto L^p}=\|[b,\mu_\Omega]\|_{L^p\mapsto L^p}. \tag{2.2}$$

事实上,

$$\begin{aligned}
&\|[\widetilde{b},\ \mu_\Omega]f\|_p\\
&\quad=\bigg(\int_{\mathbb{R}^n}\bigg(\int_0^\infty\bigg|\int_{|x-y|\leqslant t}[b(rx+x_0)-b(ry+x_0)]\frac{\Omega(x-y)}{|x-y|^{n-1}}f(y)\,dy\bigg|^2\frac{dt}{t^3}\bigg)^{p/2}dx\bigg)^{1/p}\\
&\quad=r^{-n}r^{-n/p}\bigg(\int_{\mathbb{R}^n}\bigg(\int_0^\infty\bigg|\int_{|r^{-1}(x-x_0)-r^{-1}(y-x_0)|<t}[b(x)-b(y)]\\
&\qquad\times\frac{\Omega(r^{-1}(x-x_0)-r^{-1}(y-x_0))}{|r^{-1}(x-x_0)-r^{-1}(y-x_0)|^{n-1}}f(r^{-1}(y-x_0))\,dy\bigg|^2\frac{dt}{t^3}\bigg)^{p/2}dx\bigg)^{1/p}\\
&\quad=r^{-n/p}\bigg(\int_{\mathbb{R}^n}\bigg(\int_0^\infty\bigg|\int_{|x-y|<t}[b(x)-b(y)]\frac{\Omega(x-y)}{|x-y|^{n-1}}f(r^{-1}(y-x_0))\,dy\bigg|^2\frac{dt}{t^3}\bigg)^{p/2}dx\bigg)^{1/p}\\
&\quad\leqslant\|[b,\mu_\Omega]\|_{L^p\mapsto L^p}r^{-n/p}\|g\|_p,
\end{aligned}$$

其中 $g(y)=f(r^{-1}(y-x_0))$. 注意到 $r^{-n/p}\|g\|_p=\|f\|_p$, 那么

$$\|[\widetilde{b},\mu_\Omega]f\|_p\leqslant\|[b,\mu_\Omega]\|_{L^p\mapsto L^p}\|f\|_p.$$

类似地可得 $\|[b,\mu_\Omega]f\|_p\leqslant\|[\widetilde{b},\mu_\Omega]\|_{L^p\mapsto L^p}\|f\|_p$, 因此得到 (2.2).

由 (2.2), 要证明 (2.1) 只需证明

$$N=|Q_0|^{-1}\int_{Q_0}|b(y)-a_0|\,dy\leqslant B, \tag{2.1$'$}$$

其中 Q_0 表示以 0 为中心、1 为直径的方体, 并且$a_0=|Q_0|^{-1}\int_{Q_0}b(y)\,dy$. 因为$[b-a_0,\mu_\Omega]=[b,\mu_\Omega]$, 我们不妨假定 $a_0=0$. 设 $\psi(y)=[\mathrm{sgn}(b(y))-c_0]\chi_{Q_0}(y)$, 其中$c_0=|Q_0|^{-1}\int_{Q_0}\mathrm{sgn}(b(y))dy$. 由 $\int_{Q_0}b(y)\,dy=0$, 易知 $|c_0|<1$. 这样, 容易验证 ψ 满足下列性质:

$$\|\psi\|_\infty\leqslant 2, \tag{2.3}$$

$$\mathrm{supp}\psi\subset Q_0, \tag{2.4}$$

$$\int_{\mathbb{R}^n}\psi(y)\,dy=0, \tag{2.5}$$

$$\psi(y)b(y)>0, \tag{2.6}$$

$$|Q_0|^{-1}\int_{\mathbb{R}^n}\psi(y)b(y)\,dy=N. \tag{2.7}$$

由 (1.2), 存在 $0<B_1<1$ 使得

$$\sigma\bigg(\bigg\{x\in S^{n-1}:\Omega(x')\geqslant\frac{2C_1}{(\log\frac{2}{B_1})^\gamma}\bigg\}\bigg)>0. \tag{2.8}$$

如果记 $\Lambda=\big\{x\in S^{n-1}:\Omega(x')\geqslant\frac{2C_1}{(\log\frac{2}{B_1})^\gamma}\big\}$, 那么由 (1.5) 可知 Λ 是闭集. 我们现在断言:

$$\text{如果 } x'\in\Lambda \text{ 并且 } y'\in S^{n-1} \text{ 满足 } |x'-y'|\leqslant B_1,\text{ 那么 } \Omega(y')\geqslant\frac{C_1}{(\log\frac{2}{B_1})^\gamma}. \tag{2.9}$$

实际上, 因为 $|\Omega(x')-\Omega(y')|\leqslant\frac{C_1}{(\log\frac{2}{|x'-y'|})^\gamma}\leqslant\frac{C_1}{(\log\frac{2}{B_1})^\gamma}$ 并且 $\Omega(x')\geqslant2\frac{C_1}{(\log\frac{2}{B_1})^\gamma}$, $x'\in\Lambda$, 因此 $\Omega(y')\geqslant\frac{C_1}{(\log\frac{2}{B_1})^\gamma}$. 记 $B_2=3B_1^{-1}+1$, 并设 $G=\{x\in\mathbb{R}^n:|x|>B_2 \text{ 且 } x'\in\Lambda\}$. 那么当 $x\in G$

