

广义模对称定理的推广

林守远

(南京电子技术研究所,南京)

摘要 本文将无耗互易网络的广义模对称定理推广到无耗非互易网络,并给出应用实例。

关键词 微波网络;广义模对称定理;互易网络;非互易网络

对无耗二端口网络,不论是否互易,其散射参数 S_{11} 和 S_{22} 的模相等, S_{12} 和 S_{21} 的模相等^[1],即

$$|S_{11}| = |S_{22}|, |S_{12}| = |S_{21}| \quad (1)$$

文献[2]中提出了无耗互易网络的广义模对称定理:若把任意端口的无耗互易网络的散射矩阵写成4个分块矩阵,则有

$$|\det \mathbf{S}_{II}| = |\det \mathbf{S}_{III}| \quad (2)$$

式中 \mathbf{S}_{II} 和 \mathbf{S}_{III} 均为方阵(其阶数不一定相同,下同)。广义模对称定理实际上可推广到无耗非互易网络,现证明如下。

非互易网络的散射矩阵的分块矩阵为

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{II} & \mathbf{S}_{I\bar{I}} \\ \mathbf{S}_{\bar{I}I} & \mathbf{S}_{\bar{I}\bar{I}} \end{bmatrix} \quad (3)$$

网络无耗, \mathbf{S} 满足么正性条件,即

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{S}_{II}\mathbf{S}_{II}^\dagger + \mathbf{S}_{I\bar{I}}\mathbf{S}_{I\bar{I}}^\dagger &= \mathbf{1} \\ \mathbf{S}_{\bar{I}I}\mathbf{S}_{\bar{I}I}^\dagger + \mathbf{S}_{\bar{I}\bar{I}}\mathbf{S}_{\bar{I}\bar{I}}^\dagger &= \mathbf{1} \\ \mathbf{S}_{II}\mathbf{S}_{\bar{I}\bar{I}}^\dagger + \mathbf{S}_{I\bar{I}}\mathbf{S}_{\bar{I}I}^\dagger &= \mathbf{0} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

式中黑体字均为矩阵,有关矩阵的阶数是互相匹配的(下同)。对无耗网络还满足

$$|\det \mathbf{S}| = 1 \quad (5)$$

令

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{II} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \quad (6)$$

则

$$\mathbf{US}^\dagger = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{II} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{II}^\dagger & \mathbf{S}_{I\bar{I}}^\dagger \\ \mathbf{S}_{\bar{I}I}^\dagger & \mathbf{S}_{\bar{I}\bar{I}}^\dagger \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{II}\mathbf{S}_{II}^\dagger & \mathbf{S}_{II}\mathbf{S}_{I\bar{I}}^\dagger \\ \mathbf{S}_{\bar{I}I}^\dagger & \mathbf{S}_{\bar{I}\bar{I}}^\dagger \end{bmatrix} \quad (7)$$

(7) 式左端的行列式的模为

$$|\det \mathbf{US}^\dagger| = |\det \mathbf{U}| |\det \mathbf{S}^\dagger| = |\det \mathbf{S}_{11}| |\det \mathbf{S}| = |\det \mathbf{S}_{11}| \quad (8)$$

(7) 式右端的行列式的模则为

$$\begin{aligned} & \left| \det \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{11} \mathbf{S}_{11}^\dagger & \mathbf{S}_{11} \mathbf{S}_{11}^\dagger \\ \mathbf{S}_{11}^\dagger & \mathbf{S}_{11}^\dagger \end{bmatrix} \right| \\ &= \left| \det \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{11} \mathbf{S}_{11}^\dagger + \mathbf{S}_{11} \mathbf{S}_{11}^\dagger & \mathbf{S}_{11} \mathbf{S}_{11}^\dagger + \mathbf{S}_{11} \mathbf{S}_{11}^\dagger \\ \mathbf{S}_{11}^\dagger & \mathbf{S}_{11}^\dagger \end{bmatrix} \right| \\ &= \left| \det \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{S}_{11}^\dagger & \mathbf{S}_{11}^\dagger \end{bmatrix} \right| = |\det \mathbf{S}_{11}^\dagger| = |\det \mathbf{S}_{11}| \quad (9) \end{aligned}$$

