

# Bir Disk ile Sonsuzdaki Akışkanın Çakışmayan Eksenler Etrafında Birbirine Yakın Açısal Hızlarla Dönmeleri Sonucunda Oluşan Akım

H. Volkan ERSOY, Serdar BARIŞ  
*İ.T.Ü. Makina Fakültesi, Makina Müh. Böl.,  
Gümüşsuyu, İstanbul-TÜRKİYE*

Geliş Tarihi 19.03.2001

## Özet

Bu çalışmada, bir disk ile sonsuzdaki viskoz akışkanın çakışmayan eksenler etrafında küçük bir açısal hız farkıyla dönmelerinden kaynaklanan hareket incelenmiştir. Disk ile sonsuzdaki akışkanın farklı hızlarda dönmelerinin hız alanı üzerindeki etkisi detaylı olarak analiz edilmiştir. Problemin çözümü, birbirine yakın açısal hızlarla dönmeyi temsil eden parametreye göre verilmiş olan bir pertürbasyon serisiyle ve dördüncü mertebeden Runge-Kutta prosedürünü kullanan shooting metoduyla yapılmıştır. İki metotla elde edilen sonuçların uyum içinde oldukları gösterilmiştir.

**Anahtar Sözcükler:** Disk, Sonsuzdaki Akışkan, Eksantrik Dönme, Viskoz Akışkan.

## Flow Induced by Non-coaxial Rotations of a Disk and the Fluid at Infinity with Nearly the Same Angular Velocity

### Abstract

In this paper, the flow of a viscous fluid due to the non-coaxial rotations of a disk and the fluid at infinity with a slight angular velocity difference is studied. The effect of angular velocity difference on the velocity field is analyzed in detail. A perturbation series which is expressed in powers of the rotation parameter with nearly the same angular velocity and the shooting method using the fourth-order Runge-Kutta procedure are employed to solve the problem. It is proved that the results obtained by the two methods are in good agreement.

**Key Words:** Disk, Fluid at Infinity, Non-coaxial Rotation, Viscous Fluid.

### Giriş

Sonsuzdaki akışkanın dönmesi fikri ilk kez Batchelor (1951) tarafından düşünülmüştür. Kendisi, tek bir diskin dönmesiyle indüklenen hareket için von Kármán'ın (1921) kullandığı benzerlik dönüşümünü, disk ile sonsuzdaki akışkanın farklı açısal hızlarda dönmesiyle ortaya çıkan hareket için de kullanılabileceğini göstermiş ve her türlü dönme durumu için akım çizgilerinin nasıl oluştuğunu incelemiştir. Rogers ve Lance (1960), sonsuzdaki akış-

kan ve diskin farklı hızlarda dönmesiyle indüklenen akışkan hareketini detaylı olarak incelemiştir. Aynı yönde dönme durumu için bütün durumlarda çözüm elde etmelerine karşılık, zıt yönde dönme durumunda ancak diskten emme yapılırsa çözümün mümkün olduğu görüşünde birleşmişlerdir. Zandbergen ve Dijkstra (1977) ve Dijkstra (1980) zıt yönde dönme durumunda, açısal hızların oranının belirli bir aralıkta olduğu değerlerde çözümde dallanmanın olduğunu; yani çok çözümün ortaya çıktığını

göstermişlerdir. Lentini ve Keller (1980a, 1980b), bu durumda en az dört çözümün olduğunu bulmuştur. Lai ve arkadaşları (1985) ise, bahsedilen bütün bu çalışmalardan farklı olarak, hareketin aksel simetrik olmayan çözümlerini arayarak bir parametrelili çözüm ailesine karşılık gelen sonuçları elde etmişlerdir.

Bir disk ile sonsuzdaki akışkanın paralel fakat farklı eksenler etrafında dönmesi problemi ise ilk kez Coirier (1972) tarafından incelenmiştir. Kendisi, hem aynı hem de birbirine yakın açısal hızla dönme halleri için viskoz akışkanın hareketinde hız alanını elde etmiştir. Erdoğan (1976a) aynı problemi birbirine yakın açısal hızla dönme durumunda, ikinci merteye akışkan için araştırmıştır. Erdoğan (1976b, 1977) diskin gözenekli olması durumunu da gözönüne almış; sırasıyla aynı ve küçük bir açısal hız farkıyla dönme durumlarında ortaya çıkan hareketi, viskoz akışkan için analiz etmiştir. Murthy ve Ram (1978), Erdoğan'ın (1976b) çalışmasına manyetik alan ve ısı transferi etkilerini dahil etmiştir. Pop (1979) disk ve sonsuzdaki akışkanın aniden harekete başlamasından kaynaklanan akımın hız alanını iki boyutlu alarak zamana bağlı hareketi incelemiştir. Fakat bu harekette hız alanı üç boyutlu olduğu için, Erdoğan (1997) hız alanının iki boyutlu olması için gereken başlangıç şartını vererek problemi yeniden incelemiştir. Kasiviswanathan ve Rao (1987), diskin kendi düzleminde burulmasız titreşim yapmasıyla ortaya çıkan zamana bağlı hareket için tam çözüm elde etmiştir. Son zamanlarda Erdoğan (2000), bu problem için yeni bir analiz yapmıştır. Gözenekli diskin kendi düzleminde titreşim yapmasıyla ortaya çıkan zamana bağlı hareket ise Hayat ve arkadaşları (1999) tarafından incelenmiştir. Ersoy (2000) ise gözenekli disk durumunda manyetik alanın etkisi altında Oldroyd-B akışkanının hareketi için çözüm bulmuştur.

Bu makalede, Coirier'in (1972) ortaya koyduğu hareket yeniden incelenerek önemli katkılar yapılmıştır. Bunları şu şekilde sıralamak mümkündür. Hız bileşenlerinin koordinatlara bağlı değişimi detaylı olarak analiz edilerek, farklı dönmenin etkisi araştırılmıştır. Farklı hızlarda dönmeyi karakterize eden  $\varepsilon$  parametresine göre verilmiş olan pertürbasyon serisi şeklindeki çözümün yaklaşık olarak geçerli olduğu aralık, en az  $10^{-8}$  hassasiyetle sonuç veren dördüncü mertebeden Runge-Kutta prosedürünü kullanan shooting metoduyla belirlenmiştir.