时, 由 Minkowski 不等式, 可得

$$
\begin{aligned}
|[b,\mu_\Omega]\psi(x)| &\geqslant |\mu_\Omega(b\psi)(x)| - |b(x)||\mu_\Omega(\psi)(x)| \\
&= \bigg(\int_0^\infty \bigg|\int_{|x-y|\leqslant t} \Omega((x-y)')|x-y|^{1-n} b(y)\psi(y)\,dy\bigg|^2 \frac{dt}{t^3}\bigg)^{1/2} \\
&\quad -|b(x)|\bigg(\int_0^\infty \bigg|\int_{|x-y|\leqslant t} \Omega((x-y)')|x-y|^{1-n}\psi(y)\,dy\bigg|^2 \frac{dt}{t^3}\bigg)^{1/2} \\
&:= I_1 - I_2. \qquad (2.10)
\end{aligned}
$$

我们首先给出 I_1 的估计. 如果 $|y|<1$, 那么 $|x|>B_2|y|>2|y|$, $x\in G$. 应用引理 2.1, 可知 $|(x-y)'-x'|\leqslant 2\frac{|y|}{|x|}\leqslant B_1$. 那么, 由 (2.9) 可得 $\Omega((x-y)')\geqslant \frac{C_1}{(\log\frac{2}{B_1})^\gamma}$. 由 (2.4)–(2.7) 并且注意到 $\frac{3}{4}|x|\leqslant|x-y|\leqslant\frac{5}{4}|x|$, 由 Hölder 不等式, 我们得到

$$
\begin{aligned}
I_1 &\geqslant \frac{C_1}{(\log\frac{2}{B_1})^\gamma}\bigg\{\int_{|x|}^\infty\bigg(\int_{Q_0} b(y)\psi(y)|x-y|^{1-n}\chi_{\{|x-y|\leqslant t\}}\,dy\bigg)^2\frac{dt}{t^3}\bigg\}^{1/2} \\
&\geqslant \frac{C_1}{(\log\frac{2}{B_1})^\gamma}\bigg(\int_{|x|}^\infty\int_{Q_0} b(y)\psi(y)|x-y|^{1-n}\chi_{\{|x-y|\leqslant t\}}\,dy\frac{dt}{t^3}\bigg)\bigg(\int_{|x|}^\infty\frac{dt}{t^3}\bigg)^{-1/2} \\
&= \frac{C_1|x|}{(\log\frac{2}{B_1})^\gamma}\int_{Q_0}|x-y|^{1-n}b(y)\psi(y)\int_{\substack{|x|\leqslant t\\|x-y|\leqslant t}}\frac{dt}{t^3}\,dy \\
&\geqslant \frac{C_1|x|}{(\log\frac{2}{B_1})^\gamma}\int_{Q_0}\bigg(\frac{5|x|}{4}\bigg)^{1-n}b(y)\psi(y)\int_{\frac{5}{4}|x|\leqslant t}\frac{dt}{t^3}\,dy \\
&= \frac{C|x|^{-n}}{(\log\frac{2}{B_1})^\gamma}\int_{Q_0}b(y)\psi(y)\,dy := B_3N|x|^{-n}. \qquad (2.11)
\end{aligned}
$$

现转向 I_2 的估计. 注意到 $\Omega\in L^\infty(S^{n-1})$ 以及 $|x|>B_2|y|$ 可知 $|x|\simeq|x-y|$, 那么由 (2.3)–(2.5) 和引理 2.2, 我们有

$$
\begin{aligned}
I_2 &\leqslant |b(x)|\bigg(\int_0^\infty\bigg|\int_{\substack{|x-y|\leqslant t\\|x|\leqslant t}}\bigg(\frac{\Omega(x-y)}{|x-y|^{n-1}}-\frac{\Omega(x)}{|x|^{n-1}}\bigg)\psi(y)\,dy\bigg|^2\frac{dt}{t^3}\bigg)^{1/2} \\
&\quad +|b(x)|\bigg(\int_0^\infty\bigg|\int_{\substack{|x-y|\leqslant t\\|x|>t}}\frac{\Omega(x-y)}{|x-y|^{n-1}}\psi(y)\,dy\bigg|^2\frac{dt}{t^3}\bigg)^{1/2} \\
&\quad +|b(x)|\bigg(\int_0^\infty\bigg|\int_{\substack{|x-y|>t\\|x|\leqslant t}}\frac{\Omega(x)}{|x|^{n-1}}\psi(y)\,dy\bigg|^2\frac{dt}{t^3}\bigg)^{1/2} \\
&\leqslant |b(x)|\int_{Q_0}|\psi(y)|\bigg|\frac{\Omega(x-y)}{|x-y|^{n-1}}-\frac{\Omega(x)}{|x|^{n-1}}\bigg|\bigg(\int_{\substack{|x-y|\leqslant t\\|x|\leqslant t}}\frac{dt}{t^3}\bigg)^{1/2}dy \\
&\quad +|b(x)|\int_{Q_0}\frac{|\Omega(x-y)|}{|x-y|^{n-1}}|\psi(y)|\bigg(\int_{\substack{|x-y|\leqslant t\\|x|\geqslant t}}\frac{dt}{t^3}\bigg)^{1/2}dy \\
&\quad +|b(x)|\int_{Q_0}\frac{|\Omega(x)|}{|x|^{n-1}}|\psi(y)|\bigg(\int_{\substack{|x-y|\geqslant t\\|x|\leqslant t}}\frac{dt}{t^3}\bigg)^{1/2}dy \\
&\leqslant C|b(x)|\int_{Q_0}\frac{|\psi(y)|}{|x|^n(\log|x|)^\gamma}\,dy + C|b(x)|\int_{Q_0}\frac{|\psi(y)|}{|x|^{n+1/2}}\,dy \\
&\leqslant B_4|b(x)||x|^{-n}(\log|x|)^{-\gamma}. \qquad (2.12)
\end{aligned}
$$

