# 收费情形下多用户类随机用户均衡交通分配的效率损失上界

余孝军[1,2]，黄海军[1]

(1. 北京航空航天大学 经济管理学院，北京 100191；2. 贵州财经学院 数学与统计分院，贵阳 550004)

**摘　要**：研究了收费情形下多用户类随机交通分配网络中，随机用户均衡相对系统最优的效率损失问题，运用变分不等式方法得到它的上界。研究发现，无论采用时间度量准则还是费用度量准则，相对于系统最优的效率损失上界都与路段出行时间函数类、出行者的社会经济特性、道路收费、网络复杂程度、网络总出行需求以及出行者对网络的熟悉程度相关。

**关键词**：交通运输工程；随机用户均衡；变分不等式；效率损失；收费；多用户类

**中图分类号**：U491　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1671-5497(2009)Sup. 2-0071-05

# Bounding efficiency loss of multiclass stochastic user equilibrium traffic assignment under road pricing

YU Xiao-jun[1,2], HUANG Hai-jun[1]

(1. *School of Economics and Management*, *Beijing University of Aeronautics and Astronautics*, *Beijing* 100191, *China*; 2. *School of Mathematics and Statistics*, *Guizhou College of Finance and Economics*, *Guiyang* 550004, *China*)

**Abstract**: The efficiency losses of multiclass stochastic user equilibrium traffic assignment under road pricing against system optimization (SO) was investigated. The upper bounds of efficiency losses were analytically derived by variational inequality method. It is shown that whether using the time-based or monetary-based measures for decision making, the upper bound against SO always depends on the class of link travel time functions, the users' socio-economic characteristics, the road pricing scheme, the network complexity, the total traffic demand and the degree of perception error.

**Key words**: engineering of communication and transportation; stochastic user equilibrium; variational inequality; efficiency loss; toll; multiclass

拥挤路段收费是减少交通网络中拥挤现象的一种常见的经济方法。Yang 和 Huang[1]用经典的边际成本定价原理研究了存在排队现象时广义拥挤道路网络的拥挤收费问题。Yang[2]考虑了随机交通均衡网络中拥挤道路收费问题。Yang 和 Huang[3]研究了离散时间价值系数下多用户类多准则交通网络均衡和系统最优分配问题，并分别得到了时间决策准则和费用决策准则下的最优道路收费。最近，Marcotte 和 Zhu[4]证明了连续时间价值系数下多用户类交通网络中最优收费的存在性。然而，在交通网络分配中，用户均衡通常难以达到系统最优的效果[5]，比较著名的例子

**收稿日期**：2009-04-27.

**基金项目**："973"国家重点基础研究发展规划项目(2006CB705503)；国家自然科学基金项目(70521001).

**作者简介**：余孝军(1974－)，男，副教授，博士研究生. 研究方向：交通运输规划与管理. E-mail：xjyu0508@sina.com

**通信作者**：黄海军(1964－)，男，教授，博士生导师. 研究方向：交通运输规划与管理.
E-mail：haijunhuang@buaa.edu.cn

就是“Brass 诡异”现象,然而二者之间的差距到底有多大,长期以来没有得到深入的研究。Roughgarden 和 Tardos[6] 在 2002 年首次使用 Koutsoupias 和 Papadimitriou[7] 提出的新概念——非合作代价(price of anarchy)来确定交通网络中由于用户的自私行为而导致整个系统的效率损失上界。之后,不少学者对单用户类、确定性均衡的效率损失问题作了大量的扩展研究。目前,界定随机用户均衡效率损失的研究工作还比较少,Guo 等[8] 讨论了单用户类的情形,Huang 等[9] 仅仅将其扩展到 ATIS 作用下的双用户类情形。同时,收费对效率损失的影响也引起了学者们的广泛兴趣。Karakostas 和 Kolliopoulos[10] 证明了在路段出行成本函数满足一定条件的交通网络中,如果将拥挤道路收费看作系统出行成本一部分的话,最优收费下的效率损失小于没有收费情形下的效率损失。Han 和 Yang[11] 分析了离散时间价值系数的多用户交通网络中第二最优收费分别在时间度量准则和费用度量准则下的效率损失问题。作者认为收费不应作为系统总出行成本的一部分,在这个前提下研究了多用户类随机用户均衡对系统最优的效率损失上界,还分别在时间度量准则和费用度量准则下扩展了对效率损失上界问题的研究。