## Temel Denklemler

Kartezyen koordinat sistemine göre  $z=0$  düzlemine yerleştirilmiş pozitif dönüş yönünde  $\Omega$  açısal hızıyla dönen bir disk düşünelim. Akışkan diskin  $z > 0$  bölgesinde yer alsın. Disk ile aynı yönde  $\Omega(1 + \varepsilon)$  açısal hızıyla dönen sonsuzdaki akışkanın dönme eksenini de  $x=0$  düzleminde bulsun; fakat disk ve sonsuzdaki akışkanın dönme eksenleri arasında  $y$  ekseninde bir eksantriklik olsun ve mesafesi  $\ell$  ile gösterilsin. Buna göre sınır şartları,

$$\begin{aligned} z = 0 \text{ da } & u = -\Omega y, \quad v = \Omega x, \quad w = 0, \\ z \rightarrow \infty \text{ da } & u = -\Omega(1 + \varepsilon)(y - \ell), \\ & v = \Omega(1 + \varepsilon)x \end{aligned} \quad (1)$$

olur. Coirier (1972), diskin ve sonsuzdaki akışkanın paralel fakat farklı eksenlerde dönmesi durumunda hareketi, her  $z$ =sabit düzleminde, Kármán hareketi ile düzlemden düzleme değişen katı cisim ötelemesinin birleşimi şeklinde düşünmüştür. Kármán (1921), bilindiği gibi sonsuz bir diskin dönmesiyle disk üstündeki akışkanın daimi hareketine ait hız alanının silindirik koordinatlarda  $v_r = rF(z)$ ,  $v_\theta = rG(z)$ ,  $v_z = H(z)$  şeklinde olacağını öne sürmüştür. Bu hız alanının kartezyen koordinatlardaki karşılığı ise  $u = xF(z) - yG(z)$ ,  $v = xG(z) + yF(z)$ ,  $w = H(z)$  şeklindedir. Böylece Coirier'in öne sürdüğü hareket için hız alanı,

$$\begin{aligned} u &= xF(z) - yG(z) + f(z), \\ v &= xG(z) + yF(z) + g(z), \\ w &= H(z) \end{aligned} \quad (2)$$

formunda olur ve Kármán hareketinin aksel simetrik özelliği bozulur. Buradaki bilinmeyen fonksiyonlar için şartlar,

$$\begin{aligned} F(0) &= 0, \quad G(0) = \Omega, \quad H(0) = 0, \quad f(0) = 0, \\ g(0) &= 0, \quad F(\infty) = 0, \quad G(\infty) = \Omega(1 + \varepsilon), \\ f(\infty) &= \Omega(1 + \varepsilon)\ell, \quad g(\infty) = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

olarak bulunur.  $H(\infty)$  değerinin problemin çözümünden elde edileceği not edilmelidir. Süreklilik denkleminde

$$2F + H' = 0 \quad (4)$$

elde edilir. Navier-Stokes denklemlerinden ise

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= (\nu F'' - F^2 + G^2 - H F') x \\ &+ (-\nu G'' + 2FG + H G') y \\ &+ (\nu f'' - F f + G g - H f'), \end{aligned} \quad (5a)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} &= (\nu G'' - 2FG - H G') x \\ &+ (\nu F'' + G^2 - F^2 - H F') y \\ &+ (\nu g'' - G f - F g - H g'), \end{aligned} \quad (5b)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = \nu H'' - H H' \quad (5c)$$

bulunur. Burada  $\rho$  akışkanın yoğunluğunu,  $p$  değiştirilmiş basıncı,  $\nu$  akışkanın kinematik viskozitesini ve ( )' işareti  $z$  ye göre türevi göstermektedir. Basıncın sürekli ve diferansiyelenebilir bir fonksiyon olduğu düşünülerek

$$\nu F'' - F^2 + G^2 - H F' = A = \text{sabit}, \quad (6a)$$

$$\nu G'' - 2FG - H G' = 0, \quad (6b)$$

$$\nu f'' - F f + G g - H f' = B = \text{sabit}, \quad (6c)$$

$$\nu g'' - G f - F g - H g' = C = \text{sabit} \quad (6d)$$

elde edilir. (4) ve (6a-d) denklemleri hareketi yöneten denklemler olup (3) şartlarıyla çözümlerinden hareket belirlenir. Bu denklemler,

$$\begin{aligned} F &= \Omega \bar{F}, \quad G = \Omega \bar{G}, \quad H = \sqrt{\nu \Omega} \bar{H}, \\ f &= \Omega \ell \bar{f}, \quad g = \Omega \ell \bar{g}, \quad z = \sqrt{2\nu/\Omega} \zeta, \end{aligned} \quad (7)$$

$$A = \Omega^2 \bar{A}, \quad B = \Omega^2 \ell \bar{B}, \quad C = \Omega^2 \ell \bar{C}$$

şeklinde boyutsuzlaştırıldığında,

$$2\sqrt{2}\bar{F} + \bar{H}' = 0, \quad (8)$$

$$\bar{F}'' - 2\bar{F}^2 + 2\bar{G}^2 - \sqrt{2}\bar{H}\bar{F}' = 2\bar{A}, \quad (9a)$$

$$\bar{G}'' - 4\bar{F}\bar{G} - \sqrt{2}\bar{H}\bar{G}' = 0, \quad (9b)$$

$$\bar{f}'' - 2\bar{f}\bar{f}' + 2\bar{G}\bar{g} - \sqrt{2}\bar{H}\bar{f}' = 2\bar{B}, \quad (9c)$$

$$\bar{g}'' - 2\bar{G}\bar{f} - 2\bar{F}\bar{g} - \sqrt{2}\bar{H}\bar{g}' = 2\bar{C} \quad (9d)$$

elde edilir; (8) ve (9a-d) denklemlerindeki türevler  $\zeta$  ya göredir. Bu durumda boyutsuzlaştırılan fonksiyonlar için şartlar,

$$\begin{aligned} \bar{F}(0) &= 0, \quad \bar{G}(0) = 1, \quad \bar{H}(0) = 0, \quad \bar{f}(0) = 0, \\ \bar{g}(0) &= 0, \quad \bar{F}(\infty) = 0, \quad \bar{G}(\infty) = 1 + \varepsilon, \\ \bar{f}(\infty) &= 1 + \varepsilon, \quad \bar{g}(\infty) = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

olur. Sonsuzdaki akışkan kayma gerilmesine sahip olmadığı için, (9a, c-d) denklemlerindeki sabitler  $\bar{A} = (1 + \varepsilon)^2$ ,  $\bar{B} = 0$ ,  $\bar{C} = -(1 + \varepsilon)^2$  olarak bulunur.

### Denklemlerin Çözümü

(10) şartlarıyla verilen (8) ve (9a-d) denklemlerinin çözümü için iki metot kullanılmıştır.