设

$$
F=\bigg\{x\in G: |b(x)|>\frac{NB_3}{2B_4}(\log|x|)^\gamma \text{ 及 } |x|<N^{\frac{p'}{n}}\bigg\}.
$$

由 ψ 的性质 (2.3), (2.4) 以及估计 (2.10)–(2.12), 存在 $B_5>0$ 使得

$$\begin{aligned}2^p &\geqslant \int_{\mathbb{R}^n} |[b,\mu_\Omega]\psi(x)|^p\,dx\\ &\geqslant \int_{(G\setminus F)\cap\{|x|<N^{p'/n}\}} \Big(\frac{1}{2}B_3N|x|^{-n}\Big)^p dx\\ &\geqslant \int_{\{B_5(|F|+B_2^n)^{1/n}<|x|<N^{\frac{p'}{n}}\}\cap G} \Big(\frac{1}{2}B_3N|x|^{-n}\Big)^p dx\\ &= \Big(\frac{B_3N}{2}\Big)^p \int_{B_5(|F|+B_2^n)^{1/n}}^{N^{\frac{p'}{n}}} t^{-np+n-1}\,dt \int_\Lambda d\sigma(x')\\ &= \sigma(\Lambda)\frac{(\frac{B_3N}{2})^p}{np-n}\big(B_5^{n-np}(|F|+B_2^n)^{1-p}-N^{p'(1-p)}\big).\end{aligned}\tag{2.13}$$

因为 $p=(p-1)p'$, 那么有

$$(|F|+B_2^n)^{1-p}\leqslant B_5^{np-n}\big(N^{p'(1-p)}+B_6N^{p'(1-p)}\big):=B_7^{(1-p)}N^{p'(1-p)}.\tag{2.14}$$

这表明 $|F|+B_2^n\geqslant B_7N^{p'}$. 如果 $N\leqslant(2B_7^{-1}B_2^n)^{1/p'}$, 那么便完成了定理 1 的证明. 否则, 有 $N>(2B_7^{-1}B_2^n)^{1/p'}$, 这样

$$|F|\geqslant\frac{B_7}{2}N^{p'}.\tag{2.15}$$

设 $g(y)=\chi_{Q_0}(y)$. 对 $x\in F$,

$$\begin{aligned}|[b,\mu_\Omega]g(x)| &\geqslant |b(x)|\bigg(\int_0^\infty\bigg|\int_{|x-y|\leqslant t}\frac{\Omega((x-y)')}{|x-y|^{n-1}}g(y)\,dy\bigg|^2\frac{dt}{t^3}\bigg)^{1/2}\\ &\quad-\bigg(\int_0^\infty\bigg|\int_{|x-y|\leqslant t}\frac{\Omega((x-y)')}{|x-y|^{n-1}}b(y)g(y)\,dy\bigg|^2\frac{dt}{t^3}\bigg)^{1/2}\\ &:=K_1-K_2.\end{aligned}\tag{2.16}$$

由引理 2.1, 对 $x\in F$ 和 $y\in Q_0$ 有 $|(x-y)'-x'|\leqslant B_1$ 及 $\frac{3|x|}{4}\leqslant|x-y|\leqslant\frac{5|x|}{4}$. 这样, 由 (2.9) 知 $\Omega((x-y)')\geqslant\frac{C_1}{(\log\frac{2}{B_1})^\gamma}$. 因此