# 1 收费情形下多用户类随机均衡模型

## 1.1 符号定义

有向图 $G=(N,A)$ 表示一个交通网络,其中 $\mathbf{N}$ 为节点集合,$\mathbf{A}$ 为路段集合($|A|$ 为总路段数)。$\mathbf{W}$ 为所有 OD 对集合,$\mathbf{R}$ 为所有路径的集合($|\mathbf{R}|$ 为总路径数),相应地,$\mathbf{R}_w$ 表示连接 OD 对 $w\in W$ 的所有路径集合($|R_w|$ 为可行路径总数)。假设交通网络中有 $M$ 类出行者,第 $m$ 类出行者的时间价值系数(Value of time)为 $\beta_m$($\beta_m>0$)。定义其他符号为 $d_w^m$ 为 OD 对 $w$ 之间第 $m$ 类出行者的固定出行需求;$v_a^m$ 为路段 $a$ 上第 $m$ 类出行者的流量;$v_a$ 为路段 $a$ 上的总流量;$\boldsymbol{v}=(v_a^1,\cdots,v_{|A|}^1,\cdots,v_a^M,\cdots v_{|A|}^M)$ 为路段流量向量;$\tau_a$ 为路段 $a$ 上的收费;$\boldsymbol{\tau}=(\tau_a,\cdots,\tau_{|A|})$ 为路段收费向量;$t_a(v_a)$ 为路段 $a$ 上的可分离出行时间函数,且为路段总流量 $v_a$ 的可微增函数;$f_{rw}^m$ 为路径 $r\in\mathbf{R}_w$ 上第 $m$ 类出行者的流量;$\boldsymbol{f}=(f_r^1,\cdots,f_{|R|}^1,\cdots,f_r^M,\cdots,f_{|R|}^M)$ 为路径流量向量;如果路段 $a$ 在路径 $r\in\mathbf{R}_w$ 上,$\delta_{ar}^w=1$,否则为 0;$c_a^m(v_a)$ 为第 $m$ 类出行者在路段 $a$ 上的实际出行成本函数,且为路段总流量 $v_a$ 的增函数;$C_{rw}^m$、$c_{rw}^m$ 分别为第 $m$ 类出行者对路径 $r\in\mathbf{R}_w$ 的理解出行成本和实际出行成本。

可列出下面的关系式:

$$c_{rw}^m=\sum_{a\in A}c_a^m\delta_{ar}^w,\ r\in\mathbf{R}_w,w\in\mathbf{W},\forall m \tag{1}$$

$$v_a^m=\sum_{w\in W}\sum_{r\in R_w}f_{rw}^m\delta_{ar}^w,\ a\in\mathbf{A},\forall m \tag{2}$$

$$v_a=\sum_{m=1}^{M}v_a^m,\ a\in\mathbf{A},\forall m \tag{3}$$

$$\sum_{r\in R_w}f_{rw}^m=d_w^m,\ w\in\mathbf{W},\forall m \tag{4}$$

$$f_{rw}^m\geqslant 0,\ r\in\mathbf{R}_w,w\in\mathbf{W},\forall m \tag{5}$$

令 $\Omega_v=\{v\mid\exists\boldsymbol{f}$ 满足式(2)-(5)$\}$表示所有的可行路段流量集合,$\Omega_f=\{\boldsymbol{f}\mid\boldsymbol{f}$ 满足式(2)-(5)$\}$为所有的可行路径流量集合。显然,$\Omega_v$、$\Omega_f$ 都是有界的闭凸集.