#### *Pertürbasyon çözümü*

Birbirine yakın açısız hızla dönme durumu için, disk ve sonsuzdaki akışkanın ortak bir eksen etrafında aynı açısız hızla dönmesi durumunda indüklenen aksel simetrik harekette akışkanın katı cisim dönmesi yapmasından yararlanılmıştır (Batchelor, 1951; Rogers ve Lance, 1960; Coirier, 1972). Buna göre, sonsuzdaki akışkanın diske göre biraz daha büyük bir açısız hızla döndüğü düşünülerek bilinmeyen fonksiyonlar

$$\begin{aligned}
 \bar{F} &= \varepsilon F_1 + \varepsilon^2 F_2 + 0(\varepsilon^3), \\
 \bar{G} &= 1 + \varepsilon G_1 + \varepsilon^2 G_2 + 0(\varepsilon^3), \\
 \bar{H} &= \varepsilon H_1 + \varepsilon^2 H_2 + 0(\varepsilon^3) \\
 \bar{f} &= f_0 + \varepsilon f_1 + 0(\varepsilon^2), \quad \bar{g} = g_0 + \varepsilon g_1 + 0(\varepsilon^2)
 \end{aligned} \tag{11}$$

şeklinde pertürbe edilmişlerdir. Açıkça anlaşıldığı gibi pertürbe edilmiş fonksiyonlar da  $\zeta$  ya bağlı olmalıdır. Bu fonksiyonlar için şartlar,

$$\begin{aligned}
 F_1(0) &= 0, \quad G_1(0) = 0, \quad H_1(0) = 0, \\
 f_0(0) &= 0, \quad g_0(0) = 0, \quad F_1(\infty) = 0, \\
 G_1(\infty) &= 1, \quad f_0(\infty) = 1, \quad g_0(\infty) = 0, \\
 F_2(0) &= 0, \quad G_2(0) = 0, \quad H_2(0) = 0, \\
 f_1(0) &= 0, \quad g_1(0) = 0, \quad F_2(\infty) = 0, \\
 G_2(\infty) &= 0, \quad f_1(\infty) = 1, \quad g_1(\infty) = 0
 \end{aligned} \tag{12}$$

şeklinde belirlenir. (11) daki ifadeler (8) ve (9a-d) denklemlerinde yerine yazıldığında,

$$2\sqrt{2}F_1 + H_1' = 0, \quad F_1'' + 4G_1 = 4, \quad G_1'' - 4F_1 = 0,$$

$$f_0'' + 2g_0 = 0, \quad g_0'' - 2f_0 = -2 \tag{13a-e}$$

ve

$$2\sqrt{2}F_2 + H_2' = 0,$$

$$F_2'' - 2F_1^2 + 2G_1^2 + 4G_2 - \sqrt{2}H_1F_1' = 2,$$

$$G_2'' - 4F_1G_1 - 4F_2 - \sqrt{2}H_1G_1' = 0,$$

$$f_1'' - 2F_1f_0 + 2g_1 + 2G_1g_0 - \sqrt{2}H_1f_0' = 0,$$

$$g_1'' - 2f_1 - 2G_1f_0 - 2F_1g_0 - \sqrt{2}H_1g_0' = -4 \tag{14a-e}$$

elde edilir. Pertürbasyon metodunun sonucu olarak elde edilen (13) ve (14) denklemlerini, (12) şartlarıyla çözmek mümkündür.

(13b-c) denklemleri,  $i = \sqrt{-1}$  olmak üzere  $K_1(\zeta) = F_1 + iG_1$  tanımıyla,

$$K_1'' - 4iK_1 = 4 \tag{15}$$

olur. Bu denklemin çözümü  $K_1(0) = 0$  ve  $K_1(\infty) = i$  şartlarıyla

$$F_1 = -e^{-\sqrt{2}\zeta} \sin \sqrt{2}\zeta, \quad G_1 = 1 - e^{-\sqrt{2}\zeta} \cos \sqrt{2}\zeta \tag{16a-b}$$

olarak bulunur. (13a) denklemini ve (12) deki  $H_1(0) = 0$  şartıyla ise

$$H_1 = 1 - e^{-\sqrt{2}\zeta} (\cos \sqrt{2}\zeta + \sin \sqrt{2}\zeta) \tag{16c}$$

elde edilir. (13d-e) denklemleri ise  $m_0(\zeta) = f_0 + ig_0$  tanımıyla birleştirildiğinde,

$$m_0'' - 2im_0 = -2i \tag{17}$$

denklemini bulunur. Bu denklemin  $m_0(0) = 0$  ve  $m_0(\infty) = 1$  şartlarıyla çözümünden ise,

$$f_0 = 1 - e^{-\zeta} \cos \zeta, \quad g_0 = e^{-\zeta} \sin \zeta \tag{18a-b}$$

(18a-b) elde edilir.

$K_2(\zeta) = F_2 + iG_2$  tanımı yapıldıktan sonra (16a-c) de elde edilen çözümler (14b-c) denklemlerinde yerine yazıldığında,

$$\begin{aligned}
 K_2'' - 4iK_2 &= \left[ 2e^{-\sqrt{2}\zeta} (\sin \sqrt{2}\zeta + \cos \sqrt{2}\zeta) \right] \\
 &+ i \left[ 2e^{-\sqrt{2}\zeta} (\cos \sqrt{2}\zeta - \sin \sqrt{2}\zeta) - 2e^{-2\sqrt{2}\zeta} \right]
 \end{aligned} \tag{19}$$

olur. Bu denklemin çözümü,  $K_2(0) = 0$  ve  $K_2(\infty) = 0$  şartlarıyla

$$F_2 = e^{-\sqrt{2}\zeta} \left( \frac{-1}{10} \cos \sqrt{2}\zeta + \frac{1}{5} \sin \sqrt{2}\zeta - \frac{\sqrt{2}}{2} \zeta \cos \sqrt{2}\zeta \right) + \frac{1}{10} e^{-2\sqrt{2}\zeta} \tag{20a}$$

$$G_2 = e^{-\sqrt{2}\zeta} \left( \frac{1}{5} \cos \sqrt{2}\zeta + \frac{1}{10} \sin \sqrt{2}\zeta + \frac{\sqrt{2}}{2} \zeta \sin \sqrt{2}\zeta \right) - \frac{1}{5} e^{-2\sqrt{2}\zeta} \quad (20b)$$

bulunur. (14a) denklemi ve (12) deki  $H_2(0) = 0$  şartıyla ise

$$\begin{aligned} H_2 &= e^{-\sqrt{2}\zeta} \left[ \frac{4}{5} \sin \sqrt{2}\zeta + \frac{1}{10} \cos \sqrt{2}\zeta + \frac{\sqrt{2}}{2} \zeta \left( \sin \sqrt{2}\zeta - \cos \sqrt{2}\zeta \right) \right] \\ &+ \frac{1}{10} e^{-2\sqrt{2}\zeta} - \frac{1}{5} \end{aligned} \quad (20c)$$

bulunur. Nihayet,  $m_1(\zeta) = f_1 + i g_1$  tanımıyla (16a-c) ve (18a-b) de bulunmuş olan çözümler (14d-e) denklemlerinde yerlerine yazıldıktan sonra,

