关于 Hilbert 空间量子效应下确界的研究

陈峥立,曹怀信
CHEN Zheng-li,CAO Huai-xin

陕西师范大学 数学与信息科学学院,西安 710062
College of Mathematics and Information Science,Shaanxi Normal University,Xi'an 710062,China
E-mail:czl@snnu.edu.cn

CHEN Zheng-li,CAO Huai-xin.Researches on infimum of Hilbert space quantum effect.Computer Engineering and Applications,2009,45(28):10-12.

Abstract: Infimum of quantum effects is an important question in quantum information and quantum computation.For this question,it is proved to the Kadison's conclusion by using a simple method,if $A,B\in \mathrm{Her}(B(H))$,the infimum $A\wedge B$ exists if and only if A and B are comparable.Secondly,it is discussed to the relationship between the existence of $A\wedge B$ in $B(H)^+$ and the existence of $A\wedge B$ in $\varepsilon(H)$.Finally,a counter-example is given to show that the existence of $A\wedge B$ and $A^2\wedge B^2$ in $\varepsilon(H)$,but $A^2\wedge B^2\neq(A\wedge B)^2$。

Key words: infimum;quantum effect;positive operator

摘　要:量子的下确界问题是量子计算和量子信息中的一个重要问题,对于这一问题,首先运用一种简单的方法证明了 Kadison 的一个结果:设 $A,B\in \mathrm{Her}(B(H))$,则 $A\wedge B$ 在 $\mathrm{Her}(B(H))$存在当且仅当 A 和 B 可比较;然后讨论了 $B(H)^+$和 Hilbert 空间效应代数 $\varepsilon(H)$中的下确界问题。最后,通过一个例子给出:对于两个量子效应 A 和 B,虽然 $A\wedge B$ 和 $A^2\wedge B^2$ 在 $\varepsilon(H)$中存在,但是 $A^2\wedge B^2\neq(A\wedge B)^2$。

关键词:下确界;量子效应;正算子
DOI:10.3778/j.issn.1002-8331.2009.28.003 **文章编号**:1002-8331(2009)28-0010-03 **文献标识码**:A **中图分类号**:O177.91

1 引言和定义

量子计算机是一类遵循量子力学规律进行高速数学和逻辑运算、存储及处理量子信息的物理装置。量子计算机处理和计算的是量子信息,运行的是量子算法。量子的下确界问题是量子计算和量子信息中的一个重要问题。对于物理系统来说量子效应被描述为在复 Hilbert 空间 H 上包含单位算子 I 的正算子之集 $\varepsilon(H)$。设 H 是一个 Hilbert 空间,$B(H)$是 H 上的所有有界线性算子之集。记[1-9]:

$B(H)^+=\{A\in B(H):0\leqslant A\}$

$\varepsilon(H)=\{A\in B(H):0\leqslant A\leqslant I\}$

$\mathrm{Her}(B(H))=\{A\in B(H):A^*=A\}$

对于 $A,B\in B(H)^+$,定义下确界 $A\wedge B$,等价于最大的下界,如果它们存在,则$(B(H)^+,\geqslant)$是一个偏序集。更准确来说,$A\wedge B$ 是 $B(H)^+$中的算子,而且唯一。由下确界的定义可知:$A\wedge B\leqslant A$,$A\wedge B\leqslant B$,而且算子 $D\in B^+(H)$满足 $D\leqslant A$ 且 $D\leqslant B$ 当且仅当 $D\leqslant A\wedge B$。对于两个正算子 A 与 B,如果 $A\geqslant B$ 或 $A\leqslant B$ 存在,则称 A 与 B 可比较。众所周知,一般情况两个效应 A 和 B 的下确界不一定存在。但是,如果 A 与 B 可比较,则$A\wedge B$ 总存在。对于两个量子效应 $A,B\in\varepsilon(H)$,在什么条件下它们的下确界存在。这个问题被 T.Ando[1]、A.Gheondea[4]、S.Gudder[5-6]、R.Kadison[7]和M.Moreland[8]所研究。例如,T.Moreland 和 S.Gudder 在文[8]已证明:如果 $A,B\in\varepsilon(\mathbb{C}^n)$是单的正定矩阵,则下确界 $A\wedge B$ 存在当且仅当 A 与 B 可比较。如果 $A\in\varepsilon(H)$,P 是一个正交投影,则 $P\wedge A$ 存在。