## 1.2 收费情形下的随机均衡交通分配模型

在随机用户均衡情形下,一般假定出行者依据随机效用理论,选择理解出行成本最小的路径出行。设第 $m$ 类出行者选择路径 $r\in\mathbf{R}_w$ 的出行效用表示为

$$U_{rw}^m=-\theta C_{rw}^m=-\theta c_{rw}^m+\xi_{rw}^m \tag{6}$$
$$r\in R_w,w\in\mathbf{W},\forall m$$

式中:$\theta(\theta>0)$ 为出行者对路网熟悉程度的参数;$\xi_{rw}^m$ 为对应的随机项,表示不可测量或者没有观察到的效用因素。根据效用极大化原则可知,若式(6)中的随机变量相互独立且都服从相同的 Gumbel 分布,则第 $m$ 类出行者选择路径 $r\in\mathbf{R}_w$ 的概率 $P_{rw}^m$ 可以写成下面的 Logit 形式,即

$$P_{rw}^m=\frac{\exp(-\theta c_{rw}^m)}{\sum_{l\in R_w}\exp(-\theta c_{lw}^m)} \tag{7}$$
$$r\in\mathbf{R}_w,w\in\mathbf{W},\forall m$$

相应地,基于 Logit 加载下的路径流量是

$$f_{rw}^m=d_w^mP_{rw}^m,\ r\in\mathbf{R}_w,w\in\mathbf{W},\forall m \tag{8}$$

由于式(7)中的路径选择概率又依赖于路径流量,所以随机均衡条件实质上是一个不动点问题。采用文献[12]的方法,可将其转化为等价的变分不等式问题,即引理 1。

**引理 1** 在基于 Logit 路径选择的假设下,固定需求的多用户类随机均衡交通分配问题等价于求解下面的变分不等式模型,即存在均衡路径流

量 $\bar{f} \in \Omega_f$ ,满足

$$\sum_{w \in W} \sum_{r \in R_w} \sum_{m=1}^{M} \langle c_{rw}^m(\bar{f}) + \frac{1}{\theta} \ln f_{rw}^m, f_{rw}^m - \bar{f}_{rw}^m \rangle \geqslant 0 \quad \forall f \in \Omega_f \tag{9}$$

下面,考虑 $c_a^m$ 在两种不同的出行决策准则下的表现形式。在时间度量准则下有

$$c_a^m(v_a) = t_a(v_a) + \tau_a/\beta_m \quad a \in A, \forall m \tag{10}$$

在费用度量准则下有

$$c_a^m(v_a) = \beta_m t_a(v_a) + \tau_a \quad a \in \mathbf{A}, \forall m \tag{11}$$

将式(10)和(11)分别代入式(9)并结合关系式(2)和(3),可分别得到时间度量准则和费用度量准则下的变分不等式模型,即

$$\sum_{a \in A} t_a(\bar{\boldsymbol{v}})(v_a - \bar{v}_a) + \frac{1}{\theta} \sum_{w \in W} \sum_{r \in R_w} \sum_{m=1}^{M} \ln \bar{f}_{rw}^m (f_{rw}^m - \bar{f}_{rw}^m) + \sum_{a \in A} \sum_{m=1}^{M} \frac{\tau_a}{\beta_m} (v_a^m - \bar{v}_a^m) \geqslant 0 \quad \forall f \in \Omega_f \tag{12}$$

$$\sum_{a \in A} \sum_{m=1}^{M} \beta_m t_a(\bar{\boldsymbol{v}})(v_a^m - \bar{v}_a^m) + \frac{1}{\theta} \sum_{w \in W} \sum_{r \in R_w} \sum_{m=1}^{M} \ln \bar{f}_{rw}^m (f_{rw}^m - \bar{f}_{rw}^m) + \sum_{a \in A} \tau_a (v_a - \bar{v}_a) \geqslant 0 \quad \forall f \in \Omega_f \tag{13}$$