$$\begin{aligned} m_1'' - 2im_1 &= \left[ -2e^{-\sqrt{2}\zeta} \sin \sqrt{2}\zeta + (2 - \sqrt{2})e^{-(\sqrt{2}+1)\zeta} \sin \sqrt{2}\zeta \cos \zeta \right. \\ &- (2 - \sqrt{2})e^{-\zeta} \sin \zeta + (2 - \sqrt{2})e^{-(\sqrt{2}+1)\zeta} \cos \sqrt{2}\zeta \sin \zeta \\ &+ \sqrt{2}e^{-\zeta} \cos \zeta - \sqrt{2}e^{-(\sqrt{2}+1)\zeta} \cos \zeta \cos \sqrt{2}\zeta - \sqrt{2}e^{-(\sqrt{2}+1)\zeta} \sin \zeta \sin \sqrt{2}\zeta \left. \right] \\ &+ i \left[ -2 - (2 - \sqrt{2})e^{-\zeta} \cos \zeta - 2e^{-\sqrt{2}\zeta} \cos \sqrt{2}\zeta \right. \\ &+ (2 - \sqrt{2})e^{-(\sqrt{2}+1)\zeta} \cos \sqrt{2}\zeta \cos \zeta - (2 - \sqrt{2})e^{-(\sqrt{2}+1)\zeta} \sin \sqrt{2}\zeta \sin \zeta \\ &\left. - \sqrt{2}e^{-\zeta} \sin \zeta - \sqrt{2}e^{-(\sqrt{2}+1)\zeta} \cos \zeta \sin \sqrt{2}\zeta + \sqrt{2}e^{-(\sqrt{2}+1)\zeta} \sin \zeta \cos \sqrt{2}\zeta \right] \end{aligned} \quad (21)$$

denklemini elde edilir. Oldukça uzun olan işlemlerden sonra bu denklemin çözümü de  $m_1(0) = 0$ ,  $m_1(\infty) = 1$  şartlarıyla,

$$\begin{aligned} f_1 &= e^{-\zeta} \left[ \frac{14 - 9\sqrt{2}}{12} \cos \zeta + \frac{\sqrt{2}}{12} \sin \zeta + \frac{1}{2} \zeta \left( \sin \zeta - (\sqrt{2} - 1) \cos \zeta \right) \right] - e^{-\sqrt{2}\zeta} \cos \sqrt{2}\zeta \\ &- e^{-(\sqrt{2}+1)\zeta} \left[ \frac{1}{6} \cos(\sqrt{2} - 1)\zeta - \frac{\sqrt{2}}{12} \sin(\sqrt{2} - 1)\zeta - \frac{(3\sqrt{2} - 4)}{4} \cos(\sqrt{2} + 1)\zeta \right] + 1, \end{aligned} \quad (22a)$$

$$\begin{aligned} g_1 &= e^{-\zeta} \left[ \frac{\sqrt{2}}{12} \cos \zeta - \frac{(14 - 9\sqrt{2})}{12} \sin \zeta + \frac{1}{2} \zeta \left( \cos \zeta + (\sqrt{2} - 1) \sin \zeta \right) \right] + e^{-\sqrt{2}\zeta} \sin \sqrt{2}\zeta \\ &- e^{-(\sqrt{2}+1)\zeta} \left[ \frac{1}{6} \sin(\sqrt{2} - 1)\zeta + \frac{\sqrt{2}}{12} \cos(\sqrt{2} - 1)\zeta + \frac{3\sqrt{2} - 4}{4} \sin(\sqrt{2} + 1)\zeta \right] \end{aligned} \quad (22b)$$

olarak bulunur.

### Sayısal çözüm

Yukarıda verilen pertürbasyon serisi şeklindeki çözümlerin  $\varepsilon$  parametresinin hangi değerine kadar geçerli olduğunu yaklaşık olarak tahmin edebilmek için (8) ve (9a-d) diferansiyel denklemleri ilgili

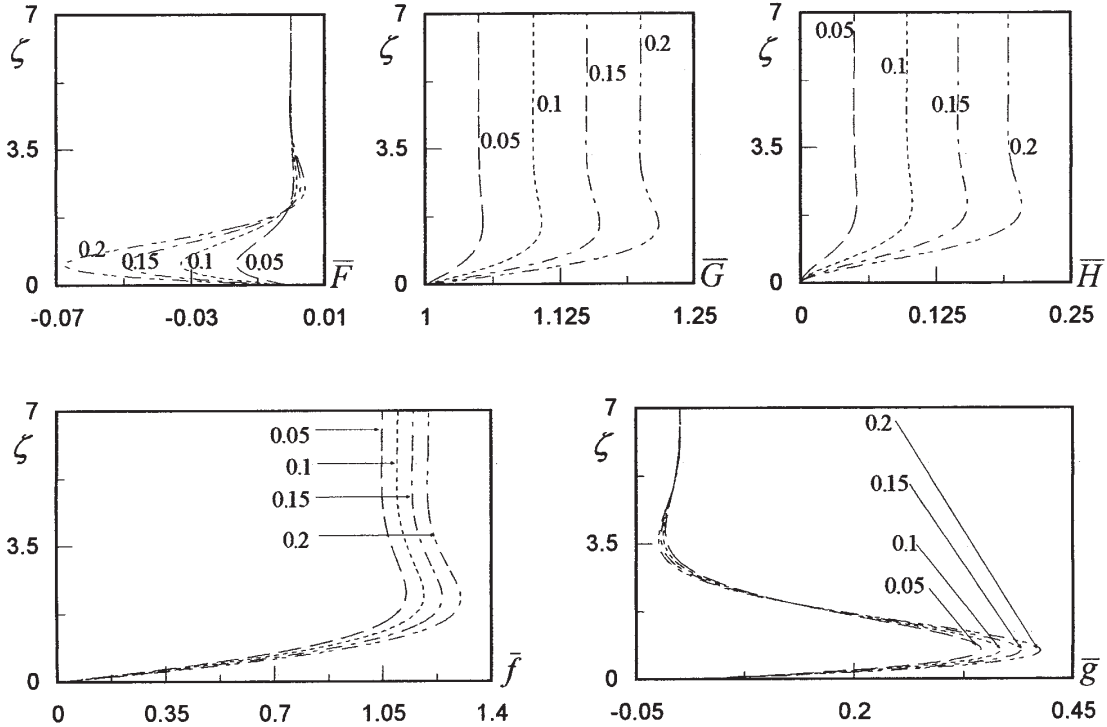
sınır şartları altında shooting metodu yardımıyla sayısal olarak çözülmüştür. Bu amaçla, ilk olarak, (8) ve (9a-d) diferansiyel denklemleri 1. mertebeden diferansiyel denklem takımlarına indirgenir. Daha sonra  $\zeta = 0$  daki bilinmeyen türev değerleri pertürbasyon serisi şeklindeki çözümler yardımıyla tahmin edilerek, diferansiyel denklemler 4. mertebe-