设 $A\in B(H)$,下面用 $N(A)$、$R(A)$和 $\sigma(A)$分别表示 A 的核空间、值域和谱。当 $N(A)=\{0\}$时,称 A 是一个单射。I_K 表示 Hilbert 空间 K 上的单位算子,有时简记为 I。如果对于任一 $x\in H$,都有$(Ax,x)\geqslant 0$,则称 A 是一个正算子。如果 $\|A\|\leqslant 1$,则称算子 A 是压缩的。对于自伴算子 A 和 B,若对于任一 $x\in H$,有$(Ax,x)\leqslant(Bx,x)$,则称 $A\leqslant B$。若自伴算子 $A\in B(H)$,定义$|A|=(A^2)^{\frac{1}{2}}$,其中$(A^2)^{\frac{1}{2}}$是 A^2唯一的平方根。

首先运用一种简单的方法证明 Kadison 的一个结果:设 $A,B\in\mathrm{Her}(B(H))$,则 $A\wedge B$ 在 $\mathrm{Her}(B(H))$存在当且仅当 A 和 B 可比较;然后讨论 $B(H)^+$和 Hilbert 空间效应代数 $\varepsilon(H)$中的下确界问题。最后,通过一个例子给出:对于两个量子效应 A和 B,虽然 $A\wedge B$ 和 $A^2\wedge B^2$ 在 $\varepsilon(H)$中存在,但是 $A^2\wedge B^2\neq(A\wedge B)^2$。其他相关概念请参考文献[9-11]。

基金项目:国家自然科学基金(the National Natural Science Foundation of China under Grant No.10571113,No.10871224,No.10826081)。
作者简介:陈峥立(1973-),男,博士,讲师,研究方向为算子代数与量子计算;曹怀信(1958-),男,博士,教授,主要研究方向为算子论与算子代数、小波分析及量子计算。
收稿日期:2009-06-22 **修回日期**:2009-08-03

定义 1[4] 设 E 是一个集合，若 E 有两个特殊元素 0，1（$0\neq 1$），$\oplus$是 E 上的部分二元运算满足如下条件：

（**E1**）当 $a\oplus b$ 有定义时，$b\oplus a$也有定义且 $a\oplus b=b\oplus a$；（交换律）

（**E2**）当 $b\oplus c$ 与 $a\oplus(b\oplus c)$都有定义时，$a\oplus b$与$(a\oplus b)\oplus c$都有定义且$(a\oplus b)\oplus c=a\oplus(b\oplus c)$；（结合律）

（**E3**）对于任意的 $a\in E$，存在唯一的 $b\in E$ 使得 $a\oplus b$ 有定义且 $a\oplus b=b\oplus a=1$；（正交补律）

（**E4**）当 $1\oplus a$ 有定义时，$a=0$（0-1 律），则称$(E,0,1,\oplus)$为效应代数。

注 1 设 E 是一个效应代数，$a,b\in E$。

（1）若 $a\oplus b$ 有定义，则称 a 与 b 正交，记为 $a\perp b$；

（2）若存在 $c\in E$，使得$a\oplus c=b$，则称 a 小于等于 b，记为 $a\leqslant b$。易证$(E,\leqslant)$是一个偏序集；

（3）若对于任意 $a,b\in E$，$a\wedge b$ 或 $a\vee b$ 关于（2）中定义的偏序存在，则称效应代数$(E,\oplus,0,1)$为格效应代数；

（4）对于任意 $a\in E$，存在唯一的 $b\in E$ 使得 $a\oplus b$ 有定义且 $a\oplus b=b\oplus a=1$，称 b 为 a 的正交补，记作 $\acute{a}$。易证 $a\leqslant b$ 当且仅当 $a\leqslant\acute{b}$。

例 1 设 $E=[0,1]$，对于 $a,b\in[0,1]$，约定 $a\perp b$ 当且仅当 $a+b=1$，且令 $a\oplus b=a+b$，则易知$(E,\oplus,0,1)$是一个效应代数。因为对于任意的 $x,y\in E$，$x\wedge y=\min\{x,y\}$存在。所以 E 是一个格效应代数。

例 2[5] 设 $X\neq\varnothing$ 且 $F\subseteq[0,1]^X$。F 称为 X 上的一个模糊集系统如果下面条件满足：

（1）$0,1\in F$；

（2）若 $f\in F$，则 $1-f\in F$；

（3）若 $f,g\in F$ 且 $f+g\leqslant 1$ 则 $f+g\in F$；

（4）若 $f,g\in F$ 则 $fg\in F$。定义 $f\perp g$ 当且仅当 $f+g\leqslant 1$，并且令 $f\oplus g=f+g$。则易知$(F,0,1,\oplus)$是一个效应代数。其中精确元是 F 中的特征函数。