## 2　时间度量准则下的效率损失

令 $\bar{\boldsymbol{v}} \in \Omega_v$ 和 $\bar{f} \in \Omega_f$ 分别表示随机均衡问题(12)下的路段和路径流量向量,令 $\hat{\boldsymbol{v}} \in \Omega_v$ 和 $\hat{\boldsymbol{f}} \in \Omega_f$ 分别表示时间度量准则下系统最优的路段和路径流量向量,即问题 $\min \sum_{a \in A} t_a(v_a) v_a$, s. t. $\boldsymbol{v} \in \Omega_v$ 的解。定义时间度量准则下随机用户均衡相对系统最优的效率损失为

$$\rho_{\text{sue}}^t = T_{\text{sue}}^t / T_{\text{so}}^t \tag{14}$$

式中:$T_{\text{so}}^t = \sum_{a \in A} t_a(\hat{v}_a) \hat{v}_a$ 和 $T_{\text{sue}}^t = \sum_{a \in A} t_a(\bar{v}_a) \bar{v}_a$ 分别为系统最优与道路收费情形下随机用户均衡的系统总出行时间。显然 $\rho_{\text{sue}}^t \geqslant 1$ 。下面推导式(14)的上界。

在变分不等式(12)中令 $f = \hat{f}$ ,则可得

$$T_{\text{sue}}^t \leqslant T_{\text{so}}^t + \sum_{a \in A} (t_a(\bar{v}_a) - t_a(\hat{v}_a)) \hat{v}_a + \sum_{a \in A} \sum_{m=1}^{M} \frac{\tau_a}{\beta_m} (\hat{v}_a^m - \bar{v}_a^m) + \frac{1}{\theta} \sum_{w \in W} \sum_{r \in R_w} \sum_{m=1}^{M} \ln \bar{f}_{rw}^m (\hat{f}_{rw}^m - \bar{f}_{rw}^m) \tag{15}$$

先寻找不等式(15)右边第二项与第三项之和的上界。类似 Han 和 Yang[11] 的工作,对每一个路段出行时间函数 $t_a = t_a(z_a)$ 和非负路段流量 $z_a \geqslant 0$,假设路网中满足 $0 \leqslant \tau_a \leqslant \beta_{\min} \bar{v}_a t'_a(\bar{v}_a)$ 的路段 $a \in A_1 \subset A$ ,其他路段满足 $\tau_a > \beta_{\min} \bar{v}_a t'_a(\bar{v}_a)$,在 $a \in A_1$ 上定义

$$\gamma_1(L, \tau, \beta) = \max_{t_a \in L, a \in A_1} \gamma_a(t_a, \bar{v}_a, \tau_a, \beta) = \max_{v_a \geqslant 0} \frac{(t_a(\bar{v}_a) - t_a(v_a)) v_a + \sum_{m=1}^{M} \frac{1}{\beta_m} (v_a^m - \bar{v}_a^m) \tau_a}{t_a(\bar{v}_a) \bar{v}_a} \tag{16}$$

在 $a \notin A_1$ 上定义

$$\gamma_2(L, \tau, \beta) = \max_{t_a \in L, a \notin A_1} \gamma_a(t_a, \bar{v}_a, \tau_a, \beta) = \max_{v_a \geqslant 0} \frac{(t_a(\bar{v}_a) - t_a(v_a)) v_a + \sum_{m=1}^{M} \frac{1}{\beta_m} (v_a^m - \bar{v}_a^m) \tau_a}{t_a(v_a) v_a} \tag{17}$$