den Runge-Kutta metodu kullanılarak  $\zeta = 0$  dan  $\zeta = \zeta_\infty$  a kadar başlangıç değer problemi gibi integre edilir. Burada  $\zeta_\infty$  teorik olarak oldukça büyük pozitif bir sayı olmasına rağmen, sayısal çözümde  $\zeta_\infty = 7$  olarak alınması yeterlidir. Yapılan integrasyonun hassasiyeti, tahmini türev değerleriyle yapılan çözüm sonrasında elde edilen  $\bar{F}(\zeta_\infty)$ ,  $\bar{G}(\zeta_\infty)$ ,  $\bar{f}(\zeta_\infty)$  ve  $\bar{g}(\zeta_\infty)$  değerlerini  $\zeta \rightarrow \infty$  için problemde verilmiş olan fonksiyon değerleriyle karşılaştırarak kontrol edilir. Hesaplanmış ve problemde verilmiş değerler arasında bir fark oluşacağı için hesaplamalar

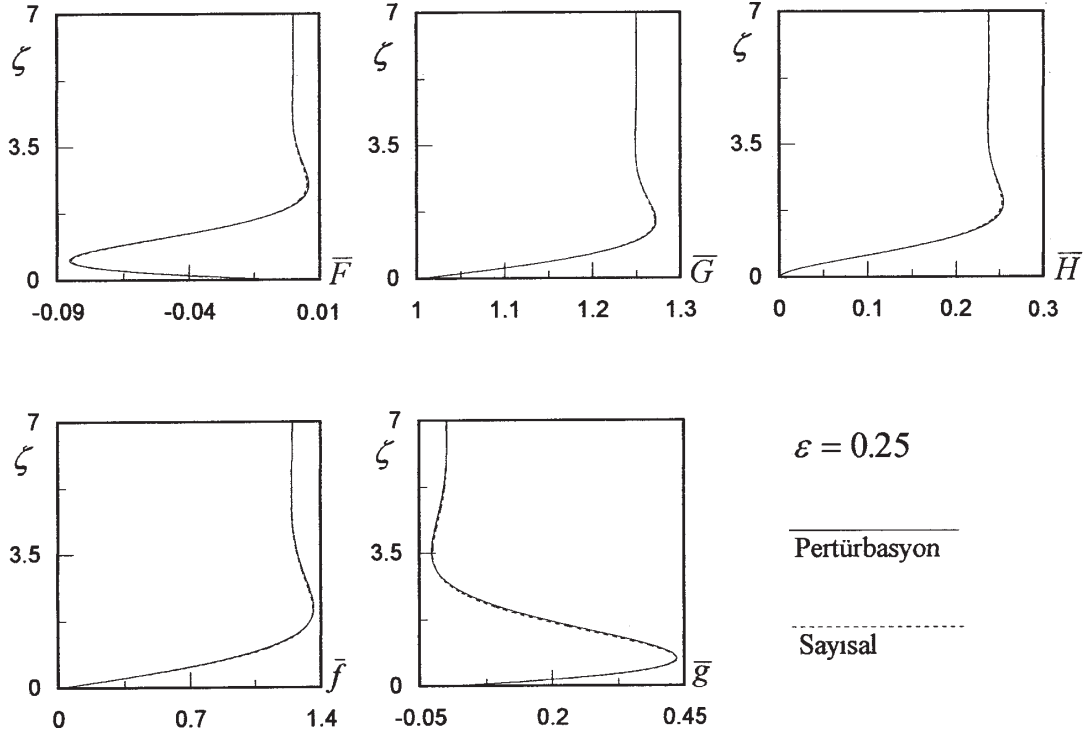
$\zeta = 0$  daki yeni tahmini türev değerleriyle tekrarlanır. İşlemler, ilgili fonksiyonların  $\zeta \rightarrow \infty$  daki değerleri istenen hassasiyette sağlatılıncaya kadar iteratif olarak devam ettirilir.  $\zeta = 0$  daki bilinmeyen türev değerleri Tablo 1’de virgülden sonra 16 haneye kadar verilmiştir ve bu değerlerle yapılan integrasyon  $\zeta \rightarrow \infty$  da verilmiş olan (10) şartlarını en azından  $10^{-8}$  lik bir hassasiyetle sağlamaktadır. Ayrıca, pertürbasyon metoduyla da elde edilen bu türev değerleri virgülden sonra 6 haneye kadar Tablo 1’de verilmiştir.

**Tablo 1.** Pertürbasyon ve sayısal metotlarla elde edilen  $\bar{F}'(0)$ ,  $\bar{G}'(0)$ ,  $\bar{f}'(0)$ ,  $\bar{g}'(0)$  değerleri

$\varepsilon$	$\bar{F}'(0)$	$\bar{G}'(0)$	$\bar{f}'(0)$	$\bar{g}'(0)$
0,05 (P)	-0,072125	0,071771	1,076184	1,087970
(N)	-0,0721139979847612	0,0717630842881620	1,0772162849782332	1,0893506075374180
0,1 (P)	-0,147078	0,145664	1,152369	1,175939
(N)	-0,1469922618023953	0,1455990532548607	1,1564622144695682	1,1814182715657142
0,15 (P)	-0,224860	0,221678	1,228553	1,263909
(N)	-0,2245737990814368	0,2214623114944782	1,2376958021354587	1,2761307414702194
0,2 (P)	-0,305470	0,299813	1,304738	1,351878
(N)	-0,3048008267705930	0,2993100686449589	1,3208757759205358	1,3734219905850245
0,25 (P)	-0,388909	0,380070	1,380922	1,439848
(N)	-0,3876185241510429	0,3791020589073630	1,4059632277655216	1,4732303015278656



**Şekil 1.**  $\varepsilon = 0,05; 0,1; 0,15; 0,2$  için  $\bar{F}$ ,  $\bar{G}$ ,  $\bar{H}$ ,  $\bar{f}$ ,  $\bar{g}$  fonksiyonlarının  $\zeta$  ile değişimleri



Şekil 2.  $\varepsilon = 0,25$  için pertürbasyon ve sayısal metotların karşılaştırılması

Sayısal çözümden, pertürbasyon metoduyla elde edilen yaklaşık analitik çözümün  $\varepsilon = 0,2$  değerine kadar çok uygun olduğu sonucu çıkarılmıştır. Şekil 1'de  $\varepsilon = 0,05; 0,1; 0,15; 0,2$  için pertürbasyon metoduyla elde edilen  $\bar{F}$ ,  $\bar{G}$ ,  $\bar{H}$ ,  $\bar{f}$ ,  $\bar{g}$  fonksiyonlarının  $\zeta$  ile değişimleri gösterilmiştir. Şekil 2'de ise aynı fonksiyonların değişimleri, her iki metotla elde edilen çözümler arasındaki farkın belirginleşmeye başladığı  $\varepsilon = 0,25$  değeri için çizdirilmiştir.