例 3 设 H 是一个 Hilbert 空间。$\varepsilon(H)=\{T|T\in B(H),0\leqslant A\leqslant 1\}$，对任意的 $A,B\in\varepsilon(H)$，定义 $A\perp B$ 当且仅当 $A+B\in\varepsilon(H)$，并且令 $A\oplus B=A+B$，则$(\varepsilon(H),0,1,\oplus)$是一个效应代数。称 $\varepsilon(H)$ 为 Hilbert 空间效应代数，$\varepsilon(H)$中的元素称为量子效应。$\varepsilon(H)$ 在量子力学和量子测度理论的研究中起着重要作用，$\varepsilon(H)$ 是一个全续集当且仅当 $\dim(H)=1$。在 $\varepsilon(H)$中，下确界是一个重要问题，但是两个量子效应并不是都可以比较的。例如，取

$$A=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ 0 & \frac{2}{3}\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}\frac{2}{3} & 0\\ 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

则 A 和 B 是不可比较。

2　主要结果

若 $A,B\in \mathrm{Her}(B(H))$可比较，则 $A\wedge B$ 存在，而且是其中较小的一个。Kadison 曾证明了对于任意的 $A,B\in\mathrm{Her}(B(H))$，$A\wedge B$ 在 $\mathrm{Her}(B(H))$中存在当且仅当 A 和 B 可比较。下面给出一个新的证明方法。

引理 1[9] 设 $A\in B(H)^+$是单射，而且 $B\in B(H)^+$可逆。则 $A\wedge B$ 存在当且仅当 A 和 B 可比较。

引理 2 若 $A,B\in B(H)^+$可逆，则 $A\wedge B$ 存在当且仅当 A 和 B 可比较。

证明 由引理 1 可知。

定理 1[7] 设 $A,B\in\mathrm{Her}(B(H))$，则 $A\wedge B$ 在 $\mathrm{Her}(B(H))$存在当且仅当 A 和 B 可比较。

证明 充分性。若 A 和 B 可比较，则 $A\wedge B$ 在 $\mathrm{Her}(B(H))$一定存在。

必要性。设 $A\wedge B=C\in\mathrm{Her}(B(H))$，取 $\varepsilon>0$，$n\in\mathbb{N}$，满足：

$$0\leqslant A_\varepsilon=\frac{A+\varepsilon I}{n}\leqslant I,0\leqslant B_\varepsilon=\frac{B+\varepsilon I}{n}\leqslant I,0\leqslant C_\varepsilon=\frac{C+\varepsilon I}{n}\leqslant I$$

其中 A_ε、B_ε 可逆。则

$$A_\varepsilon,B_\varepsilon,C_\varepsilon\in\mathrm{Her}(B(H)),C_\varepsilon\leqslant A_\varepsilon,C_\varepsilon\leqslant B_\varepsilon$$

设 $D\in E(H)$，而且 $D\leqslant A_\varepsilon$，$D\leqslant B_\varepsilon$。则 $D-\varepsilon I\in\mathrm{Her}(B(H))$，而且

$$nD-\varepsilon I\leqslant A,nD-\varepsilon I\leqslant B$$

从而 $nD-\varepsilon I\leqslant C$，$D\leqslant\frac{C+\varepsilon I}{n}=C_\varepsilon$。因此

$$C_\varepsilon=A_\varepsilon\wedge B_\varepsilon$$

由引理 2 可知，A_ε 和 B_ε 可比较。因此 A 和 B 可比较。

注 2 设 $A,B\in\varepsilon(H)$，虽然 $A\wedge B$ 在 $\varepsilon(H)$中存在，但是 $A\wedge B$ 在 $\mathrm{Her}(B(H))$不一定存在。例如，$P_1,P_2\in P(H)$，$P_1\wedge P_2$ 在 $\varepsilon(H)$中存在，但是一般情况 $P_1\wedge P_2$ 在 $\mathrm{Her}(B(H))$是不存在的。

定理 2 设 $A,B\in B(H)^+$，则 $A\wedge B$ 在 $\varepsilon(H)$存在当且仅当 $A\wedge B$ 在 $B(H)^+$中存在。

证明 必要性是显然的。下面只证明充分性。设 $A\wedge B$ 在 $B(H)^+$中存在，取 $n\in\mathbb{N}$，满足：

$$0\leqslant\frac{A}{n}\leqslant I,0\leqslant\frac{B}{n}\leqslant I$$

而且$\frac{A}{n}$和$\frac{B}{n}$可比较，则$\frac{A}{n}$，$\frac{B}{n}\in\varepsilon(H)$，而且$\frac{A}{n}\wedge\frac{B}{n}$在 $\varepsilon(H)$中存在。

