非线性互补问题的粒子群算法

张建科
ZHANG Jian-ke

西安邮电学院 应用数理系,西安 710121
Department of Mathematics and Physics,Xi'an Institute of Posts and Telecommunications,Xi'an 710121,China
E-mail:jiankezh@163.com

ZHANG Jian-ke.Particle swarm optimization for nonlinear complementarity problems.Computer Engineering and Applications,2009,45(27):43-45.

Abstract: According to a class of nonlinear complementarity problems,a new algorithm is proposed;this algorithm combines Particle Swarm Optimization with maximum entropy function method.Firstly,the maximum entropy function is used to transform the nonlinear complementarity problems into unconstrained optimization problems,this function is used as Particle Swarm Optimization's fitness function;Then Particle Swarm Optimization is applied to solving the unconstrained optimization problems.The numerical results show that the algorithm converges faster,numerical stability,and it is an effective algorithm for complementarity minimax problems.

Key words: Particle Swarm Optimization;evolutionary computation;nonlinear complementarity Problems;maximum entropy method

摘　要:针对非线性互补问题求解的困难,利用粒子群算法并结合极大熵函数法给出了该类问题的一种新的有效算法。该算法首先利用极大熵函数将非线性互补问题转化为一个无约束最优化问题,将该函数作为粒子群算法的适应值函数;然后应用粒子群算法来优化该问题。数值结果表明,该算法收敛快、数值稳定性较好,是求解非线性互补问题的一种有效算法。

关键词:粒子群算法;进化算法;非线性互补问题;极大熵函数
DOI:10.3778/j.issn.1002-8331.2009.27.014　　**文章编号:**1002-8331(2009)27-0043-03　　**文献标识码:**A　　**中图分类号:**TP18

非线性互补问题是一类经常出现在数学规划、对策论、数理经济、非线性力学以及工程中的一类非光滑优化问题。由于各种工程以及经济等实际问题中大量存在这样的问题，自 20 世纪 60 年代以来，关于互补问题的研究已经成为数学规划研究中一个热点分支。解决非线性互补问题的算法有:Lemke 算法、内点算法、投影法非光滑牛顿法、光滑牛顿算法等。

但这些算法大都基于传统的梯度类算法[1-4],并依赖于初始点的选取,而在一些实际问题中如何选取合适的初始点本身是一个比较困难的问题。

近年来,一些不依赖于初始点和梯度信息的仿生类智能算法得到了迅速发展。粒子群算法[5-7]就是其中比较成功的一种群体智能算法。粒子群算法(Particle Swarm Optimization,PSO)是 Kennedy 和 Eberhart 于 1995 年提出的一种群体智能算法。因其易理解,易实现,很多情况下比遗传算法更有效,近年来受到学术界的广泛关注,并提出了很多改进算法。现在,作为一种新的全局优化算法,PSO 算法在很多问题中已得到成功应用,如:函数优化、系统辨识、神经网络训练等领域。

然而利用粒子群算法求解非线性互补问题还比较少。该文利用粒子群算法并结合极大熵函数法[5-6]给出了该类问题的一种新的有效算法。该算法首先利用极大熵函数将非线性互补问题转化为一个无约束最优化问题,将该函数作为粒子群算法的适应值函数;然后用粒子群算法来优化此问题。对新算法进行了测试,数值结果表明,该算法收敛快、数值稳定性较好,是求解非线性互补问题的一种有效算法。