式中:$v_a = \sum_{m=1}^{M} v_a^m$ 。不失一般性,假定 0/0=0 成立。对任意给定的路段出行时间函数类 $L$ ,用 $\hat{v}_a$ 分别替代式(16)和(17)中的 $v_a$ ,可得

$$\sum_{a \in A} (t_a(\bar{v}_a) - t_a(\hat{v}_a)) \hat{v}_a + \sum_{a \in A} \sum_{m=1}^{M} \frac{\tau_a}{\beta_m} (\hat{v}_a^m - \bar{v}_a^m) \leqslant \gamma_1(L, \tau, \beta) T_{\text{sue}}^t + \gamma_2(L, \tau, \beta) T_{\text{so}}^t \tag{18}$$

由文献[8]中的引理 3 可得式(15)右边第四项的上界为

$$\frac{1}{\theta} \sum_{w \in W} \sum_{r \in R_w} \sum_{m=1}^{M} \ln \bar{f}_{rw}^m (\hat{\boldsymbol{f}}_{rw}^m - \bar{f}_{rw}^m) \leqslant \frac{1}{\theta} \sum_{w \in W} \sum_{m=1}^{M} k_w d_w^m \tag{19}$$

式中:$k_w$ 为方程 $k_w e^{k_w+1} = |R_w| - 1, w \in W$ 的解。令 $D = \sum_{w \in W} \sum_{m=1}^{M} d_w^m$ 表示网络中的总出行需求,$\bar{k} = \sum_{w \in W} \sum_{m=1}^{M} \left( \frac{d_w^m}{D} \right) k_w$ ,进一步定义 $\bar{c} = T_{so}^t / D$ 为系统最优下所有出行者的平均出行时间,则有定理 1。

**定理 1**　给定一个可分离的路段出行时间函数类 $L$ ,其中路段出行时间函数 $t_a(v_a)$ 是随着路段总流量 $v_a$ 单调递增的,$\bar{\boldsymbol{v}}$ 为时间度量准则下路段收费向量为 $\tau$ 时的随机用户均衡路段流量向

量，$\hat{v}$是时间度量准则下系统最优的路段流量解，则

$$\rho_{\text{sue}}^{t}=\frac{T_{\text{sue}}^{t}}{T_{\text{so}}^{t}}\leqslant\frac{1+\gamma_{2}(L,\tau,\beta)+\dfrac{\bar{k}}{\theta\bar{c}}}{1-\gamma_{1}(L,\tau,\beta)}\qquad(20)$$

定理 1 表明，在时间度量准则下，效率损失上界依赖于 $\gamma_1(L,\tau,\beta)$ 、$\gamma_2(L,\tau,\beta)$ 、$\theta$ 、$\bar{k}$ 和 $\bar{c}$ 等 5 个参数，同时还满足下列关系：

(1)它是 $\gamma_1(L,\tau,\beta)$ 和 $\gamma_2(L,\tau,\beta)$ 的增函数，其中 $\gamma_1(L,\tau,\beta)$ 和 $\gamma_2(L,\tau,\beta)$ 是无量纲参数，与路段出行时间函数、路段收费和时间价值系数相关。当 $\tau$ 为零向量时，则 $\gamma_2(L,\tau,\beta)$ 为零，$\gamma_1(L,\tau,\beta)$ 是一个只与路段出行时间函数类相关的参数，且有 $\rho_{\text{sue}}^{t}\leqslant\left[\dfrac{1}{1-\gamma(L)}\right]\left[1+\dfrac{\bar{k}}{\theta\bar{c}}\right]$ 。

(2)效率损失上界是出行者对网络熟悉程度参数 $\theta$ 的减函数，当 $\theta\to+\infty$ 时，随机交通分配模型变成确定性交通分配模型，则有 $\rho_{\text{sue}}^{t}\leqslant\dfrac{1+\gamma_2(L,\tau,\beta)}{1-\gamma_1(L,\tau,\beta)}$，这就是 Han 和 Yang[11] 所得到的结论。