定理 3 设 $A_k\in\mathrm{Her}(B(H))(k=1,2,\cdots,n)$，满足对于任意的 A_i 和 A_j 可比较，则 $E_n=\{A_1,A_2,\cdots,A_n\}$是一个全序集。

证明 当 $n=2$ 时，E_2 是一个全序集。设 E_k 是一个全序集，而且 $E_{k+1}=E_k\cup\{A_{k+1}\}$，不妨设

$$A_1\leqslant A_2\leqslant\cdots\leqslant A_k$$

（1）当 $A_{k+1}\leqslant A_1$ 时，有

$$A_{k+1}\leqslant A_1\leqslant A_2\leqslant\cdots\leqslant A_k$$

（2）当 $A_{k+1}\geqslant A_k$ 时，有

$$A_{k+1}\leqslant A_1\leqslant A_2\leqslant\cdots\leqslant A_k\leqslant A_{k+1}$$

（3）当存在 $i\in\{1,2,\cdots,k-1\}$满足 $A_i\leqslant A_{k+1}\leqslant A_{i+1}$ 时，有

$$A_1\leqslant A_2\leqslant\cdots\leqslant A_i\leqslant A_{k+1}\leqslant A_{i+1}\leqslant\cdots\leqslant A_k$$

因此 E_n 是一个全序集。

定理 4 若$\{A_i\}_{i=1}^n\subset\mathrm{Her}(B(H))$满足 $A_i\wedge A_j$ 在 $\mathrm{Her}(B(H))$ $(i,j=1,2,\cdots,n)$中存在，则 $\wedge_i^n A_i$ 在 $\mathrm{Her}(B(H))$中存在。

证明 因为 $A_i\wedge A_j$ 在 $\mathrm{Her}(B(H))(i,j=1,2,\cdots,n)$中存在，由定理 3 可知，对于任意的 $i,j\in\{1,2,\cdots,n\}$，A_i 和 A_j 是可比较，则$\{A_1,A_2,\cdots,A_n\}$是一个全序集，因此$\wedge_i^n A_i$ 在 $\mathrm{Her}(B(H))$中一定存在。

定理 5 设 $A_k\in\varepsilon(H)(k=1,2,\cdots,n)$可逆，则 $A_i\wedge A_j(i,j=1,2,\cdots,n)$在 $\varepsilon(H)$中存在当且仅当$\wedge_i^n A_i$ 在 $E(H)$存在。

证明 由引理2和定理3可知。

推论 1 设 $A_k \in B(H)^+(k=1,2,\cdots,n)$ 可逆，则 $A_i \wedge A_j(i,j=1,2,\cdots,n)$ 在 $B(H)^+$ 中存在当且仅当 $\wedge_i^n A_i$ 在 $B(H)^+$ 中存在。

证明 取 $n \in \mathbb{N}$，使得

$$0 \leqslant \frac{A_i}{n} \leqslant 1,(i,j=1,2,\cdots,n)$$

由定理5可知，$A_i \wedge A_j(i,j=1,2,\cdots,n)$ 在 $B(H)^+$ 中存在当且仅当 $\wedge_i^n A_i$ 在 $B(H)^+$ 存在。

下面利用算子分块的方法说明 $A^2 \wedge B^2=(A \wedge B)^2$ 不一定成立。

例 4 设 A 关于空间分解 $H=R(P)\oplus N(P)$ 的矩阵表示如下：

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & A_1^{\frac{1}{2}}\Gamma A_2^{\frac{1}{2}} \\ A_2^{\frac{1}{2}}\Gamma^* A_1^{\frac{1}{2}} & A_2 \end{pmatrix}$$

其中

$$A_1 \in \varepsilon(R(P)),A_2 \in \varepsilon(N(P))$$

$$\Gamma \in B(N(P),R(P)),\ \|\Gamma\| \leqslant 1$$

$$N(A_2) \subset N(\Gamma),N(A_1) \subset N(\Gamma^*)$$

因此，关于空间分解 $H=R(P)\oplus N(P)$ 有

$$A \wedge P=\begin{pmatrix} A_1^{\frac{1}{2}}(1-\Gamma\Gamma^*)A_2^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

设 $A=\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$，$P=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，则 $A \wedge P=\begin{pmatrix} \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$。因为

$$A^2=\begin{pmatrix} \frac{5}{4} & 1 \\ 1 & \frac{5}{4} \end{pmatrix},P^2=P$$

$$A^2 \wedge P^2=\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{2}\left(1-\frac{16}{25}\right)\frac{\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{9}{20} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

从而 $A^2 \wedge P<(A \wedge P)^2$。因此虽然 $A \wedge B$ 和 $A^2 \wedge B^2$ 都存在，但是

$$A^2 \wedge B^2 \neq (A \wedge B)^2$$

参考文献：

[1] Ando T.Problem of infimum in the positive cone，analytic and geometric inequalities and applications[J].Math Appl，1999（478）：1–12.

