

一种基于三阶矩的方向估计方法

师向年 罗发龙

(西安电子科技大学,西安 710071)

摘要 如何在信号源相干和噪声空间相关的情况下实现目标方向的高分辨,是当前阵列信号处理领域必须解决的问题之一。本文提出了一种基于空间三阶矩的方向估计方法。这种方法在处理时,与信号源间是否相干、接收噪声是否空间相关均没有关系。在空间三阶矩已知的情况下,它可以分辨空间任意接近的信号,从而实现了信号源相干和噪声空间相关情况下的高分辨处理。

关键词 阵列信号处理;方向估计;三阶矩

一、引言

目标探测定位的高分辨技术是近年来阵列信号处理研究的中心问题之一。八十年代以来, MUSIC 法受到广泛关注^[1]。它是利用空间协方差矩阵的特征矢量构成信号子空间和噪声子空间,再利用这两种子空间的正交性来确定信号到达方向。它具有很高的分辨力。MUSIC 法是以阵元间的噪声相互独立这种假设为基础的;如果阵元间的噪声具有空间相关性,尤其在这种相关性未知或无法估计的情况下,用 MUSIC 法得到的方向估计结果就很差^[2]。

我们知道,在方向估计的许多应用场合中都可以认为噪声满足高斯分布,而信号却为非高斯分布或确定性过程^[3]。由于高斯随机过程的高阶谱为零,因此,利用高阶谱或高阶矩对非高斯信号进行检测、估计等处理将显得特别有效^[3]。文献[4]提出了一种用四阶矩进行方向估计的方法,这种方法是用四阶矩函数构成一个与 MUSIC 法中空间相关矩阵等价的矩阵,并对该矩阵进行特征值分解,从而建立对应的信号子空间和噪声子空间。这种方法在处理时并没有假定噪声间相互独立,因此比 MUSIC 法有更广的应用范围;但是,这种方法却假设了信号源间不相干。若空间信号源相干,那么用四阶矩构成的矩阵的特征值就会发生亏损,从而无法确定信号子空间,使得这种方法不能应用。

针对这些问题,本文提出了一种用三阶矩进行方向估计的方法。用这种方法建立信号子空间和噪声子空间时与空间信号源是否相干、阵元间噪声是否相关均没有关系。在空间三阶矩已知的情况下,它可以分辨空间任意接近的信号,从而实现了信号源相干和噪声空间相关情况下的高分辨处理。此外,我们还证明了用三阶矩构成的矩阵的列矢量所张成空间上的正交投影算子与信号子空间上的正交投影算子相等,这样,在具体进行方向估计时,无需对矩阵进行特征值分解,而是直接用文献[5]给出的递归方法得到所需的正

交投影算子,因此这种方向估计方法适合于要求实时处理的场合。

二、信号模型和问题描述

设接收阵是由 $M+1$ 个阵元组成的等间隔线阵,在第 m 个阵元上第 n 次快拍的接收值为

$$X_m(n) = \sum_{i=1}^P \tilde{S}_i(n) \exp \left[j \frac{2\pi}{\lambda} d(m-1) \sin \theta_i \right] + W_m(n) \quad (1)$$

其中 $\tilde{S}_i(n)$ 为第 i 个信号源在第 1 个阵元上的复包络; θ_i 为该信号源相对于阵列的法向角; d 为阵元间隔; λ 为波长; P 为信号源个数,假定信号为零均值、非高斯分布的平稳过程; $W_m(n)$ 为阵元上的接收噪声,假定 $W_m(n)$ 具有零均值且为高斯分布。

对 $\tilde{S}_i(n)$ 和 $\tilde{S}_j(n)$ ($i, j = 1, 2, \dots, P$), $W_m(n)$ 和 $W_l(n)$ ($l, m = 1, 2, \dots, M+1$) 是否相关均不做假设,但要求信号源与噪声间是相互独立的。

定义空间三阶矩函数

$$C_3(k) = E[X_1(n)X_1^*(n)X_{k+1}(n)], \quad (k = 1, 2, \dots, M) \quad (2)$$

将(1)式代入(2)式有

$$C_3(k) = E \left\{ \left[\sum_{i=1}^P \tilde{S}_i(n) \exp \left(j \frac{2\pi d}{\lambda} k \sin \theta_i \right) + W_{k+1}(n) \right] \times \left[\sum_{i=1}^P \tilde{S}_i^*(n) + W_1^*(n) \right] \left[\sum_{m=1}^P \tilde{S}_m(n) + W_1(n) \right] \right\} \quad (3)$$