(3)效率损失上界是表示网络复杂程度参数 $\bar{k}$ 的增函数。

(4)效率损失上界是路网中所有出行者平均出行时间 $\bar{c}$ 的减函数，间接地，也是总交通需求的增函数。

## 3 费用度量准则下的效率损失

令 $\bar{\boldsymbol{v}}\in\Omega_v$ 和 $\bar{\boldsymbol{f}}\in\Omega_f$ 分别表示随机均衡(13)下的路段和路径流量向量，令 $\tilde{\boldsymbol{v}}\in\Omega_v$ 和 $\tilde{\boldsymbol{f}}\in\Omega_f$ 分别表示费用度量准则下系统最优时的路段和路径流量向量，即问题 $\min\sum_{a\in A}\sum_{m=1}^{M}\beta_m t_a(v_a)v_a^m$, s. t. $\boldsymbol{v}\in\Omega_v$ 的解。定义费用度量准则下随机用户均衡相对系统最优的效率损失为

$$\rho_{\text{sue}}^{c}=T_{\text{sue}}^{c}/T_{\text{so}}^{c}\qquad(21)$$

式中：$T_{\text{so}}^{c}=\sum_{a\in A}\sum_{m=1}^{M}\beta_m t_a(\tilde{v}_a)\tilde{v}_a^m$，$T_{\text{sue}}^{c}=\sum_{a\in A}\sum_{m=1}^{M}\beta_m\bar{v}_a^m t_a(\bar{v}_a)$ 分别为费用度量准则下系统最优和道路收费情形下随机用户均衡的系统总出行费用。显然，$\rho_{\text{sue}}^{c}\geqslant 1$ 。下面，推导式(21)的上界。

在变分不等式(13)中令 $\boldsymbol{f}=\tilde{\boldsymbol{f}}$，则有

$$T_{\text{sue}}^{c}\leqslant T_{\text{so}}^{c}+\sum_{a\in A}\sum_{m=1}^{M}\beta_m(t_a(\bar{v}_a)-t_a(\tilde{v}_a))\tilde{v}_a^m+$$
$$+\sum_{a\in A}\tau_a(\tilde{v}_a-\bar{v}_a)+\frac{1}{\theta}\sum_{w\in W}\sum_{r\in R_w}\sum_{m=1}^{M}\ln\bar{f}_{rw}^m(\tilde{f}_{rw}^m-\bar{f}_{rw}^m)\qquad(22)$$

先确定不等式(22)右边第二项与第三项之和的上界。类似 Han 和 Yang[11] 的工作，对每一个路段出行时间函数 $t_a=t_a(z_a)$ 、非负路段流量 $z_a\geqslant 0$ 和时间价值系数 $\beta_m$ ，定义

$$\gamma_a(t_a,z_a,\tau_a,\beta)=\frac{1}{\left(\sum_{m=1}^{M}\beta_m z_a^m\right)t_a(z_a)}\max_{v_a^m\geqslant 0}$$
$$\left\{\sum_{m=1}^{M}\beta_m v_a^m(t_a(z_a)-t_a(v_a))+\tau_a(v_a-z_a)\right\}\qquad(23a)$$

设 $A_2=\{a\in A\mid\gamma_a(t_a,z_a,\tau_a,\beta)<1\}$ ，对于 $a\in A_2$ 定义

$$\bar{\gamma}(L,\tau,\beta)=\sup_{t_a\in L,a\in A_2}\gamma_a(t_a,z_a,\tau_a,\beta)\qquad(23b)$$

不失一般性，假设 0/0＝0 成立。对于 $a\notin A_2$ ，定义

$$\tilde{\gamma}(L,\tau,\beta)=\sup_{t_a\in L}g(t_a,z_a,\tau_a,\beta)\qquad(23c)$$