1　非线性互补问题的熵函数逼近法

设 $F:R^n\to R^n$,非线性互补问题(记为:NCP(F))是指:求 $x\in R^n$,使得

$$x\geqslant 0,F(x)\geqslant 0,x^{\mathrm{T}}F(x)=0$$

当$(x)=\boldsymbol{M}x+q$(其中 $\boldsymbol{M}$ 为 $n\times n$ 矩阵,不必对称,$q\in R^n$ 为常向量)时,NCP 退化为线性互补问题,记为 LCP($q,\boldsymbol{M}$)。比非线性互补问题更为广泛的一类问题叫变分不等式问题(VIP(S,F)),即求一个向量 $x^*\in S$ 使得

$$\langle F(x^*),y-x^*\rangle\geqslant 0,\forall y\in S$$

其中 $F:R^n\to R^n$ 的一个映射,$S\subset R^n$ 是一个非空闭凸集。当 S 为 R^n 的非负卦限时,VIP(S,F)和 NCP(F)是完全等价的。

定义 1[1]　函数 $\varphi(a,b):R^2\to R$ 称为是 NCP 函数,如果

基金项目:陕西省教育厅自然科学研究项目(No.07JK376);陕西省自然科学研究项目(No.2007A21)。
作者简介:张建科(1978-),男,硕士,研究方向:群体智能优化算法。
收稿日期:2008-10-30　　**修回日期:**2009-01-05

$\varphi(a,b)=0\Leftrightarrow a\geqslant 0,b\geqslant 0,ab=0$。

下面是一些 NCP 函数：

(1)$\varphi(a,b)=\sqrt{a^2+b^2}-a-b$

(2)$\varphi(a,b)=\lambda(\sqrt{a^2+b^2}-a-b)+(1-\lambda)a_+b_+;\lambda\in(0,1)$

(3)$\varphi(a,b)=-ab+\frac{1}{2}\min^2\{0,a+b\}$

其中,(1)称为 Fisher-Burmeister 函数;(2)称为惩罚的 Fisher-Burmeister 函数;(3)是一个可微的 NCP 函数。

显然,互补问题的解等价与由下面 NCP 函数构成的方程组的解:

$$\begin{bmatrix}\varphi(x_1,F_1(x))\\ \vdots\\ \varphi(x_n,F_n(x))\end{bmatrix}=0 \tag{1}$$

式(1)可以转化为如下的优化问题:

$$\min_x \max_{1\leqslant i\leqslant n}\{|\varphi(x_i,F_i(x))|\} \tag{2}$$

其中各个分量 $\varphi(x_i,F_i(x))$是变量 $x\in\Omega\subset R^n$ 的光滑函数,但是该问题是一个较为复杂的不可微优化问题。

利用极大熵函数法可以将约束和无约束的非线性极小极大问题转化为光滑的优化问题。

定义 2[5-6] 称以下函数

$$G_p(x)=\frac{1}{p}\ln\left\{\sum_{i=1}^{n}\exp[p|\varphi(x_i,F_i(x))|]\right\}$$

为式(1)在 $x\in\Omega\subset R^n$ 上的极大熵函数。

实际上定义两种的极大熵函数等价与以下函数:

$$G_p(x)=\frac{1}{p}\ln\left\{\sum_{i=1}^{n}\exp[p\varphi(x_i,F_i(x))]+\exp[-p\varphi(x_i,F_i(x))]\right\}$$

定理 1[5-6] 对任何 $x\in\Omega\subset R^n$,函数 $G_p(x)$都随参数 p 的增大单调减少,且当 $p\to\infty$ 时以$\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{|\varphi(x_i,F_i(x))|\}$为极限,即:

$$G_s(x)\leqslant G_r(x)\quad s\leqslant r,$$

$$\lim_{p\to\infty}G_p(x)=\max_{1\leqslant i\leqslant n}\{|\varphi(x_i,F_i(x))|\}$$

上述定理表明只要取足够大的 p 就可以用极大熵函数来替代目标函数$\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{|\varphi(x_i,F_i(x))|\}$,从而将原来的非线性极小极大问题转化为一个无约束优化问题。虽然 p 取有限值时仅能得到原问题的近似解,但只要 p 取得适当大数也能保证很高的精度。