由于噪声和信号为零均值且相互独立,那么,(3)式中凡是同时包含有信号和噪声的项,经 $E[\cdot]$ 运算后都为零。

由文献[3]给出的有关三阶矩的性质可知,(3)式中只包含有噪声的项等于零,即

$$E[W_{k+1}(n)W_1^*(n)W_1(n)] = 0$$

根据这两点我们有

$$C_3(k) = \sum_{i=1}^P c(i) \exp \left[j \frac{2\pi d}{\lambda} (k-1) \sin \theta_i \right] \quad (4)$$

其中

$$c(i) = E \left[\sum_{m=1}^P \sum_{l=1}^P \tilde{S}_l^*(n) \tilde{S}_m(n) \tilde{S}_i(n) \exp \left(j \frac{2\pi d}{\lambda} \sin \theta_i \right) \right]$$

用 $C_3(k)$ 构造下列矩阵

$$R = \begin{bmatrix} C_3(1) & C_3(2) & \cdots & C_3(K) \\ C_3(2) & C_3(3) & \cdots & C_3(K+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_3(L) & C_3(L+1) & \cdots & C_3(M) \end{bmatrix} \quad (5)$$

这里取 $L, K > P$ 且 $L + K = M + 1$ 。

由文献[6]提出的数据矩阵分解概念可知,(5)式可写成

$$R = A_L R_{LK} A_K^T \quad (6)$$

其中,

$$\begin{aligned}
 A_L &= [a_{L1}, a_{L2}, \dots, a_{LP}], \\
 a_{Li} &= \{1, \exp(j2\pi d \sin \theta_i / \lambda), \dots, \exp[j2\pi d(L-1) \sin \theta_i / \lambda]\}^T \\
 A_K &= [a_{K1}, a_{K2}, \dots, a_{KP}], \\
 a_{Ki} &= \{1, \exp(j2\pi d \sin \theta_i / \lambda), \dots, \exp[j2\pi d(K-1) \sin \theta_i / \lambda]\}^T \\
 R_{LK} &= \text{diag}[c(1), c(2), \dots, c(P)]
 \end{aligned}$$

由(6)式可知, a_{Li} 和 a_{Ki} 分别为 L 维和 K 维范德蒙矢量, 若 $d/\lambda \leq 1/2$ 且 $\theta_i \neq \theta_j$, 那么 a_{Li} 和 a_{Ki} ($i = 1, 2, \dots, P$) 都是 P 个线性独立矢量, 它们分别张成复矢量空间 C^L 和 C^K 中的 P 维子空间, 这些子空间包含了所有信号的方向信息, 因此称之为信号子空间, 分别记为 S_P^L 和 S_P^K , 即

$$\begin{aligned}
 S_P^L &= \text{span}\{a_{L1}, a_{L2}, \dots, a_{LP}\} \\
 S_P^K &= \text{span}\{a_{K1}, a_{K2}, \dots, a_{KP}\}
 \end{aligned}$$

一旦确定了信号子空间, 则方向估计问题转变为下面的最小化问题:

$$\min_{\theta} \|Q_1^L a_L(\theta)\|^2 \quad \text{或} \quad \min_{\theta} \|Q_1^K a_K(\theta)\|^2 \quad (7)$$

其中 $\|\cdot\|$ 为欧几里德范数; $Q_1^L = I - Q_P^L$; $Q_1^K = I - Q_P^K$; Q_P^L 和 Q_P^K 分别为 S_P^L 和 S_P^K 上的正交投影算子; Q_1^L 和 Q_1^K 为对应于噪声子空间上的正交投影算子;

$$a_L(\theta) = \{1, \exp[j(2\pi d/\lambda) \sin \theta], \dots, \exp[j(2\pi d/\lambda)(L-1) \sin \theta]\}^T$$

$$a_K(\theta) = \{1, \exp[j(2\pi d/\lambda) \sin \theta], \dots, \exp[j(2\pi d/\lambda)(K-1) \sin \theta]\}^T$$

称之为搜索矢量。

实际应用时, 常用的所谓空间谱表示如下:

$$S_L(\theta) = 1/\|Q_1^L a_L(\theta)\|^2 \quad \text{或} \quad S_K(\theta) = 1/\|Q_1^K a_K(\theta)\|^2 \quad (8)$$

