

移动群体中基于 SIR 模型的疾病传播行为

夏承遗^{1,2}, 刘忠信¹, 陈增强¹, 袁著社¹

(1. 南开大学 自动化系, 天津 300071; 2. 天津理工大学 天津市智能计算与软件新技术重点实验室, 天津 300191)

摘要: 将 SIR 传染模型嵌入到基于二维规则晶格的个体运动模型中, 研究移动群体中的疾病传播行为。利用平均场理论和大量的数值仿真分析 SIR 模型的传染临界值。结果表明, 有效传播临界速率与晶格中群体密度密切相关, 并且个体运动也会显著影响疾病传播行为。最后, 基于分析和仿真的结果, 提出了一些可行的控制策略来抑制疾病在移动环境下的传播。

关键词: 计算机应用; SIR 模型; 疾病传播; 移动群体; 平均场理论; 临界传播速率

中图分类号: TP39; O231.5 **文献标识码:** A **文章编号:** 1671-5497(2009)05-1274-04

Disease spreading behavior based on SIR model within population of mobile individuals

XIA Cheng-yi^{1,2}, LIU Zhong-xin¹, CHEN Zeng-qiang¹, YUAN Zhu-zhi¹

(1. Department of Automation, Nankai University, Tianjin 300071, China; 2. Tianjin Key Laboratory of Intelligence Computing and Novel Software Technology, Tianjin University of Technology, Tianjin 300191, China)

Abstract: To investigate the disease spreading behavior within population of mobile individuals, the Susceptible-Infective-Removed (SIR) epidemic model is embedded into the individual motion model based on two dimensional (2D) regular lattices. Mean-field theory and large-scale numerical simulations are employed to analyze the critical threshold of the SIR model. The results indicate that the effective critical propagation rate is closely related with the density of mobile individuals, and the motion also remarkably influences the epidemic spreading behavior. At the end, some feasible control strategies, which are based on the analytical and simulation results, are proposed to contain the epidemic spreading within mobile populations.

Key words: computer application; SIR model; disease spreading; mobile population; mean-field theory; critical spreading rate

SARS 的流行、禽流感的扩散以及计算机病毒的泛滥, 使得流行病传播成为生物学、数学、物理学、计算机和控制科学与技术等领域的一个热

点研究问题^[1]。传统的传染病动力学研究是把所有个体分成有限个离散状态, 然后通过一组常微分方程来建模和分析, 如著名的 SIS(susceptible-

收稿日期: 2007-12-18.

基金项目: 国家自然科学基金项目(60574036, 60774088); 高等学校博士学科点专项科研项目(20050055013); 教育部科学技术研究重点项目(107024); 教育部新世纪优秀人才支持计划(NCET); 天津市高校科技发展基金项目(20071306).

作者简介: 夏承遗(1976-), 男, 副教授, 博士研究生. 研究方向: 复杂网络理论及应用. E-mail: xialooking@163.com

通信作者: 陈增强(1964-), 男, 教授, 博士生导师. 研究方向: 智能预测控制, 混沌系统与复杂网络.

E-mail: chenzq@nankai.edu.cn

infected-susceptible)和 SIR(susceptible-infected-removed)模型^[2]。但是,常微分方程的方法总是假定任何个体之间可以任意接触(即均匀混合假设),忽略个体之间接触模式对流行病传播的影响,与真实传播行为不相吻合^[3]。近年来,人们发现许多真实复杂系统具有小世界(small-world, SW)效应^[4]和无尺度(scale-free, SF)特征^[5]等复杂网络特性。尤其是 Pastor-Satorras^[6]等人研究了 Barabasi-Albert(BA)无尺度网络上的传播行为,发现当网络规模无限增大时,流行病传播的临界阈值趋于 0,即缺乏传播阈值,改变了传统传染病建模中的许多结论,激发了大量的复杂拓扑结构下流行病传播行为的研究^[7]。

当前,大部分研究都是基于静态网络结构(网络连接固定不变),而真实网络中的个体通常会不断移动,即网络拓扑结构会随时间而动态演化,因而研究动态网络中的流行病传播行为具有重要的现实意义。文献[8]研究了在规则晶格中,允许个体在局部邻居间移动的情况下,SIS 和 SIR 模型的传播行为和传染临界特性。文献[9]在此基础上,引入长程移动,允许个体以一个特定的概率移动到晶格的任意位置,模拟个体在社会系统中的运动以及无线终端设备在通信网络中的移动,使得疾病在系统中的传播行为更加符合真实情况。但是,文献[9]只研究了个体运动条件下的 SIS 模型的传播行为。

