第 13 卷 第 4 期　　电 子 科 学 学 刊　　Vol. 13, No. 4
1991 年 7 月　　JOURNAL OF ELECTRONICS　　July, 1991

论电磁波场的自相似解

盖 秉 政
（哈尔滨工业大学，哈尔滨）

摘要　本文研究了二维电磁波场的自相似解问题，给出了 E 波及 H 波自相似场量的构造，并把它用于双层媒质界面电流的电磁波场，求出了它的自相似的解析解。

关键词　电磁波场；自相似解；双层媒质

一、引　言

1932 年 V. I. Smirnov 等人[1]针对波动方程提出了自相似解（或函数不变解）的概念，并把它用于弹性波场的研究。然而，自相似波场并不局限于弹性波场，它亦存在于由 Maxwell 方程描述的电磁波场中。如何构造自相似的电磁波场，并用于具体的电磁波场问题的求解，目前尚欠研究，对此本文将给予讨论。

二、波 场 方 程

考虑在不导电及无自由空间电荷的均匀各向同性媒质中的二维电磁波场，由于波场中各场量均与 z 轴无关，则 Maxwell 方程简化为

$$\partial E_z/\partial y = -\mu(\partial H_x/\partial x) \tag{1a}$$

$$\partial E_z/\partial x = \mu\partial H_y/\partial t \tag{1b}$$

$$\partial H_y/\partial x - \partial H_x\partial y = \varepsilon\partial E_z/\partial t \tag{1c}$$

$$\partial H_x/\partial x + \partial H_y/\partial y = 0 \tag{1d}$$

$$\partial H_z/\partial y = \varepsilon\partial E_x/\partial t \tag{2a}$$

$$\partial H_z/\partial x = -\varepsilon\partial E_y/\partial t \tag{2b}$$

$$\partial E_y/\partial x - \partial E_x/\partial y = -\mu\partial H_z/\partial t \tag{2c}$$

$$\partial E_x/\partial x + \partial E_y/\partial y = 0 \tag{2d}$$

式中，x，y，z 为直角坐标；t 为时间；$\boldsymbol{E}(E_x, E_y, E_z)$ 为电场强度；$\boldsymbol{H}(H_x, H_y, H_z)$ 为磁场强度；ε 为介电系数；μ 为磁导系数。

在两种不同媒质的交界面上，场强 $\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{H}$ 应满足[2]：

$$[\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}] = 0 \tag{3a}$$

$$[\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{H}] = \boldsymbol{I} \tag{3b}$$

式中，$\boldsymbol{n}$ 为界面上的单位法线向量；$\boldsymbol{I}$ 为界面上的电流面密度；[•] 为跨越界面时方括

1990 年 2 月 24 日收到，1990 年 9 月 10 日修改定稿。

号中的量的跃度．运用 (1a)—(1d) 式，并注意到对二维电磁波场 $\boldsymbol{n}$ 沿 z 方向的分量恒为 0 则经过简单的变换，不难把 (3a)，(3b) 式化为

$$[E_z]=0 \tag{4a}$$
$$(1/\mu)(\partial E_z/\partial n)=\partial I_z/\partial t \tag{4b}$$

$$[H_z]=I_t \tag{5a}$$
$$(1/\varepsilon)(\partial H_z/\partial n)=0 \tag{5b}$$

式中，I_z，I_t 分别为 $\boldsymbol{I}$ 在界面内沿 z 方向及垂直于 z 方向的分量；$\partial/\partial n$ 为界面处的法向导数．

从以上各式可以看出，二维电磁波场由两组构成：(1a)—(1d) 式及 (4a)，(4b) 式构成了决定场量 E_z，H_x，H_y 的一组，通常称为电型波或 E 波；(2a)—(2d) 式及 (5a)，(5b) 式构成了决定场量 H_z，E_x，E_y 的一组，通常称为磁型波或 H 波，后文我们将就这两种型式的波场给出自相似解的详细讨论．

三、自 相 似 解

从 (1a)—(1c) 式及 (2a)—(2c) 式我们可以得到场量 E_z，H_z 的如下波动方程：

$$\nabla^2 E_z=k^2\partial^2 E_z/\partial t^2 \tag{6a}$$
$$\nabla^2 H_z=k^2\partial^2 H_z/\partial t^2 \tag{6b}$$