### Sonuçlar

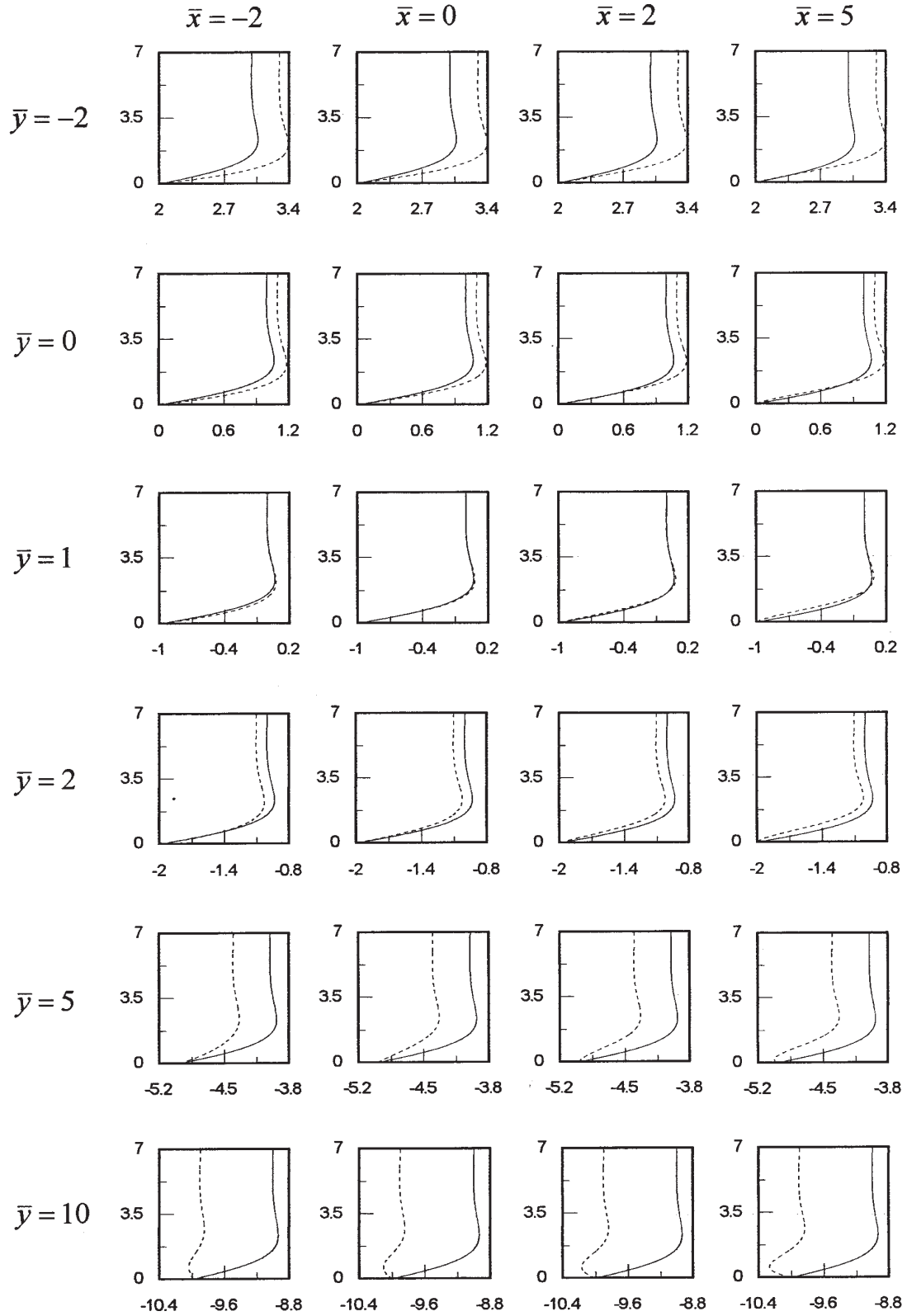
İki disk veya bir disk ile sonsuzdaki akışkan, çakışmayan eksenler etrafında farklı açılarda döndüklerinde hareket, her  $z$ =sabit düzleminde, Kármán hareketi ile düzlemden düzleme değişen katı cisim ötelemesinin birleşimi şeklinde düşünülür. Fakat iki hareket arasında önemli bir fark vardır. Eğer bir disk ile sonsuzdaki akışkanın dönmesi sözkonusuysa, sonsuzda akışkan kayma gerilmelerine sahip olmayacağı için öteleme hızının sırasıyla  $x$  ve  $y$  bileşenleri olan  $f(z)$  ve  $g(z)$  fonksiyonlarının sonsuzda her mertebeden türevleri sıfır olarak belirlenir. Oysa iki diskin eksantrik dönmesi sözkonusu olursa, üstteki diskin viskoz akışkana etkisi nedeniyle,  $f(z)$  ve  $g(z)$  fonksiyonları ile ilgili olan denklemlerin çözümü için sınır şartları eksik olur. Bu

durumda, orta düzlemde hızın sıfır olduğu noktalar için (eksenel hız hariç) şartlar yazılarak bir (veya iki) parametrelili çözüm ailesine uyan sonuçlar elde edilir (Parter ve Rajagopal, 1984; Lai ve arkadaşları, 1984).

Bir disk ile sonsuzdaki akışkanın, ortak veya çakışmayan eksenler etrafında dönmeleriyle ortaya çıkan hareketler için elde edilen denklemlerin çözümü arasında da bir ilişki vardır. Bir disk ile sonsuzdaki akışkanın ortak bir eksen etrafında dönmeleriyle ortaya çıkan ekstenel simetrik hareketi temsil eden denklemler (4) ve (6a-b) ile gösterilmiştir. Eğer disk ve sonsuzdaki akışkan çakışmayan eksenler etrafında dönerlerse, bu taktirde "ilave olarak" öteleme hızının  $x$  ve  $y$  bileşenleri olan  $f(z)$  ve  $g(z)$  fonksiyonları ile ilgili (6c-d) denklemlerinin de çözülmesi gerekir.