(7) 式两端的行列式的模应相等, 因此 (2) 式成立。总之, 对任意端口无耗网络, 不论是否互易, 均满足广义模对称定理。

文献 [2] 中已给出广义模对称定理用于无耗互易网络的实例。这里再给出该定理用于无耗非互易网络的实例。

例 1 若无耗非互易三端口网络各端口均匹配, 即 $S_{11} = S_{22} = S_{33} = 0$, 由 (2) 式和 (5) 式可得

$$S_{12} S_{21} = S_{23} S_{32} = S_{31} S_{13} = 0 \quad (10)$$

和

$$S_{12} S_{23} S_{31} + S_{21} S_{32} S_{13} = 1 \quad (11)$$

则有

$$\left. \begin{aligned} S_{12} &= S_{23} = S_{31} = 1 \\ S_{21} &= S_{32} = S_{13} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

或

$$\left. \begin{aligned} S_{12} &= S_{23} = S_{31} = 0 \\ S_{21} &= S_{32} = S_{13} = 1 \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

(12) 和 (13) 式对应于正旋或反旋的理想环行器。

例 2 对一般无耗非互易三端口网络, 由 (2) 式可得

$$\left. \begin{aligned} |S_{11} S_{22} - S_{12} S_{21}| &= |S_{33}| \\ |S_{11} S_{33} - S_{13} S_{31}| &= |S_{22}| \\ |S_{22} S_{33} - S_{23} S_{32}| &= |S_{11}| \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

若只有一个端口匹配, 例如 $S_{11} = 0$, 则由 (14) 式可知, 其余的 S_{ij} 均不为零, 又假定网络是正旋环行器, 则由 (14) 式可导得^[4]

$$\left. \begin{aligned} |S_{12}| &> |S_{33}| & |S_{21}| &< \sqrt{1 - |S_{22}|^2 - |S_{22} S_{33}|^2} \\ |S_{23}| &> |S_{22} S_{33}| & |S_{32}| &< \sqrt{1 - |S_{22}|^2 - |S_{33}|^2} \\ |S_{31}| &> |S_{22}| & |S_{13}| &< \sqrt{1 - |S_{33}|^2 - |S_{22} S_{33}|^2} \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

由 (15) 式可见, 当端口 1 匹配时, 端口 2 与 3 间的隔离较好, 而环行损耗较大。如果假定网络是反旋环行器, 也可得到类似结论。

此外, 如使 (3) 式中的 \mathbf{S}_{11} 和 \mathbf{S}_{11} 均为方阵, 其阶数也不一定相同 (此时 \mathbf{S}_{11} 和 \mathbf{S}_{11}

不一定是方阵)。令

$$V = \begin{bmatrix} 0 & S_{111} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (16)$$

进行类似(7)式至(9)式的推导,可得

$$|\det S_{111}| = |\det S_{111}|$$

(2)式和(17)式与(1)式中的两个等式相对应,(17)式也应看做广义模对称定理的一个组成部份。

应用广义模对称定理,除能较简洁地分析无耗网络外,对综合所得的无耗网络,如有错误,也能较快地检查出来。

参 考 文 献

- [1] 林守远,微波线性无源网络,科学出版社,1987年。
 [2] 梁昌洪,邱长兴,无耗网络的几个定理,电子学报,19(1991)3, 101—102, 109。

EXTENSION OF THE GENERALIZED MAGNITUDE-SYMMETRY THEOREM

Lin Shouyuan

(*Nanjing Research Institute of Electronic Technology, Nanjing*)

Abstract The generalized magnitude-symmetry theorem of lossless reciprocal network is extended to lossless non-reciprocal network. Two illustrations for application of the theorem are given.

Key words Microwave network; Generalized magnitude-symmetry; reciprocal network; non-reciprocal network