在对应于信号方向 θ_i ($i = 1, 2, \dots, P$) 上, 上式就会出现较大的峰值。

由此可见, 从三阶矩函数 $C_3(k)$ 到方向的估计关键在于准确地找出信号子空间。

三、信号子空间的建立

从(6)式容易知道

$$\text{rank}[R] = P$$

根据有关的奇异值分解定理^[4], 可将 R 写为

$$R = \sum_{i=1}^P \sigma_i U_i V_i^H \quad (9)$$

其中 σ_i ($i = 1, 2, \dots, P$) 为 R 的非零奇异值, U_i ($i = 1, 2, \dots, L$) 和 V_i ($i = 1, 2, \dots, K$) 分别为 R 的左和右奇异矢量, 相应地 $U = [U_1, U_2, \dots, U_L]$ 和 $V = [V_1, V_2, \dots, V_K]$ 分别为 L 维和 K 维单位正交阵。

对于 $V_{P+1}, V_{P+2}, \dots, V_K$ 有

$$RV_i = 0, \quad (i = P+1, \dots, K)$$

即

$$A_k^T V_i = 0 \quad \text{或} \quad a_{ki}^T V_i = 0, \quad (j = 1, 2, \dots, P) \quad (10)$$

(10)式说明了

$$\text{span}\{V_{P+1}^*, V_{P+2}^*, \dots, V_K^*\} \perp \text{span}\{a_{K1}, a_{K2}, \dots, a_{KP}\}$$

类似地,

$$\text{span}\{U_{P+1}, U_{P+2}, \dots, U_L\} \perp \text{span}\{a_{L1}, a_{L2}, \dots, a_{LP}\}$$

即

$$\text{span}\{U_1, U_2, \dots, U_P\} = \text{span}\{a_{L1}, a_{L2}, \dots, a_{LP}\} = S_P^L \quad (11)$$

相应地,

$$Q_P^L = \sum_{i=1}^P U_i U_i^H, \quad Q_1^L = I - Q_P^L = \sum_{i=P+1}^L U_i U_i^H \quad (12)$$

至此,我们找到了用三阶矩矩阵 R 的左奇异矢量建立信号子空间并计算正交投影算子的方法。用这种方法进行方向估计时的步骤为

- (1) 由接收信号估计空间三阶矩函数 $C_3(k)$;
- (2) 用 $C_3(k)$ 构造矩阵 R ;
- (3) 对 R 进行奇异值分解, 求出左奇异矢量;
- (4) 根据(12)式计算正交投影算子;
- (5) 利用(8)式确定信号源方向。

从整个推导过程来看,这个方法既没有假定信号源间不相干,又没有假定噪声之间独立,因此比 MUSIC 法和文献[4]提出的方法有更广泛的适用范围。

如果三阶矩函数完全确知,那么用这种方法可以分辨空间任意接近的信号源,从而有效地实现了信号源相干和噪声空间相关情况下的空间信号的高分辨处理。

此外,正交投影算子 Q_P^L 还可以通过下式得到

$$Q_P^L = R R^+ \quad (13)$$

其中 R^+ 为 R 的 $M-P$ 伪逆。上式说明了 R 的列矢量张成子空间上的正交投影算子恰为信号子空间上的正交投影算子。这样,所需的投影算子 Q_P^L 可以通过文献[5]给出的递归算法直接得到,而无需计算奇异值和奇异矢量。

关于(13)式的证明见附录。

四、模拟结果

为了验证这一基于三阶矩的方向估计方法,本文给出两组模拟结果。

第1组 信号源个数为4,信噪比均为7 dB,入射角度分别为 -52° , -45° , 5° 和 15° ,阵元数为10,快拍次数为30,用(8)式得到的空间谱如图1所示。

第2组 信号源个数为2,信噪比均取7 dB,入射角度为 -4° 和 3° ,阵元数为5,快拍次数为30。空间谱如图2所示。

两组模拟实验中信号源之间均相干,噪声间也完全相关,显然,在这种情况下 MUSIC 法和文献[4]的方法变得无效,而用本文的方法却可以得到准确的分辨和估计。因此,模拟结果与前面的理论分析是一致的。