式中，$\nabla^2=\partial^2/\partial x^2+\partial^2/\partial y^2$ 为二维 Laplace 算子；$k=\omega(\mu\varepsilon)^{1/2}$ 为媒质中的电磁波速．令

$$\zeta=[xt-iy\sqrt{t^2-k^2(x^2+y^2)}]/(x^2+y^2)\equiv\zeta(k,t,x,y) \tag{7}$$

则通过直接代入不难证实复变量 ζ 的任意解析函数 $f(\zeta)$ 均能满足方程 (6a)，(6b)，其实解自然可以取为

$$E_z \text{ 或 } H_z=\mathrm{Re}f(\zeta) \tag{8}$$

式中，Re 表示实部．波动方程 (6a)，(6b) 的解 $f(\zeta)$ 是 t，x，y 的 0 次齐次函数．它表示场量 E_z（或 H_z）在 t，x，y 空间中的任一条由原点发出的射线上保持不变，因此称为函数不变解或自相似解．

令 $F(\zeta)$ 为 ζ 的一解析函数，$H_x=\mathrm{Re}F(\zeta)$，把此式及 (8) 式代入 (1a) 式，我们有

$$\mathrm{Re}\left(\frac{\partial f(\zeta)}{\partial y}+\mu\frac{\partial F(\zeta)}{\partial t}\right)=0 \tag{9}$$

或

$$\mathrm{Re}\left(\frac{\partial f(\zeta)}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial y}+\mu\frac{\partial F(\zeta)}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial t}\right)=0 \tag{10}$$

选择 $F(\zeta)$，使

$$\frac{\partial f(\zeta)}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial y}+\mu\frac{\partial F(\zeta)}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial t}=0 \tag{11}$$

则 (10) 式恒能满足，由此我们有

$$\frac{\partial F(\zeta)}{\partial\zeta}=-\frac{1}{\mu}\left[\left(\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)\Big/\left(\frac{\partial\zeta}{\partial t}\right)\right]\frac{\partial f(\zeta)}{\partial\zeta}$$

或

$$H_x=\mathrm{Re}F(\zeta)=-\frac{1}{\mu}\mathrm{Re}\int\frac{\partial\zeta/\partial y}{\partial\zeta/\partial t}f'(\zeta)d\zeta \tag{12}$$

式中，$f'(\zeta)=\partial f(\zeta)/\partial\zeta$. 同理从方程 (1b) 我们可以得到

$$H_y=\frac{1}{\mu}\mathrm{Re}\int\frac{\partial\zeta/\partial x}{\partial\zeta/\partial t}f'(\zeta)d\zeta \tag{13}$$

从 (7) 式我们有

$$\partial\zeta/\partial t=\sqrt{k^2-\zeta^2}/(x\sqrt{k^2-\zeta^2}-y\zeta) \tag{14a}$$

$$\partial\zeta/\partial x=\zeta\sqrt{k^2-\zeta^2}/(y\zeta-x\sqrt{k^2-\zeta^2}) \tag{14b}$$

$$\partial\zeta/\partial y=(k^2-\zeta^2)/(y\zeta-x\sqrt{k^2-\zeta^2}) \tag{14c}$$

把 (14a), (14b), (14c) 式代入 (12), (13) 式得

$$H_x=\frac{1}{\mu}\int\sqrt{k^2-\zeta^2}f'(\zeta)d\zeta \tag{15}$$

$$H_y=-\frac{1}{\mu}\int\zeta f'(\zeta)d\zeta \tag{16}$$

通过直接代入不难证明，场量 H_x, H_y 取 (15), (16) 式的形式时，(1d) 式变为恒等式. 至此我们可以看出场量 E_z, H_x, H_y 取 (8), (15), (16) 式的形式时 E 波问题的场方程((1a)—(1d)) 全部被满足. 同样可以证明，场量 H_z 用 (8) 式表示. E_x, E_y 用式

$$E_x=-\frac{1}{\varepsilon}\mathrm{Re}\int\sqrt{k^2-\zeta^2}f'(\zeta)d\zeta \tag{17}$$

$$E_y=\frac{1}{\varepsilon}\mathrm{Re}\int\zeta f'(\zeta)d\zeta \tag{18}$$

表示时，H 波问题的全部场方程 ((2a)—(2d)) 被满足.