$$\begin{aligned}K_1 &\geqslant \frac{C_1}{(\log\frac{2}{B_1})^\gamma}|b(x)|\bigg(\int_{|x|}^\infty\bigg(\int_{Q_0}\frac{1}{|x-y|^{n-1}}\chi_{\{|x-y|\leqslant t\}}\,dy\bigg)^2\frac{dt}{t^3}\bigg)^{1/2}\\ &\geqslant \frac{C_1}{(\log\frac{2}{B_1})^\gamma}|b(x)|\bigg(\int_{|x|}^\infty\int_{Q_0}\frac{1}{|x-y|^{n-1}}\chi_{\{|x-y|\leqslant t\}}\,dy\frac{dt}{t^3}\bigg)\bigg(\int_{|x|}^\infty\frac{dt}{t^3}\bigg)^{-1/2}\\ &\geqslant \frac{C_1}{(\log\frac{2}{B_1})^\gamma}|x||b(x)|\int_{Q_0}\frac{1}{|x-y|^{n-1}}\int_{\substack{|x|\leqslant t\\|x-y|\leqslant t}}\frac{dt}{t^3}\,dy\\ &\geqslant \frac{C_1}{(\log\frac{2}{B_1})^\gamma}|x||b(x)|\int_{Q_0}\Big(\frac{5|x|}{4}\Big)^{1-n}\min\bigg\{|x|^{-2},\Big(\frac{5|x|}{4}\Big)^{-2}\bigg\}\,dy\\ &:=B_8|b(x)||x|^{-n}.\end{aligned}\tag{2.17}$$

另一方面, 由 $\Omega\in L^\infty(S^{n-1})$ 和 $|x|\simeq|x-y|$ 有

$$\begin{aligned}K_2 &\leqslant \bigg(\int_0^\infty\bigg|\int_{|x-y|\leqslant t}\frac{\Omega(x-y)}{|x-y|^{n-1}}b(y)g(y)\,dy\bigg|^2\frac{dt}{t^3}\bigg)^{1/2}\\ &\leqslant C\int_{Q_0}|b(y)||x|^{-n}\,dy:=B_9N|x|^{-n}.\end{aligned}\tag{2.18}$$

因此, 由 (2.16)–(2.18) 对 $x \in F$ 有

$$|[b,\mu_\Omega]g(x)| \geqslant B_8|b(x)||x|^{-n} - B_9N|x|^{-n}. \tag{2.19}$$

现取 $B_{10} \geqslant \|g\|_p$. 那么由 (2.19)

$$\begin{aligned}
B_{10}N &\geqslant \|g\|_p\Big(\int_{|x|\leqslant N^{\frac{p'}{n}}} dx\Big)^{1/p'}\\
&\geqslant \|[b,\mu_\Omega]g\|_p\Big(\int_F dx\Big)^{1/p'}\\
&\geqslant \int_F |[b,\mu_\Omega]g(x)|\,dx\\
&\geqslant B_8\int_F |b(x)||x|^{-n}\,dx - B_9N\int_F |x|^{-n}\,dx\\
&\geqslant B_8\frac{NB_3}{2B_4}\int_F (\log|x|)^\gamma|x|^{-n}\,dx - B_9N\int_F |x|^{-n}\,dx\\
&:= L_1 - L_2.
\end{aligned} \tag{2.20}$$

在上面的估计中, 我们使用了不等式 $|b(x)| > \frac{NB_3}{2B_4}(\log|x|)^\gamma$, $x \in F$. 现在分 $\gamma \geqslant n$ 和 $1 < \gamma < n$ 两种情况分别估计 L_1.

情况 1: $\gamma \geqslant n$. 注意到, 当 $s > e$, 函数 $\frac{\log s}{s}$ 是一个递减函数以及 $4 < B_2 < |y| < N^{\frac{p'}{n}}$, $y \in F$, 因此由 (2.15)

$$\begin{aligned}
L_1 &\geqslant B_{11}N\int_F \Big(\frac{(\log|y|)}{|y|}\Big)^n(\log|y|)^{\gamma-n}\,dy\\
&\geqslant B_{11}N(\log B_2)^{\gamma-n}\frac{(\log N^{\frac{p'}{n}})^n}{(N^{\frac{p'}{n}})^n}\frac{B_7}{2}N^{p'} := B_{12}N(\log N)^n.
\end{aligned}$$

情况 2: $1 < \gamma < n$. 在这种情况下, 当 $s > e$ 函数 $\frac{(\log s)^\gamma}{s^n}$ 仍然是递减函数, 并且 $4 < B_2 < |y| < N^{\frac{p'}{n}}$, $y \in F$. 再次应用 (2.15) 得到

$$L_1 \geqslant B_{11}N\int_F \frac{(\log|y|)^\gamma}{|y|^n}\,dy \geqslant B_{11}N\frac{B_7}{2}N^{p'}\frac{(\log N^{\frac{p'}{n}})^\gamma}{N^{p'}} := B_{13}N(\log N)^\gamma.$$

综合情况 1 和情况 2 的估计, 存在常数 $\tau > 1$ 和 B_{14} 使得

$$L_1 \geqslant B_{14}N(\log N)^\tau. \tag{2.21}$$

至于 L_2, 因为 $4 < B_2 < |x| < N^{\frac{p'}{n}}$, 如果 $x \in F$, 那么由 $\Omega \in L^\infty(S^{n-1})$, 有

$$L_2 \leqslant B_9N\int_{B_2}^{N^{\frac{p'}{n}}}\frac{dr}{r}\int_{S^{n-1}} d\sigma(x') \leqslant B_{15}N\log N. \tag{2.22}$$

那么, 由 (2.20)–(2.22) 我们得到 $B_{10} \geqslant B_{14}(\log N)^\tau - B_{15}\log N$. 上面的估计说明存在常数 $B = B(\Omega,p,n,\gamma,B_j)$ 使得 $N \leqslant B$. 这样我们得到了 $(2.1)'$, 从而完成了定理 1 的证明.