式中：$g(t_a,z_a,\tau_a,\beta)=\max\limits_{v_a^m\geqslant 0,a\notin A_2}h(x)=$

$$\frac{\sum_{m=1}^{M}\beta_m v_a^m(t_a(z_a)-t_a(v_a))+\tau_a(v_a-z_a)}{\sum_{m=1}^{M}\beta_m v_a^m t_a(v_a)}$$

可知不等式(22)右边第二项与第三项之和满足

$$\sum_{a\in A}\sum_{m=1}^{M}\beta_m\tilde{v}_a^m(t_a(\bar{v}_a)-t_a(\tilde{v}_a))+\sum_{a\in A}\tau_a(\tilde{v}_a-\bar{v}_a)=$$
$$\sum_{a\in A_2}\sum_{m=1}^{M}\beta_m\tilde{v}_a^m(t_a(\bar{v}_a)-t_a(\tilde{v}_a))+\sum_{a\in A_2}\tau_a(\tilde{v}_a-\bar{v}_a)+$$
$$\sum_{a\notin A_2}\sum_{m=1}^{M}\beta_m\tilde{v}_a^m(t_a(\bar{v}_a)-t_a(\tilde{v}_a))+\sum_{a\notin A_2}\tau_a(\tilde{v}_a-\bar{v}_a)\leqslant$$
$$\bar{\gamma}(L,\tau,\beta)T_{\text{sue}}^{c}+\tilde{\gamma}(L,\tau,\beta)T_{\text{so}}^{c}\qquad(24)$$

上面的不等式由定义(23b)和(23c)给出。

根据文献[8]中引理 3，可确定式(22)右边第四项的上界，即

$$\sum_{r\in R_w}\ln\bar{f}_{rw}^m(\tilde{f}_{rw}^m-\bar{f}_{rw}^m)\leqslant k_w d_w^m\qquad(25)$$

令 $D=\sum_{w\in W}\sum_{m=1}^{M}d_w^m$ 表示路网中的总出行需求，$\tilde{c}=T_{\text{so}}^{c}/D$ 表示系统最优状态下所有出行者的平均出行费用，记 $\bar{k}=\sum_{w\in W}\sum_{m=1}^{M}\left[\dfrac{d_w^m}{D}\right]k_w$ ，有下面的定

理 2。

**定理 2**　给定一个可分离的路段出行时间函数类 $L$，其中路段出行时间函数 $t_a(v_a)$ 是随着路段总流量 $v_a$ 单调递增的，$\bar{\boldsymbol{v}}$ 为费用度量准则下路段收费向量为 $\boldsymbol{\tau}$ 时随机用户均衡路段流量向量，$\tilde{\boldsymbol{v}}$ 是费用度量准则下系统最优的路段流量，则

$$\rho_{\mathrm{sue}}^{c}=\frac{T_{\mathrm{sue}}^{c}}{T_{\mathrm{so}}^{c}}\leqslant\frac{1+\tilde{\gamma}(L,\tau,\beta)+\dfrac{\bar{k}}{\theta\tilde{c}}}{1-\bar{\gamma}(L,\tau,\beta)}\qquad(26)$$

定理 2 表明，在费用度量准则下，随机用户均衡交通分配的效率损失上界依赖于 $\bar{\gamma}(L,\tau,\beta)$、$\tilde{\gamma}(L,\tau,\beta)$、$\theta$、$\bar{k}$ 和 $\tilde{c}$ 等 5 个参数。有如下关系：

(1) 它是 $\bar{\gamma}(L,\tau,\beta)$ 和 $\tilde{\gamma}(L,\tau,\beta)$ 的增函数，其中 $\bar{\gamma}(L,\tau,\beta)$ 和 $\tilde{\gamma}(L,\tau,\beta)$ 是无量纲参数，与路段出行时间函数、路段收费和时间价值系数相关；当 $\tau$ 为零向量时，$\bar{\gamma}(L,\tau,\beta)$ 和 $\tilde{\gamma}(L,\tau,\beta)$ 变成 $\bar{\gamma}(L,\beta)$ 和 $\tilde{\gamma}(L,\beta)$，从而得到 $\rho_{\mathrm{sue}}^{c}\leqslant\dfrac{1+\tilde{\gamma}(L,\beta)+\bar{k}/\theta\tilde{c}}{1-\bar{\gamma}(L,\beta)}$。