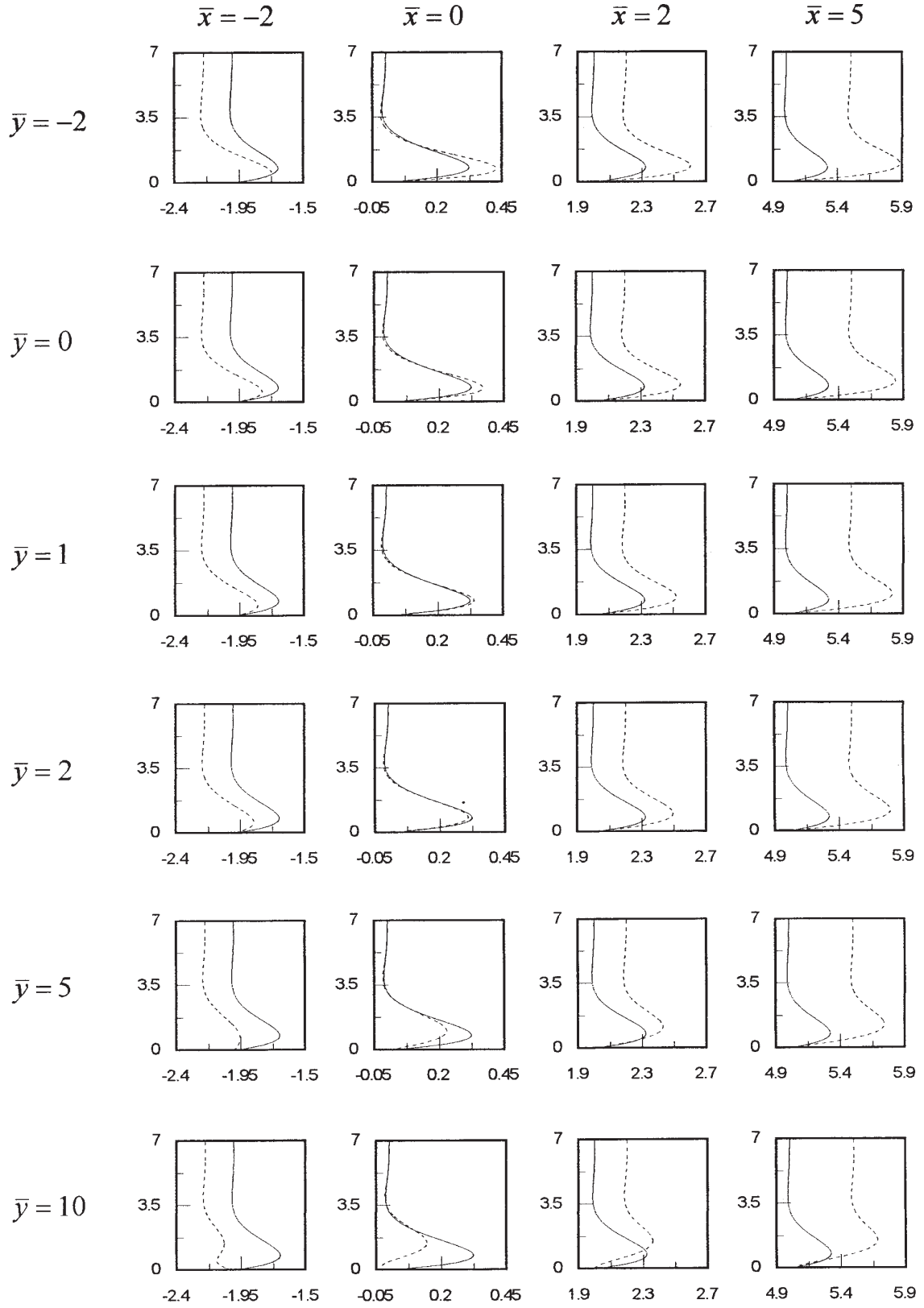
Bu makalede, hem diskin hem de sonsuzdaki akışkanın birbirine yakın açılarda pozitif dönüş yönünde döndüğü düşünülmüştür. Eksantrik dönme ekstenel simetriyi bozduğu için kartezyen koordinat sistemi kullanılmış ve açılarda hız farkının hız alanına olan etkisi koordinatlara bağlı olarak incelenmiştir.

Tek diskin dönmesinden dolayı, sınır tabaka etkisi diske yakın bölgede gerçekleşir. Sonsuzdaki akışkanın disk düzleminde olan uzaklığı, hız değişiminin olmadığı konum ile belirlenir; dolayısıyla



Şekil 3.  $\bar{u}$  hızının koordinatlara göre değişimi ( $\epsilon = 0$  — ;  $\epsilon = 0,1$  - - -)





Şekil 4.  $\bar{v}$  hızının koordinatlara göre değişimi ( $\varepsilon = 0$  — ;  $\varepsilon = 0, 1$  - - -)

burada akışkan kayma gerilmesine sahip olmaz. Bahsedilen bu mesafe ise, akışkanın kinematik viskozitesine, diskin açısız hızına ve rölatif açısız hıza bağlıdır. Burada incelenilen  $0 \leq \varepsilon \leq 0,25$  değerleri arasında sonsuzdaki akışkanın diskten olan uzaklığı yaklaşık olarak  $\zeta \approx 6$  yani  $z \approx 8,5 \sqrt{\nu/\Omega}$  olarak görülür. Ortak eksen etrafında dönmeye ortaya çıkan aksel simetrik hareketteki sınır tabaka kalınlığının daha az olduğu ise açıktır.

Hareketin özelliğinden dolayı hız alanının  $x$  ve  $y$  bileşenleri, üç bağımsız uzay değişkenine bağlıdır. Sınır şartlarından dolayı  $(\bar{u})_{z=0} = -\bar{y}$ ,  $(\bar{u})_{z \rightarrow \infty} = (1 + \varepsilon)(1 - \bar{y})$ ,  $(\bar{v})_{z=0} = \bar{x}$ ,  $(\bar{v})_{z \rightarrow \infty} = (1 + \varepsilon)\bar{x}$  dir; burada  $\bar{u} = u/\Omega\ell$ ,  $\bar{v} = v/\Omega\ell$ ,  $\bar{x} = x/\ell$ ,  $\bar{y} = y/\ell$  ile belirtilmiştir. Akışkan içinde hızın bu bileşenlerinin değişimi Şekil 3-4'de gösterilmiştir. Sonsuzdaki akışkanın daha hızlı dönmesi durumunda, akışkanın  $\bar{u}$  ve  $\bar{v}$  hızı mutlak değer olarak artar. Açısız hız farkı, eksantrikliğin olduğu  $\bar{y} = 1$  düzleminde  $\bar{u}$  hızına minimum etki yaparken bu düzlemde uzaklaştıkça  $\bar{u}$  hızına olan etkisi de artar. Benzer şekilde bu fark,  $\bar{v}$  hızına yine eksantrikliğin olduğu  $\bar{x} = 0$  düzleminde minimum etki yaparken bu düzlemde uzaklaştıkça  $\bar{v}$  hızına olan etkisi de artar. Bahsedilen eksantrikliğin olduğu  $\bar{y} = 1$  ve  $\bar{x} = 0$  düzlemleri, kuşkusuz  $z$  eksenine paraleldir. Eksantrikliğin  $y$  ekseninde olması sebebiyle, öteleme hızının  $x$  bileşeni  $y$  bileşeninden daha büyüktür. Böyle olmakla birlikte,  $z$  ekseninden uzak olan yerlerde  $\bar{u}$  ve  $\bar{v}$  hız bileşenleri üzerinde eksantriklik etkisini kaybeder.