本文基于 SIR 传播模型,提出一个改进的 SIR 模型来研究移动群体中的具有治愈或接种免疫性的流行病传播行为,具有明显的现实意义。利用平均场(Mean-field)理论分析得到了群体移动情况下流行病传播的临界阈值,并通过大量的数值仿真加以验证。结果表明,临界传播速率与移动个体的密度密切相关。

1 移动群体中疾病传播模型

1.1 个体运动模型

如图 1 所示,移动个体(N 个)可在一个二维规则晶格($L \times L$)上随机运动,群体密度为 $\delta = N/L^2$ 。在每个时间单位(Δt)内,个体以概率 $(1-p)$ 作局部运动,即移动到 8 个直接邻居(即 Moore 邻域)位置之一,也可以概率 p 作长程随机运动,即移到晶格中的任意一个位置(如果指定的位置未被其他个体占用)。在某种意义上,这里的概率 p 类似于 SW 网络模型中的重布线概率。

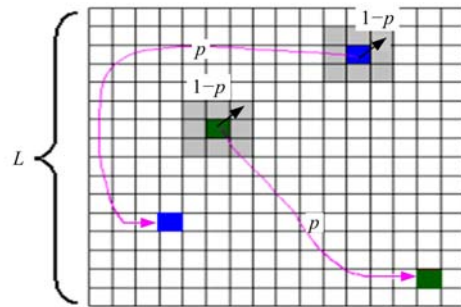


图 1 个体运动模型

Fig. 1 Model of individual's motion

当 $p=0$ 时,个体只作局部运动,移动到其 8 个直接邻居位置;当 $p=1$ 时,个体运动不受限制,可以移动到晶格中任意指定的位置。显然,这是两种极端情况,分别对应空间关联和空间无关的情形。当 $0 < p < 1$ 时,个体除了作局部运动外,还可以随机移动到系统的任意位置,符合个体的真实运动特性。因此,基于该运动模型上的疾病的传播行为能真实地反映传染病在社会网络中的扩散以及计算机病毒在移动通信网络中的传播。

1.2 改进的 SIR 传播模型

在标准 SIR 传播模型中,假定个体处于健康或易感态(S)、感染态(I)和移出态(R)三种状态。健康个体如果与感染个体接触,以速率 β 被感染;而染病个体会以速率 γ 被治愈,进入移出态且不再被感染。假定系统中个体总数保持恒定,用 $s(t)$ 、 $i(t)$ 和 $r(t)$ 分别代表健康个体,染病个体和移出个体所占的比例,则 SIR 模型可描述为

$$\begin{cases} i(t + \Delta t) - i(t) = \beta s(t) i(t) - \gamma i(t) \\ r(t + \Delta t) - r(t) = \gamma i(t) \\ s(t) + i(t) + r(t) = 1 \end{cases} \quad (1)$$

模型没有考虑个体的运动规则和个体的拓扑关系,因而不能描述群体在运动条件下的传播行为。当个体在晶格上完全随机运动($p=1$)时,可以用平均场理论近似分析,传播过程可用方程组表征为

$$\begin{cases} i(t + \Delta t) - i(t) = -\gamma i(t) + s(t)[1 - (1 - \beta \delta i(t))^\delta] \\ r(t + \Delta t) - r(t) = \gamma i(t) \\ s(t) + i(t) + r(t) = 1 \end{cases} \quad (2)$$

式中: β 为感染速率; γ 为治愈速率; $\delta = N/L^2$ 为移动群体密度; Δt 为感染时间步。

方程组(2)表示,感染密度的增加等于新增的

感染者减去感染后被治愈的个体,而移出个体密度的增加与感染个体密度成正比。在临界点附近, $i(t) \ll 1$, 对方程组(2)的第一个方程右侧进行一阶泰勒展开,有

$$i(t + \Delta t) \approx i(t) - \gamma i(t) + s(t)[1 - (1 - 8\beta\delta i(t))] \quad (3)$$

将 $s(t) = 1 - i(t) - r(t)$ 代入方程(3),有

$$i(t + \Delta t) \approx i(t)[1 - \gamma] + 8\beta\delta i(t)[1 - i(t) - r(t)] \quad (4)$$

忽略高阶项 $O(i(t)^2)$ 和 $O(i(t)r(t))$, 方程(4)简化为

$$i(t + \Delta t) \approx i(t)(1 - \gamma + 8\beta\delta) \quad (5)$$

从而,疾病流行必须满足

$$1 - \gamma + 8\beta\delta > 1 \quad (6)$$

令 $\lambda = \beta/\gamma$ 为有效传播速率,则有

$$\lambda > 1/(8\delta) \quad (7)$$

所以,在完全随机移动情况下,疾病感染的临界有效传播速率 λ_c 为

$$\lambda_c = 1/(8\delta) \quad (8)$$

因而,当 $\lambda > \lambda_c$ 时,疾病可以在运动群体中流行;当 $\lambda < \lambda_c$ 时,有限时间步后,疾病停止传播。显然,临界有效传播速率与晶格中移动个体的密度密切相关。