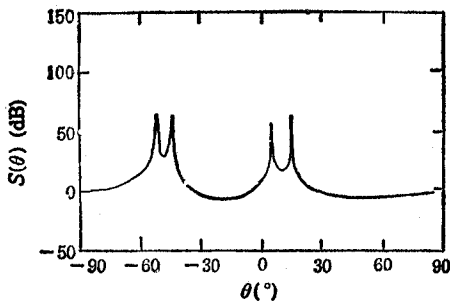


图1 第1组空间谱曲线

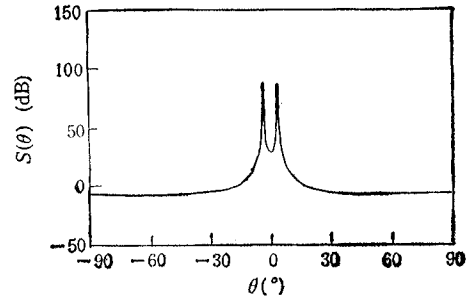


图2 第2组空间谱曲线

五、结 束 语

本文提出了一种基于空间三阶矩的方向估计方法,这种方法在处理时与信号源间是否相干、噪声是否空间相关均没有关系。若空间三阶矩已知,那么它可以分辨空间任意接近的信号,从而实现了信号源相干和噪声空间相关情况下的高分辨处理。

根据文献[8]给出的分析,我们还证明了在统计意义下降元随机扰动对这种方法的性能没有影响,并且我们正在考虑有限次快拍下这种方法的统计性能。关于这些工作,将在另文发表。

附 录

根据 $M-P$ 伪逆的定义有

$$R^+ = \lim_{\alpha \rightarrow 0} (R^H R + \alpha I)^{-1} R^H \quad (A1)$$

又,将(9)式写为

$$R = U D V^H \quad (A2)$$

其中 D 为一个 $L \times K$ 维矩阵, D 中除主对角线上前 P 个元素取 R 的非零奇异值外,其它元素均为零。

将 (A2) 式代入 (A1) 式,得

$$\begin{aligned} R^+ &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} (R^H R + \alpha I)^{-1} R^H = \lim_{\alpha \rightarrow 0} (V D^H D V^H + \alpha I)^{-1} V D^H U^H \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} [V (D^H D + \alpha I) V^H]^{-1} V D^H U^H = \lim_{\alpha \rightarrow 0} V (D^H D + \alpha I)^{-1} V^H V D^H U^H \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} V (D^H D + \alpha I)^{-1} D^H U^H \end{aligned} \quad (A3)$$

根据 (A3) 式求 RR^+ , 有

$$RR^+ = U D V^H \lim_{\alpha \rightarrow 0} V (D^H D + \alpha I)^{-1} D^H U^H = \lim_{\alpha \rightarrow 0} U D (D^H D + \alpha I)^{-1} D^H U^H \quad (A4)$$

容易证明

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} D (D^H D + \alpha I)^{-1} D^H = I_P \quad (A5)$$

其中, I_P 为 L 阶方阵,除主对角线上前 P 个元素为 1 外,其余元素均为零。将 (A5) 式

代入 (A 4) 式,

$$RR^+ = UI_p U^H = \sum_{i=1}^p U_i U_i^H = Q_p^L$$

故(13)式得证.

参 考 文 献

- [1] R. O. Schmidt, *IEEE Trans. on AP*, **AP-34**(1986)3, 276—280.
- [2] V. U. Reddy, A. Paulraj, T. Kailth, *IEEE Trans. on ASSP*, **ASSP-35**(1987)7, 927—936.
- [3] C. L. Nikias, M. R. Raghuveer, *Proc. IEEE*, **75**(1987)7, 869—891.
- [4] R. Pan, C. L. Nikias, Harmonic descomposition methods in cumulant domains, in proceedings of ICASSP'88, (1988), New York, pp. 2356—2359.
- [5] T. Kohonen, *Self-Organization and Associative Memory*, New York, Springer-Verlag, (1989), pp. 30—58.
- [6] Gao Shiwei (高世伟), Bao Zheng (保铮), *Electron. Lett.*, **23**(1987)12, 643—645.
- [7] 倪国熙,常用的矩阵理论和方法,上海科学技术出版社,1984年,第二章.
- [8] Luo Falong (罗发龙), *IEE Proc. -F*, **137**(1990)4, 289—290.

BEARING ESTIMATION BY USE OF THIRD-ORDER CUMULANTS

Shi Xiangnian Luo Falong

(*Xidian University, Xi'an 710071*)

Abstract A novel algorithm based on the spatial third-order cumulants is presented. This algorithm is independent of the coherence of signals and the correlator of the additive noises with high resolution. The simulation results demonstrate the effectiveness of this scheme.

Key words Array signal processing; Bearing estimation; Third-order cumulants