[2] Du H K，Deng C Y，Li Q H.On the infimum problem of Hilbert space effects[J].Science in China，2006（51）：320–332.

[3] Douglas R G.On majorization，factorization and range inclusion of operators on Hilbert space [J].Proc Amer Math Soc，1966（17）：413–415.

[4] Gheondea A，Gudder S，Jonas P.On the infimum of quantum effects[J].J Math Phys，2005（46）：1–11.

[5] Gudder S.Examples，problems and results in effect algebras[J].Inter J Theo Phy，1996（35）：2365–2376.

[6] Gudder S.Lattice properties of quantum effects[J].J Math Phys，1996（37）：2637–2642.

[7] Kadison R.Order properties of bounded self–adjoint operators[J].Proc Amer Math Soc，1951（34）：505–510.

[8] Moreland T，Gudder S.Infima of Hilbert space effects[J].Linear Algebra Appl，1999（286）：1–17.

[9] Li Y，Du H K.A note on the infimum problem of Hilbert space effects[J].J Math Phys，2006（47）.

[10] Busch P，Lahti P J，Middlestaedt P.The quantum theory of measurements[M].Berlin：Springer，1991.

[11] Kopka F.D–Posets and fuzzy sets[J].Tatra Mountains Publ，1992（1）：83–87.

（上接9页）

系、装配关系、通信链路、交互信息模版）进行抽象的类代码模版，代码模版主要包含了映射类型、属性、交互接口以及模型实例之间关联关系的代码，类模版均从HRFW核心类库扩展得到；（2）为各仿真成员生成满足SRML规范的模型描述文件（SOM），描述模型信息的实例化情况以及成员的外部接口；（3）生成描述系统接口关系的FED文件（FOM）。

编队作战指挥流程建模工具描述的模型信息包括：（1）指挥系统分解得到的作战指挥台位信息；（2）台位之间的接口信息。工具设计开发的编队作战指挥系统运行于NAVYCORBA中间件环境，工具的模型映射模块实现以下功能：（1）为台位节点生成代码工程；（2）为台位生成通信接口包，通信接口包与NAVYCORBA中间件交互，实现与外部的互联及互操作。

5 结束语

作为模型映射的一种典型应用，研究的代码生成、映射与逆向技术为MDD体系结构中模型的自动转换提供了强有力的支持。应用结果表明，技术方案具有良好的适应性和可扩展性：（1）对于不同的应用环境，模型关注点、中间件接口规范、编程语言种类可能存在差异，该文的技术方案尽可能地无差别对待各种环境，当环境变化时，软件实现中仅元数据环境包中的模型表示模块需要进行定制。（2）各个模块之间的接口是规范和标准的，因此模型表示模块的定制可在一种插件集成的模式下实现。

此外，该文基于模版演化的代码生成机制本质上是一种由模版产生变体的有效方法，其思想可推广应用于文本、数据的演化，如根据模型信息以及文档模版格式化输出系统设计文档。

参考文献：

[1] Miller J，Nu J，Ji M.MDA guide version 1.0.1[EB/OL].（2003–06–12）.http://www.omg.org./docs/omg/03–06–01.pdf.

[2] Poole J.Model–driven architecture：Vision，standards and emerging technologies[EB/OL].（2002–09）.http://www.omg.org/mda/mda_files/Model–driven_Architecture.pdf.

[3] 林炜，夏宽理.基于MDA的模型转换方法研究[J].计算机工程与应用，2005，41（2）：80–83.

[4] 陈翔，王学斌，吴泉源.代码生成技术在MDA中的实现[J].计算机应用研究，2006，23（1）：147–150.

[5] Wen Wei，He You，Huang Xiao–dong，et al.The design & simulation platform for the C2 system of Fleet[C]//Proceedings of the International Conference on Information Computing and Automation，Toh Tuck Link.Sinapore：World Scientific，2007：1503–1505.

[6] 黄晓冬，李伯虎，柴旭东，等.基于反射的分布交互仿真软件框架[J].北京航空航天大学学报，2007，33（8）：994–999.