3 定理 2 的证明

利用证明 (2.2) 的思想, 我们可得

$$\|[\widetilde{b},S^\rho]\|_{L^p\mapsto L^p} = \|[b,S^\rho]\|_{L^p\mapsto L^p}, \tag{3.1}$$

其中 $\widetilde{b}(y) = b(ry+x_0)$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$. 因此由 (3.1), 要证明定理 2, 只需证明存在常数 $B > 0$ 使得

$$N = |Q_0|^{-1}\int_{Q_0} |b(y) - a_0|\,dy \leqslant B, \tag{3.2}$$

其中 Q_0 是以 0 为中心、以 1 为直径的方体, 以及 $a_0=|Q_0|^{-1}\int_{Q_0}b(y)\,dy$. 不失一般性, 我们假定 $a_0=0$ 并且 $\|[b,S^\rho]\|_{L^p\mapsto L^p}=1$.

下面的常数 B_j $(j=1,\dots,15)$ 为定理 1 证明中的常数, B_k $(k=16,\dots,24)$ 是仅依赖于 Ω,p,n,γ 和 B_i $(1\leqslant i<k)$ 的正常数. 而且, 函数 ψ、集合 G 和 Λ 都与定理 1 证明中相同. 因此 ψ 满足性质 (2.3)–(2.7).

对 $x\in G$, 由 Minkowski 不等式, 我们有

$$
\begin{aligned}
|[b,S^\rho]\psi(x)| &\geqslant \bigg(\int_{4|x|}^{\infty}\int_{\substack{|x-y|<t\\ 2|x|<|y|<3|x|}}\bigg|\int_{|y-z|<t}\frac{\Omega(y-z)}{|y-z|^{n-\rho}}(b(x)-b(z))\psi(z)\,dz\bigg|^2\frac{dydt}{t^{n+1+2\rho}}\bigg)^{1/2}\\
&\geqslant \bigg(\int_{4|x|}^{\infty}\int_{\substack{|x-y|<t,\ y'\in\Lambda\\ 2|x|<|y|<3|x|}}\bigg|\int_{|y-z|<t}\frac{\Omega(y-z)}{|y-z|^{n-\rho}}b(z)\psi(z)\,dz\bigg|^2\frac{dydt}{t^{n+1+2\rho}}\bigg)^{1/2}\\
&\quad -|b(x)|\bigg(\int_{4|x|}^{\infty}\int_{\substack{|x-y|<t\\ 2|x|<|y|<3|x|}}\bigg|\int_{|y-z|<t}\frac{\Omega(y-z)}{|y-z|^{n-\rho}}\psi(z)\,dz\bigg|^2\frac{dydt}{t^{n+1+2\rho}}\bigg)^{1/2}\\
&:= J_1-J_2.
\end{aligned}\tag{3.3}
$$

我们首先讨论 J_1. 注意到如果 $|z|<1$, 那么 $|x|>B_2|z|$ 并且 $|y|>2B_2z$. 由引理 2.1, 得到 $|(y-z)'-y'|\leqslant 2\frac{|z|}{|y|}<B_1$. 那么由 (2.9) 有 $\Omega((y-z)')\geqslant\frac{C_1}{(\log\frac{2}{B_1})^\gamma}$. 而且, 易知

$$
4|x|>|y|+|z|\geqslant|y-z|\geqslant|y|-|z|>2|x|-|x|/2=\frac{3|x|}{2},
$$

并且 $4|x|>|x-y|\geqslant|y|-|x|>|x|$. 由 (2.4), (2.6), (2.7) 和 Hölder 不等式, 我们得到

$$
\begin{aligned}
J_1 &\geqslant \frac{C_1}{(\log\frac{2}{B_1})^\gamma}\bigg(\int_{4|x|}^{\infty}\int_{\substack{|x-y|<t\\ 2|x|<|y|<3|x|,\ y'\in\Lambda}}\bigg(\int_{Q_0}b(z)\psi(z)\\
&\quad\times|y-z|^{\rho-n}\chi_{\{|y-z|<t\}}\,dz\bigg)^2\frac{dydt}{t^{n+1+2\rho}}\bigg)^{1/2}\\
&\geqslant C\bigg(\int_{4|x|}^{\infty}\int_{\substack{|x-y|<t\\ 2|x|<|y|<3|x|,\ y'\in\Lambda}}\int_{Q_0}b(z)\psi(z)|y-z|^{\rho-n}\chi_{\{|y-z|<t\}}\,dz\frac{dydt}{t^{n+1+2\rho}}\bigg)\\
&\quad\times\bigg(\int_{4|x|}^{\infty}\int_{\substack{|x-y|<t\\ 2|x|<|y|<3|x|,\ y'\in\Lambda}}\frac{dydt}{t^{n+1+2\rho}}\bigg)^{-1/2}\\
&\geqslant C|x|^{2\rho-n}\int_{Q_0}b(z)\psi(z)\int_{2|x|<|y|<3|x|,\,y'\in\Lambda}\int_{4|x|<t}\frac{dt}{t^{n+1+2\rho}}\,dydz\\
&\geqslant C\sigma(\Lambda)|x|^{-n}\int_{Q_0}b(z)\psi(z)\,dz\\
&:= B_{16}N|x|^{-n}.
\end{aligned}\tag{3.4}
$$