对于有约束的问题,可以利用罚函数法将其转化为无约束的问题。

2 PSO 算法基本思想

粒子群算法源于对鸟群觅食行为的研究。研究者发现鸟群在飞行中经常会突然改变方向、散开、聚集,其行为不可预测,但其整体总保持一致性,个体和个体间也保持着最适宜的距离。通过对类似生物群体行为的研究,发现生物群体中存在一种社会信息共享机制,它为群体的进化提供了一种优势,这也是粒子群算法形成的基础。

设在一个 S 维的目标搜索空间中,有 m 个粒子组成一个群体,其中第 i 个粒子表示为一个 S 维的向量 $\boldsymbol{x}_i=(x_{i1},x_{i2},\cdots,x_{iS})$,$i=1,2,\cdots,m$,每个粒子的位置就是一个潜在的解。将 $\boldsymbol{x}_i$ 代入一个目标函数就可以算出其适应值,根据适应值的大小衡量解的优劣。第 i 个粒子的飞翔的速度是 S 维向量,记为 $\boldsymbol{V}=(V_{i1},V_{i2},\cdots,V_{iS})$。记第 i 个粒子迄今为止搜索到的最优位置为 $\boldsymbol{P}_{is}=(P_{i1},P_{i2},\cdots,P_{iS})$,整个粒子群迄今为止搜索到的最优位置为 $\boldsymbol{P}_{gs}=(P_{g1},P_{g2},\cdots,P_{gS})$。

Kennedy 和 Eberhart 用下列公式对粒子进行操作:

$$\nu_{is}^{t+1}=\nu_{is}^{t}+c_1r_1(p_{is}-x_{is}^{t})+c_2r_2(p_{gs}-x_{is}^{t}) \tag{3}$$

$$x_{is}^{t+1}=x_{is}^{t}+\nu_{is}^{t+1} \tag{4}$$

其中,$i=[1,m]$,$s=[1,S]$; 学习因子 c_1 和 c_2 是非负常数;r_1 和 r_2 为相互独立的伪随机数,服从[0,1]上的均匀分布。$v_{is}\in[-v_{\max},v_{\max}]$,$v_{\max}$为常数,由用户设定。

文[9]对式(4)作了改进:

$$x_{is}^{t+1}=x_{is}^{t}+(rand[\,]+k)\nu_{is}^{t+1}+10^{-6}rand[\,] \tag{5}$$

终止条件根据具体问题取最大迭代次数或粒子群搜索到的最优位置满足的预定最小适应阈值。

3 非线性互补问题的粒子群算法

以下结合极大熵函数法给出一种非线性互补问题的粒子群算法。粒子群算法不用给定初始点,对目标函数的可微性也没有要求。

3.1 非线性互补问题的粒子群算法步骤

步骤 1 初始化一个规模为 N 的粒子群, 设定每一个粒子的初始位置和速度。

步骤 2 计算每个粒子的适应值, 适应值函数为极大熵函数(首先利用 NCP 函数将非线性互补问题转化为方程组问题,再利用极大熵函数法将方程组转化为无约束优化问题,由定义 2 给出;对约束问题可以利用罚函数法将其转化为无约束的问题)。

步骤 3 对每个粒子将其适应值和其经历过的最好位置 P_{is} 的适应值进行比较,若较好,则将其作为当前的最好位置。

步骤 4 对每个粒子将其适应值和全局经历过的最好位置 P_{gs} 的适应值进行比较,若较好,则将其作为当前的全局最好位置。

步骤 5 根据式(4),(5)分别对粒子的速度和位置进行进化。

步骤 6 如果满足终止条件,则输出解;否则返回步骤 2。

3.2 必要的说明

(1)由于 p 要求充分的大,在计算中很容易导致 $\exp[p|\varphi(x_i,F_i(x))|]$发生数据溢出,在计算中作如下处理。

设 $M>0$ 使得 $\exp(M)$小于计算机可存储的最大整数,而 $\exp(M+1)$发生上溢,记

$$\varphi_K(x)=\max_{1\leqslant i\leqslant n}\{|\varphi(x_i,F_i(x))|\}$$

①若 $p|\varphi_K(x)|\leqslant M$ 则取适应值函数为:

$$G_p(x)=\frac{1}{p}\ln\left\{\sum_{i=1}^{m}\exp[p|\varphi(x_i,F_i(x))|]\right\}$$