2 数值仿真结果

2.1 仿真算法

(1)生成 $L \times L$ 二维晶格,并满足周期边界条件。

(2)将 N 个移动个体随机分配到上述晶格中。

(3)在每个时间步内,所有个体以概率 p 执行长程运动、以概率 $1 - p$ 执行局部运动。

(4)在每个时间步内,按照方程组(2)进行 SIR 模型感染迭代。

(5)到达指定的时间步,仿真结束;否则转步骤(3)。

2.2 仿真结果

基于上述仿真算法,本文分别研究不同的感染速率、治愈速率和群体密度等对 SIR 传染过程的影响,以及长程随机运动对疾病传播行为的影响。下面所有仿真结果都是假定 $L=100$, 群体中初始感染密度为 0.1(即 $i(0)=0.1$), 并且所有结果是 100 次实验的平均结果。

图 2 假定个体可以作完全随机运动(即 $p=$

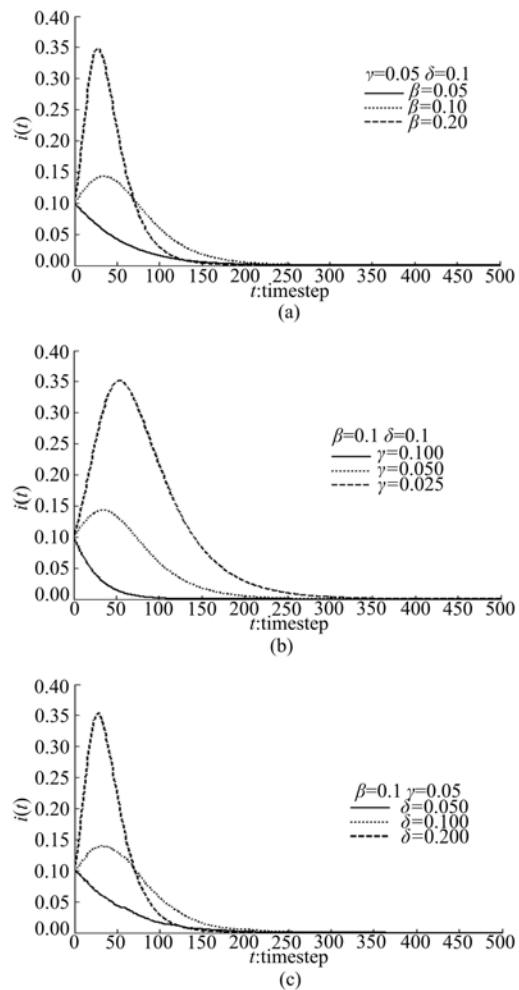


图 2 不同参数对 SIR 传播过程的影响

Fig. 2 Effect of different parameters on SIR spreading process

1.0), 分别给出了不同的感染速率、治愈速率和群体密度对 SIR 传染过程的影响。图 2(a)为群体密度($\delta=0.1$)和治愈速率($\gamma=0.05$)固定的条件下,不同的感染速率(β 分别为 0.05、0.1 和 0.2)对 SIR 传播行为的影响,对应图中从下到上三条曲线。显然,临界有效传播速率为 $\lambda_c = 1.25$, 三种感染速率下的有效传播速率分别为 1、2 和 4, 所以,当 $\beta=0.05$ 时,有效传播速率小于临界值,感染密度从初始值 0.1 开始逐渐下降到 0;而当 $\beta=0.1$ 和 $\beta=0.2$ 时,有效传播速率大于临界值,感染密度从初始值 0.1 开始逐渐增加,到达一个峰值后,再逐渐减小、最终趋于 0。

图 2(b)是 $\delta=0.1$ 、 $\beta=0.1$, 而治愈速率 γ 分别为 0.1、0.05 和 0.025 时的传播情况,此时有效传播速率分别为 1、2 和 4, 临界传播速率仍为 $\lambda_c = 1.25$, 因而前一组参数的条件下,疾病不会流行开来,而后两种情况下疾病不会大规模传播。图

2(c)给出了 $\beta=0.1$ 、 $\gamma=0.05$, 个体密度 δ 分别为 0.05、0.1 和 0.2 时的传播行为。此时有效传播速率固定为 $\lambda=2$, 根据方程(8), 临界传播速率 λ_c 分别为 2.5、1.25 和 0.625, 所以在前一组参数的条件下, 疾病不会流行, 而在后两组参数条件下, 疾病能够大规模传播开来。