由 (2.3)–(2.5) 和 $\Omega \in L^\infty(S^{n-1})$, 有

$$\begin{aligned}
J_2 \leqslant\ & |b(x)|\bigg(\int_{4|x|}^\infty \int_{\substack{|x-y|<t\\ 2|x|<|y|<3|x|}} \bigg|\int_{\substack{|y-z|<t\\ |y|<t}} \bigg(\frac{\Omega(y-z)}{|y-z|^{n-\rho}} - \frac{\Omega(y)}{|y|^{n-\rho}}\bigg)\psi(z)\,dz\bigg|^2 \frac{dydt}{t^{n+1+2\rho}}\bigg)^{1/2}\\
&+|b(x)|\bigg(\int_{4|x|}^\infty \int_{\substack{|x-y|<t\\ 2|x|<|y|<3|x|}} \bigg|\int_{\substack{|y-z|<t\\ |y|\geqslant t}} \frac{\Omega(y-z)}{|y-z|^{n-\rho}}\psi(z)\,dz\bigg|^2 \frac{dydt}{t^{n+1+2\rho}}\bigg)^{1/2}\\
&+|b(x)|\bigg(\int_{4|x|}^\infty \int_{\substack{|x-y|<t\\ 2|x|<|y|<3|x|}} \bigg|\int_{\substack{|y-z|\geqslant t\\ |y|<t}} \frac{\Omega(y)}{|y|^{n-\rho}}\psi(z)\,dz\bigg|^2 \frac{dydt}{t^{n+1+2\rho}}\bigg)^{1/2}\\
\leqslant\ & |b(x)|\bigg(\int_{4|x|}^\infty \int_{\substack{|x-y|<t\\ 2|x|<|y|<3|x|}} \bigg(\int_{\substack{|y-z|<t\\ |y|<t}} \bigg|\frac{\Omega(y-z)}{|y-z|^{n-\rho}} - \frac{\Omega(y)}{|y|^{n-\rho}}\bigg||\psi(z)|\,dz\bigg)^2 \frac{dydt}{t^{n+1+2\rho}}\bigg)^{1/2}\\
&+C|b(x)|\int_{Q_0}\bigg(\int_{2|x|<|y|<3|x|} \frac{1}{|y-z|^{2(n-\rho)}} \int_{\substack{4|x|<t,\ |x-y|<t\\ |y|\geqslant t,\ |y-z|<t}} \frac{dt}{t^{n+1+2\rho}}dy\bigg)^{1/2}|\psi(z)|\,dz\\
&+C|b(x)|\int_{Q_0}\bigg(\int_{2|x|<|y|<3|x|} \frac{1}{|y|^{2(n-\rho)}} \int_{\substack{4|x|<t,\ |x-y|<t\\ |y|<t,\ |y-z|\geqslant t}} \frac{dt}{t^{n+1+2\rho}}dy\bigg)^{1/2}|\psi(z)|\,dz\\
:=\ & J_2^1 + J_2^2 + J_2^3.
\end{aligned}$$

容易验证对 $x \in G, z \in Q_0$ 和 $2|x| < |y| < 3|x|$, 下面的事实成立:

$$\{t : t > 4|x|\} \cap \{t : |x-y| < t\} \cap \{t : |y| \geqslant t\} \cap \{t : |y-z| < t\} = \emptyset,$$

并且 $\{t : t > 4|x|\} \cap \{t : |x-y| < t\} \cap \{t : |y| < t\} \cap \{t : |y-z| \geqslant t\} = \emptyset$. 因此 $J_2^2 = J_2^3 = 0$. 应用引理 2.2 和 Minkowski 不等式, 我们得到

$$\begin{aligned}
J_2 \leqslant J_2^1 \leqslant\ & C|b(x)|\int_{Q_0}|\psi(z)|\bigg(\int_{2|x|<|y|<3|x|}\frac{1}{|y|^{2(n-\rho)}}\\
&\times\frac{1}{(\log|y|)^{2\gamma}}\int_{\substack{4|x|\leqslant t,\, |y-z|<t\\ |y|<t,\ |x-y|<t}}\frac{dt}{t^{n+1+2\rho}}dy\bigg)^{1/2}dz\\
\leqslant\ & C|b(x)|\bigg(\int_{2|x|<|y|<3|x|}\frac{1}{|y|^{2(n-\rho)}(\log|y|)^{2\gamma}}\int_{4|x|\leqslant t}\frac{dt}{t^{n+1+2\rho}}dy\bigg)^{1/2}\\
:=\ & B_{17}|b(x)||x|^{-n}(\log|x|)^{-\gamma}.
\end{aligned}\tag{3.5}$$