②若 $p|\varphi_K(x)|>M$ 则取适应值函数为:

$$G_p(x)=\varphi_K(x)$$

(2)或者是做以下处理,可以防止数据溢出。

$$F_p(x)=\frac{1}{p}\sum_{i=1}^{m}\ln[\exp(pf_i(x))+\exp(-pf_i(x))]=$$

表 1　算法运行 20 次的结果(其中搜索成功 16 次)

No.	迭代次数	X_1	X_2	X_3	X_4	搜到的最优值
1	4 450	1.224 718 015	0.000 006 790	0.000 054 992	0.500 045 426	0.000 000 009
2	3 574	1.224 717 963	0.000 023 463	0.000 007 060	0.500 049 012	0.000 000 009
3	5 000	1.225 262 297	0.002 684 081	0.028 052 842	0.504 458 654	0.000 523 477
4	5 000	1.224 734 954	0.000 006 581	0.000 147 044	0.499 975 608	0.000 000 011
5	5 000	1.232 680 714	0.000 079 050	0.089 067 552	0.476 712 152	0.012 856 981
6	3 616	1.224 734 756	0.000 001 088	0.000 105 968	0.499 996 604	0.000 000 009
7	3 718	1.224 733 817	0.000 001 089	0.000 074 058	0.500 011 470	0.000 000 008
8	5 000	1.001 563 920	0.000 000 433	2.990 305 364	0.001 111 561	0.000 028 867
9	3 232	1.224 736 000	0.000 002 598	0.000 134 718	0.499 979 709	0.000 000 009
10	3 642	1.224 723 738	0.000 022 566	0.000 007 887	0.500 033 049	0.000 000 008
11	3 810	1.224 742 519	0.000 012 080	0.000 018 770	0.500 004 143	0.000 000 005
12	3 624	1.224 731 201	0.000 002 219	0.000 087 514	0.500 007 926	0.000 000 008
13	3 702	1.224 712 691	0.000 002 631	0.000 013 126	0.500 078 052	0.000 000 009
14	3 306	1.224 721 225	0.000 001 854	0.000 031 832	0.500 056 322	0.000 000 009
15	3 651	1.224 729 919	0.000 016 234	0.000 088 121	0.499 998 708	0.000 000 008
16	5 000	1.224 609 013	0.000 010 864	0.000 396 714	0.500 197 056	0.000 000 529

$$\sum_{i=1}^{m}\text{In}[\exp(pf_i(x))+\exp(-pf_i(x))]^{\frac{1}{p}}=$$

$$\sum_{i=1}^{m}\text{In}[\exp(p|f_i(x)|)(1+\exp(-2pf_i(x)))]^{\frac{1}{p}}=$$

$$\sum_{i=1}^{m}|f_i(x)|+\sum_{i=1}^{m}\text{In}[1+\exp(-2pf_i(x))]^{\frac{1}{p}}=$$

$$\sum_{i=1}^{m}|f_i(x)|+\frac{1}{p}\sum_{i=1}^{m}\text{In}[1+\exp(-2pf_i(x))]$$

(3)对于比较复杂的互补问题，粒子的群体规模应该取大一点，以避免早熟收敛；另外一种办法可以采取群体规模动态调整的策略[10]。

4　数值结果

为验证该文算法的性能，取文[1-4]中非线性互补问题做测试。

例 1[1-4](Kojima-Shindo 问题)　这是一个曾由国内外很多学者采用过的一个典型算例。

$$F_1(X)=3x_1^2+2x_1x_2+2x_2^2+x_3+3x_4-6$$

$$F_2(X)=2x_1^2+x_1+x_2^2+10x_3+2x_4-2$$

$$F_3(X)=3x_1^2+x_1x_2+2x_2^2+2x_3+9x_4-9$$

$$F_4(X)=x_1^2+3x_2^2+2x_3+3x_4-3$$

这个问题有两个解：$(\frac{\sqrt{6}}{2},0,0,\frac{1}{2})^{\mathrm{T}}$和$(1,0,3,0)^{\mathrm{T}}$。