图 2 表明, 尽管方程(7)和方程(8)是在近似条件下得到的, 但数值仿真结果与其完全一致。从图 2 还看到, 较大的感染速率或较小的治愈速率导致有效传播速率较大, 在感染密度一定的条件下, SIR 动态传播过程也越快, 并且最大被感染比例(i_{max})也越大, 即容易在群体中传播。此外, 在有效传播速率固定的条件下, 群体密度越高, 临界传播速率就越低, 造成疾病越容易传播。

一般地, 个体不会只作局部运动, 也不会完全做长程随机运动, 因而有必要研究个体只以较小的概率($0 < p < 1$)作长程运动对 SIR 传播过程的影响。图 3 给出了疾病在超临界条件($\lambda > \lambda_c$)下, 运动参数 p 对 SIR 传染行为的影响。

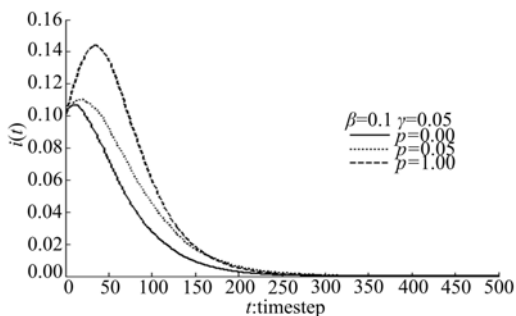


图 3 长程运动对 SIR 传播过程的影响

Fig. 3 Effect long-range motion on SIR spreading process

在图 3 中, 群体密度($\delta=0.1$)、感染速率($\beta=0.1$)和治愈速率($\gamma=0.05$)都固定, 只改变个体执行长程随机运动的概率 p 。结果表明, p 越大, 动态感染过程就越快, 最大被感染比例也越大, 即疾病越容易传播。

2.3 控制移动群体中的疾病传播

当前的理论分析和仿真研究对于预防与控制传染性疾在社会接触网络上的传播、计算机病毒在 Internet 上的扩散提供一些有意义的策略和理论指导。首先, 从传染病学角度出发, 应该积极提高医疗卫生水平, 降低疾病的传染性、提高染病个体的治愈率, 从而减缓疾病传播的动态传染过程, 并减小传播过程中的最大感染比例。其次, 从传播网络的角度来看, 在出现流行病时, 应当限制个体的运动, 尤其是长程随机运动, 通过减小个

体的移动性达到控制疾病传播和流行的目的。

3 结束语

本文提出一个改进 SIR 传播模型, 考虑群体在网络中不断移动对流行病传播的影响。基于平均场理论, 给出个体在晶格中执行完全随机运动时感染传播的临界速率。然后, 通过大量的数值仿真, 验证平均场分析的正确性, 并研究了不同的传播速率、感染速率、群体密度等对传播行为的影响。研究还发现, 长程随机运动的概率对传播行为有显著的影响。基于平均场理论和数值仿真结果表明, 改进的考虑个体运动的传播模型更能反应真实的疾病传播行为。最后, 提出一些抑制病毒传播直观的控制策略, 为预防和控制流行病的传播提供理论指导。

参考文献:

- [1] 魏达, 刘衍珩, 王健, 等. Internet 蠕虫的早期检测和响应机制[J]. 吉林大学学报: 工学版, 2007, 37(4): 854-859.
Wei Da, Liu Yan-heng, Wang Jian, et al. Internet worm early detection and response mechanism [J]. Journal of Jilin University (Engineering and Technology Edition), 2007, 37(4): 854-859.
- [2] Murray J D. Mathematical Biology: (I) an Introduction [M]. Berlin: Springer Verlag, 2003.
- [3] Boccaletti S, Latora V, Moreno Y, et al. Complex networks: structure and dynamics [J]. Physics Reports, 2006, 424(1): 175-308.
- [4] Watts D J, Strogatz S H. Collective dynamics of small world networks [J]. Nature, 1998, 393: 440-442.
- [5] Barabási A L, Albert R. Emergence of scaling in random networks [J]. Science, 1999, 286: 509-512.
- [6] Pastor-Satorras R, Vespignani A. Epidemic spreading in scale-free networks [J]. Physical Review Letters, 2001, 86(14): 3200-3203.
- [7] Zhou T, Fu Z Q, Wang B H, et al. Epidemic dynamics on complex networks [J]. Progress in Natural Science, 2006, 16(5): 452-457.
- [8] Boccaro N, Cheong M. Automata network SIR models for the spread of infectious diseases in populations of moving individuals [J]. Journal of Physics A, 1992, 25 (9): 2447-2461.
- [9] Miramontes O, Luque B. Dynamical small-world behavior in an epidemical model of mobile individuals [J]. Physica D, 2002, 168(2): 379-385.