设 $F = \big\{x \in G : |b(x)| > \frac{NB_{16}}{2B_{17}}(\log|x|)^\gamma \ \ 和\ \ |x| < N^{\frac{p'}{n}}\big\}$. 由估计 (3.3)–(3.5) 和性质 (2.3)–(2.4) 并且应用证明 (2.13) 和 (2.14) 的思想, 可知存在常数 B_{18} 和 B_{19} 使得

$$2^p \geqslant \int_{\mathbb{R}^n}|[b,S^\rho]\psi(x)|^p\,dx \geqslant \sigma(\Lambda)\frac{(\frac{B_{16}N}{2})^p}{np-n}\big(B_{18}^{n-np}(|F|+B_2^n)^{1-p} - N^{p'(1-p)}\big),$$

并且 $|F| + B_2^n \leqslant B_{19}N^{p'}$. 如果 $N \leqslant (2B_{19}^{-1}B_2^n)^{1/p'}$, 那么定理 2 得证. 否则如果 $N > (2B_{19}^{-1}B_2^n)^{1/p'}$, 我们得到

$$|F| \geqslant \frac{B_{19}}{2}N^{p'}.\tag{3.6}$$

设 $g(z) = \chi_{Q_0}(z)$. 对 $x \in F$, 有

$$\begin{aligned}
|[b,S^\rho]g(x)| \geqslant\ & \bigg(\int_{4|x|}^\infty\int_{\substack{|x-y|<t\\ 2|x|<|y|<3|x|}}\bigg|\int_{|y-z|<t}\frac{\Omega(y-z)}{|y-z|^{n-\rho}}(b(x)-b(z))g(z)\,dz\bigg|^2\frac{dydt}{t^{n+1+2\rho}}\bigg)^{1/2}\\
\geqslant\ & |b(x)|\bigg(\int_{4|x|}^\infty\int_{\substack{|x-y|<t\\ 2|x|<|y|<3|x|,\ y'\in\Lambda}}\bigg|\int_{|y-z|<t}\frac{\Omega(y-z)}{|y-z|^{n-\rho}}g(z)\,dz\bigg|^2\frac{dydt}{t^{n+1+2\rho}}\bigg)^{1/2}\\
&-\bigg(\int_{4|x|}^\infty\int_{\substack{|x-y|<t\\ 2|x|<|y|<3|x|}}\bigg|\int_{|y-z|<t}\frac{\Omega(y-z)}{|y-z|^{n-\rho}}b(z)g(z)\,dz\bigg|^2\frac{dydt}{t^{n+1+2\rho}}\bigg)^{1/2}
\end{aligned}$$

$$:= H_1 - H_2. \tag{3.7}$$

注意到如果 $z \in Q_0$, 那么 $|y| > 2|x| > 2B_2|z|$. 由引理 2.1 $|(y-z)' - y'| < B_1$. 应用 (2.9), 有 $\Omega((y-z)') \geqslant \frac{C_1}{(\log \frac{2}{B_1})^\gamma}$. 而且, 易知 $4|x| \geqslant |y-z| \geqslant \frac{3|x|}{2}$ 和 $4|x| > |x-y| \geqslant |x|$. 那么由 Hölder 不等式, 得

$$\begin{aligned}
H_1 &\geqslant |b(x)| \frac{C_1}{(\log \frac{2}{B_1})^\gamma} \bigg\{ \int_{4|x|}^\infty \int_{\substack{|x-y|<t \\ 2|x|<|y|<3|x|,\, y'\in\Lambda}} \bigg(\int_{Q_0} g(z) \\
&\quad \times |y-z|^{\rho-n} \chi_{\{|y-z|<t\}}\, dz \bigg)^2 \frac{dydt}{t^{n+1+2\rho}} \bigg\}^{1/2} \\
&\geqslant C|b(x)| \bigg(\int_{4|x|}^\infty \int_{\substack{|x-y|<t \\ 2|x|<|y|<3|x|,\, y'\in\Lambda}} \int_{Q_0} |y-z|^{\rho-n} \chi_{\{|y-z|<t\}}\, dz \frac{dydt}{t^{n+1+2\rho}} \bigg) \\
&\quad \times \bigg(\int_{4|x|}^\infty \int_{\substack{|x-y|<t \\ 2|x|<|y|<3|x|,\, y'\in\Lambda}} \frac{dydt}{t^{n+1+2\rho}} \bigg)^{-1/2} \\
&\geqslant C|x|^{2\rho-n} |b(x)| \int_{Q_0} \int_{2|x|<|y|<3|x|,\, y'\in\Lambda} \int_{\substack{4|x|<t,\, |x-y|<t \\ |y-z|<t}} \frac{dt}{t^{n+1+2\rho}}\, dydz \\
&\geqslant C|x|^{2\rho-n} |b(x)| \int_{Q_0} \int_{2|x|<|y|<3|x|,\, y'\in\Lambda} \int_{4|x|<t} \frac{dt}{t^{n+1+2\rho}}\, dydz \\
&:= B_{20} |b(x)| |x|^{-n}.
\end{aligned} \tag{3.8}$$