Hareketin, her  $z$ =sabit düzleminde, Kármán hareketiyle katı cisim ötelemesinin süperpozisyonu olması nedeniyle, süreklilik denkleminin bir sonucu

olarak aksel hız eksantriklikten etkilenmez. Sonsuzdaki akışkanın daha hızlı dönmesi nedeniyle aksel hız diskten yukarıya doğrudur ve sonsuzdaki akışkan diske göre daha hızlı döndüğünde bu değer artar. Aksel hız, sonsuzdaki akışkanın katı bir cisimle sınırlandırılmaması nedeniyle sonsuzda bir değere sahiptir ve yaklaşık olarak  $H(\infty) \approx \sqrt{\nu\Omega}(1 - 0,2\varepsilon)\varepsilon$  tir.

Ayrıca, sonsuzdaki akışkanın açısız hızının diskin açısız hızına rölatif oranını gösteren  $\varepsilon$  parametresinin  $[0, 0,2]$  aralığında iken pertürbasyon çözümün çok uygun olduğu, Runge-Kutta prosedürü ile kullanılan shooting metoduyla gösterilmiştir.

### Semboller

$\ell$	: $y$ ekseninde aksantriklik mesafesi, (L).
$p$	: değiştirilmiş basınç, $(ML^{-1}T^{-2})$ .
$u, v, w$	: kartezyen koordinatlarda hız bileşenleri, $(LT^{-1})$ .
$x, y, z$	: kartezyen koordinatlar, (L).
$\varepsilon$	: diske göre sonsuzdaki akışkanın açısız hızının bağıl oranını gösteren parametre, (boyutsuz).
$\nu$	: akışkanın kinematik viskozitesi, $(L^2 T^{-1})$ .
$\rho$	: akışkanın yoğunluğu, $(ML^{-3})$ .
$\Omega$	: diskin açısız hızı, $(T^{-1})$ .

### Teşekkür

Yazarlar, değerli yardımlarından dolayı Prof. Dr. M. Emin Erdoğan'a en içten teşekkürlerini sunarlar.

### Kaynaklar

- Batchelor, G.K., "Note on a Class of Solutions of the Navier-Stokes Equations Representing Steady Rotationally-Symmetric Flow", Quart. J. Mech. Appl. Math., 4, 29-41, 1951.
- Coirier, J., "Rotations non Coaxiales d'un Disque et d'un Fluide à L'infini", J. Mécanique, 11, 317-340, 1972.
- Dijkstra, D., "On the Relation Between Adjacent Inviscid Cell Type Solutions to the Rotating-Disk Equations", J. Engng. Math., 14, 133-154, 1980.
- Erdoğan, M.E., "Non-Newtonian Flow due to Non-coaxially Rotations of a Disk and a Fluid at Infinity", ZAMM, 56, 141-146, 1976a.
- Erdoğan, M.E., "Flow due to Eccentric Rotating a Porous Disk and a Fluid at Infinity", Trans. ASME

J. Appl. Mech., 43E, 203-204, 1976b.

Erdoğan, M.E., "Flow due to Noncoaxially Rotations of a Porous Disk and a Fluid at Infinity", Rev. Roum. Sci. Techn.- Méc. Appl., 22, 171-178, 1977.

Erdoğan, M.E., "Unsteady Flow of a Viscous Fluid due to Non-coaxial Rotations of a Disk and a Fluid at Infinity", Int. J. Non-Linear Mech., 32, 285-290, 1997.

Erdoğan, M.E., "Flow Induced by Non-coaxial Rotation of a Disk Executing Non-torsional Oscillations and a Fluid Rotating at Infinity", Int. J. Engng. Sci., 38, 175-196, 2000.

Ersay, H.V., "MHD Flow of an Oldroyd-B Fluid due to Non-coaxial Rotations of a Porous Disk and the

- Fluid at Infinity”, *Int. J. Engrg. Sci.*, 38, 1837-1850, 2000.
- Hayat, T., Asghar, S., and Siddiqui, A.M., “Unsteady Flow of an Oscillating Porous Disk and a Fluid at Infinity”, *Meccanica*, 34, 259-265, 1999.
- Kármán, T.von, “Über Laminare und Turbulente Reibung”, *ZAMM*, 1, 233-252, 1921.
- Kasiviswanathan, S.R., and Rao, A.R., “An Unsteady Flow due to Eccentrically Rotating Porous Disk and a Fluid at Infinity”, *Int. J. Engrg. Sci.*, 25, 1419-1425, 1987.
- Lai, C.-Y., Rajagopal, K.R., and Szeri, A.Z., “Asymmetric Flow between Parallel Rotating Disks”, *J. Fluid Mech.*, 146, 203-225, 1984.
- Lai, C.-Y., Rajagopal, K.R., and Szeri, A.Z., “Asymmetric Flow above a Rotating Disk”, *J. Fluid Mech.*, 157, 471-492, 1985.
- Lentini, M., and Keller, H.B., “The von Kármán Swirling Flows”, *SIAM J. Appl. Maths.*, 38, 52-64, 1980a.
- Lentini, M., and Keller, H.B., “Boundary Value Problems on Semi-Infinite Intervals and Their Numerical Solution”, *SIAM J. Num. Anal.*, 17, 577-603, 1980b.
- Murthy, S.N., and Ram, R.K.P., “MHD Flow and Heat Transfer due to Eccentric Rotations of a Porous Disc and a Fluid at Infinity”, *Int. J. Engrg. Sci.*, 16, 943-949, 1978.
- Parter, S.V., and Rajagopal, K.R., “Swirling Flow between Rotating Plates”, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 86, 305-315, 1984.
- Pop, I., “Unsteady Flow due to Noncoaxially Rotating Disk and a Fluid at Infinity”, *Bull. Tech. Uni. Ist.*, 32, 14-18, 1979.
- Rogers, M.H., and Lance, G.N., “The Rotationally Symmetric Flow of a Viscous Fluid in the Presence of an Infinite Rotating Disk”, *J. Fluid Mech.*, 7, 617-631, 1960.
- Zandbergen, P.J., and Dijkstra, D., “Non-unique Solutions of the Navier-Stokes Equations for the Kármán Swirling Flow”, *J. Engrg. Math.*, 11, 167-188, 1977.