(2)效率损失上界是出行者对网络熟悉程度参数 $\theta$ 的减函数，当 $\theta\to+\infty$，随机交通分配模型变成确定性交通分配模型，有 $\rho_{\mathrm{sue}}^{c}\leqslant\dfrac{1+\tilde{\gamma}(L,\tau,\beta)}{1-\bar{\gamma}(L,\tau,\beta)}$，此即 Han 和 Yang[11] 所得结论。

(3)效率损失上界是表示网络复杂程度参数 $\bar{k}$ 的增函数。

(4)效率损失上界是路网中所有出行者平均出行费用 $\tilde{c}$ 的减函数。

## 4　结束语

系统地研究了时间度量决策准则和费用度量决策准则、并且实施道路收费情形下的随机均衡交通分配问题，考察了该均衡分配相对于系统最优分配的效率损失上界。研究发现，无论采用什么度量准则，相对于系统最优的效率损失上界都与路段出行时间函数类、出行者的社会经济特性、道路收费、网络复杂程度、网络总出行需求以及出行者对网络的熟悉程度相关。值得注意的是，本文得到的效率损失上界不一定是最紧的，得到更小的上界和完成实例验证是本方向国内外学者正在开展的热门研究工作。

**参考文献：**


[1] Yang H, Huang H J. Principle of marginal-cost pricing: how does it work in a general network[J]. Transportation Research Part A: Policy and Practice, 1998, 32(1): 45-54.

[2] Yang H. System optimum, stochastic user equilibrium and optimal link tolls[J]. Transportation Science, 1999, 33 (4): 354-360.

[3] Yang H, Huang H J. The multi-class, multi-criteria traffic network equilibrium and systems optimum problem[J]. Transportation Research Part B, 2004, 38(1): 1-15.

[4] Marcotte P, Zhu D L. Existence and computation of optimal tolls in multiclass network equilibrium problems [J]. Operations Research Letters, 2009, 37 (3): 211-214.

[5] Yang H, Huang H J. Mathematical and Economic Theory of Road Pricing[M]. Oxford: Elsevier, 2005.

[6] Roughgarden T, Tardos E. How bad is selfish routing [J]. Journal of the ACM, 2002, 49(2): 236-259.

[7] Koutsoupias E, Papadimitriou C. Worst-case equilibria [C]// Proceedings of the 16th Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science, NCS 1563, 1999: 404-413.

[8] Guo X L, Yang H, Liu T L. Bounding the inefficiency of logit-based stochastic user equilibrium[J]. European Journal of Operational Research, in Press.

[9] Huang H J, Liu T L, Guo X L, et al. Efficiency loss of a stochastic user equilibrium in a traffic network with ATIS market penetration[C]// Proceedings of the 5th International Conference on Traffic and Transportation Studies, 2006: 709-719.

[10] Karakostas G, Kolliopoulos S G. The efficiency of optimal taxes[C]// Proceedings of the First Workshop on Combinatorial and Algorithmic Aspects of Networking (CAAN), 2004: 3-12.

[11] Han D R, Yang H. The multi-class, multi-criterion traffic equilibrium and the efficiency of congestion pricing[J]. Transportation Research Part E, 2008, 44 (5): 753-773.

[12] 徐兵，朱道立. 多用户多准则固定需求随机交通均衡变分模型[J]. 公路交通科技，2007，24(4)：129-133. Xu Bing, Zhu Dao-li. A multiclass and multicriteria stochastic traffic network equilibrium variational inequality model with fixed demand[J]. Journal of Highway and Transportation Research and Development, 2007, 24(4): 129-133.