另一方面, 由 $\Omega \in L^\infty(S^{n-1})$, Minkowski 不等式和 $4|x| > |y-z| \geqslant |x|$, 我们有

$$\begin{aligned}
H_2 &\leqslant \bigg(\int_{4|x|}^\infty \int_{\substack{|x-y|<t \\ 2|x|<|y|<3|x|}} \bigg| \int_{|y-z|<t} \frac{\Omega(y-z)}{|y-z|^{n-\rho}} b(z) g(z)\, dz \bigg|^2 \frac{dydt}{t^{n+1+2\rho}} \bigg)^{1/2} \\
&\leqslant C \int_{Q_0} |b(z)| \bigg(\int_{2|x|<|y|<3|x|} \frac{1}{|y-z|^{2(n-\rho)}} \int_{4|x|\leqslant t} \frac{dt}{t^{n+1+2\rho}} dy \bigg)^{1/2} dz \\
&\leqslant C|x|^{-n} \int_{Q_0} |b(z)|\, dz \\
&:= B_{21} N |x|^{-n}.
\end{aligned} \tag{3.9}$$

那么由 (3.7)–(3.9), 对 $x \in F$ 有

$$|[b, S^\rho] g(x)| \geqslant B_{20} |b(x)| |x|^{-n} - B_{21} N |x|^{-n}. \tag{3.10}$$

如果取 $B_{22} \geqslant \|g\|_p$, 那么由 (3.10), 有

$$\begin{aligned}
B_{22} N &\geqslant \|g\|_p \bigg(\int_{|x| \leqslant N^{\frac{p'}{n}}} dx \bigg)^{1/p'} \\
&\geqslant \|[b, S^\rho] g\|_p \bigg(\int_F dx \bigg)^{1/p'} \\
&\geqslant \int_F |[b, S^\rho] g(x)|\, dx \\
&\geqslant B_{20} \int_F |b(x)| |x|^{-n}\, dx - B_{21} N \int_F |x|^{-n}\, dx \\
&\geqslant B_{20} \frac{N B_{16}}{2 B_{17}} \int_F (\log |x|)^\gamma |x|^{-n}\, dx - B_{21} N \int_F |x|^{-n}\, dx := A_1 - A_2.
\end{aligned} \tag{3.11}$$

利用相同的方法估计 (2.20) 中的 L_1 和 L_2, 可得 (3.11) 中 A_1 和 A_2 的估计. 因此, 存在 B_{23} 和 B_{24} 使得 $B_{22} \geqslant B_{23} (\log N)^\tau - B_{24} \log N$, 得到 (3.2). 因此完成了定理 2 的证明.

致谢 作者非常感谢审稿专家对本文的宝贵建议.

参考文献

1 Coifman R, Rocherberg R, Weiss G. Factorization theorems for Hardy spaces in several valuables. *Ann of Math*, **103**: 611–636 (1976)
2 Uchiyama A. On the compactness of operators of Hankel type. *Tôhoku Math*, **30**: 163–171 (1978)
3 Torchinsky A, Wang S. A note on the Marcinkiewicz integral. *Colloq Math*, **60–61**: 235–243 (1990)
4 Stein E. On the function of Littlewood-Paley, Lusin and Marcinkiewicz. *Trans Amer Math Soc*, **88**: 430–466 (1958)
5 Benedek A, Calderón A, Panzones R. Convolution operators on Banach space valued functions. *Proc Nat Acad Sci USA*, **48**: 356–365 (1962)
6 Hörmander L. Estimates for translation invariant operators in L^p spaces. *Acta Math*, **104**: 93–140 (1960)
7 Ding Y, Fan D, Pan Y. Weighted boundedness for a class of rough Marcinkiewicz integrals. *Indiana Univ Math J*, **48**: 1037–1055 (1999)
8 Ding Y, Fan D, Pan Y. L^p-boundedness of Marcinkiewicz integrals with Hardy space function kernel. *Acta Math Sin (Engl Ser)*, **16**: 593–600 (2000)
9 AL-Salman A, AL-Qassem H, Cheng L, et al. L^p bounds for the function of Marcinkiewicz. *Math Res Lett*, **9**: 697–700 (2002)
10 Ding Y, Lu S, Yabuta K. On commutators of Marcinkiewicz integrals with rough kernel. *J Math Anal Appl*, **275**: 60–68 (2002)
11 Stein E. The development of square functions in the work of A. Zygmund. *Bull Amer Math Soc (NS)*, **7**: 359–376 (1982)
12 Kenig C. Harmonic Analysis Techniques for Second Order Elliptic Boundary Value Problems. CBMS, Vol. 83. Providence: Amer Math Soc, 1994
13 Chang S, Wilson J, Wolff T. Some weighted norm inequalities concerning the Schödinger operators. *Comment Math Helv*, **60**: 217–246 (1985)
14 Sakamoto M, Yabuta K. Boundedness of Marcinkiewicz functions. *Studia Math*, **135**: 103–142 (1999)
15 Ding Y, Xue Q. Endpoint estimates for commutators of a class of Littlewood-Paley operators. *Hokkaido Math J*, **36**: 245–282 (2007)
16 Stein E. Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1970
17 Ding Y. A note on end properties of Marcinkiewicz integral. *J Korean Math Soc*, **42**: 1087–1100 (2005)