在此选取的参数 p 为 10^6。学习因子 $c_1=c_2=2$，ω 从 1.0 减小到 0.4，群体规模数为 50，最大进化代数为 5 000，粒子的搜索范围[0,3]。在硬件环境：CPU：Pentium4 2.93 GHz、内存：512 MB 等和软件环境 WindowsXP 系统下用 VC++6.0 编程运行，算法运行 20 次。计算结果见表 1。

数据分析：因为文[2-4]都是确定性算法，需给出初始点，并要利用目标函数的导数信息。该文算法为智能优化算法，无需使用导数信息，也不需要给定初始点。确定性算法智能优化算法各有优点，也各有缺点。只列出该文的运行结果，不再和文[2-4]结果比较。表 1 列出了 20 次运行中搜索成功的 16 次结果，搜索成功率为 80%。由表 1 可以看出：$(\frac{\sqrt{6}}{2},0,0,\frac{1}{2})^{\mathrm{T}}$和$(1,0,3,0)^{\mathrm{T}}$该文算法都能搜到。$(\frac{\sqrt{6}}{2},0,0,\frac{1}{2})^{\mathrm{T}}$搜到了 15 次，而$(1,0,3,0)^{\mathrm{T}}$搜到了 1 次。而确定性算法无法同时搜到原问题的所有可能解。在最大进化代数为 5 000 代内搜到的解的最好精度能达到 10^{-4}，最差精度达到 10^{-2}。如果需要更好的精度，可以扩大最大进化代数得到。

5　数值结果

针对非线性互补问题，利用粒子群算法结合极大熵函数法给出了该类问题的一种新的有效算法，该算法无需使用初始点和导数信息。

该算法不但给非线性互补问题提供了一种新方法，而且拓广了粒子群算法的应用范围。数值结果表明，该算法收敛快、数值稳定性好，是求解非线性互补问题的一种有效算法。

参考文献：

[1] 韩继业，修乃华.非线性互补理论与算法[M].上海：上海科学技术出版社，2006.

[2] 屈彪，王长钰，张树霞.一求解非线性互补问题的方法及收敛性[J].计算数学，2006，28(3)：247-258.

[3] 周丽美.依赖凝聚函数求解非线性互补问题的一种微分方程方法[J].数学的实践与认识，2006，36(2)：238-243.

[4] 马昌凤，梁国平，陈新美.求解非线性互补问题的内点正算法[J].应用数学和力学，2003，24(3)：315-322.

[5] 黄震宇，沈祖和.解一类非线性极大极小问题的熵函数方法[J].科学通报，1996，41(17)：1550-1554.

[6] 李兴斯.一类不可微优化问题的有效解法[J].中国科学：A 辑，1994，24(4)：371-377.

[7] Kennedy J，Eberhart R.Particle Swarm Optimization[C]//Proc IEEE Int Conf Neural Networks.Piscataway：IEEE Press，1995：1942-1948.

[8] Shi Y，Eberhart R.A Modified Particle Swarm optimizer[C]//Proceedings of the IEEE International Conference on Evolutionary Computation.Piscataway，NJ：IEEE Press，1998：69-73.

[9] 张建科，刘三阳，张晓清.改进的粒子群算法[J].计算机工程与设计，2007，28(17)：4215-4219.

[10] 张晓清，张建科，方敏.多峰搜索的动态粒子群算法[J].计算机应用，2005，21(11)：2668-2670.