令 $S=S(x,y)$ 为 x, y 的某一确定函数；m, n 为整数，引入算子*

$$\mathscr{L}_{mn}\equiv\frac{\partial^{m+n}}{\partial S^m\partial t^n};\quad \mathscr{L}_{mn}^{-1}\equiv\frac{\partial^{-(m+n)}}{\partial S^{-m}\partial t^{-n}} \tag{19}$$

及新场量

$$(E_{zmn},H_{xmn},H_{ymn})\equiv\mathscr{L}_{mn}(E_z,H_x,H_y) \tag{20a}$$

$$(H_{zmn},E_{xmn},E_{ymn})\equiv\mathscr{L}_{mn}(H_z,E_x,E_y) \tag{20b}$$

$$(I_{zmn},I_{tmn})\equiv\mathscr{L}_{mn}(I_z,I_t) \tag{20c}$$

很容易看出，上述新场量满足的微分方程及边界条件与原场量满足的微分方程及边界条件 ((1a)—(2d) 式，(4a)—(5b) 式)具有完全相同的形式. 因此从上面对原场量相似解的讨论，可以直接写出 E 波波场的各场量:

* 负幂次微分表示同重数的积分

$$E_{zmn} = \mathrm{Re} f(\zeta); \quad E_z = \mathscr{L}_{mn}^{-1} E_{zmn} \tag{21a}$$

$$H_{xmn} = (1/\mu)\mathrm{Re}\int \sqrt{k^2 - \zeta^2}\, f'(\zeta)d\zeta; \quad H_x = \mathscr{L}_{mn}^{-1} H_{xmn} \tag{21b}$$

$$H_{ymn} = -(1/\mu)\mathrm{Re}\int \zeta f'(\zeta)d\zeta; \quad H_y = \mathscr{L}_{m}^{-1} H_{ymn} \tag{21c}$$

$$[E_{zmn}] = 0; \quad [(1/\mu)(\partial E_{zmn}/\partial n)] = (\partial I_{zmn}/\partial t) \tag{22}$$

及H波波场的各场量：

$$H_{zmn} = \mathrm{Re} f(\zeta); \quad H_z = \mathscr{L}_{mn}^{-1} H_{zmn} \tag{23a}$$

$$E_{xmn} = -(1/\varepsilon)\mathrm{Re}\int \sqrt{k^2 - \zeta^2}\, f'(\zeta)d\zeta; \quad E_x = \mathscr{L}_{mn}^{-1} E_{xmn} \tag{23b}$$

$$E_{ymn} = (1/\varepsilon)\mathrm{Re}\int \zeta f'(\zeta)d\zeta; \quad E_y = \mathscr{L}_{mn}^{-1} E_{ymn} \tag{23c}$$

$$[H_{zmn}] = I_{tmn}; \quad [(1/\varepsilon)(\partial H_{zmn}/\partial n)] = 0 \tag{24}$$

于是确定整个电磁波场的问题归结为确定未知解析函数 $f(\zeta)$ 的问题．若能适当地选择函数 $S = S(x,y)$ 及整数 m、n，使决定未知函数的边界条件((22)式(E 波)或(24)式(H 波))成为自相似形式，即成为只含单一变量 ζ 的形式，则未知函数 $f(\zeta)$ 可以从边界条件中解出，此时我们称电磁波场为具有参数 S、m、n 的自相似场；m、n 称为自相似指数．下面我们来考查具体实例。

四、双层媒质问题

作为自相似电磁波场的一个例子，现在来讨论界面电流在双层媒质中激起的 E、H 波场问题． 先来看 E 波场：如图 1 所示，假定上下层媒质的介电系数 ε 及磁导系数 μ 分别为 ε_1、μ_1 和 ε_2、μ_2，界面电流为

$$I_z = I\delta(x)H(t) \tag{25}$$

式中，$I = \mathrm{const}$；$\delta(\cdot)$ 为 δ 函数；$H(\cdot)$ 为 Heaviside 阶跃函数．取

$$S(x,y) = x, \quad m = 0, \quad n = -1,$$

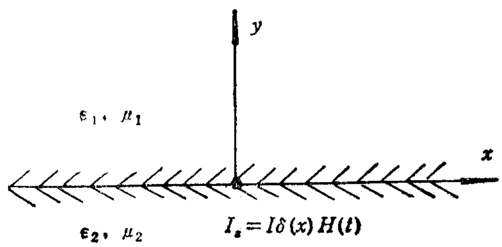

图 1

从(21)式可得上下媒质的自相似 E 波场为

$$E^{\alpha}_{z0-1} = \mathrm{Re} f_{\alpha}(\zeta_{\alpha}) \tag{26a}$$

$$H^{\alpha}_{x0-1} = (1/\mu_{\alpha})\mathrm{Re}\int \sqrt{k^2_{\alpha} - \zeta^2_{\alpha}}\, f'_{\alpha}(\zeta_{\alpha})d\zeta_{\alpha} \tag{26b}$$

$$H^{\alpha}_{y0-1} = -(1/\mu_{\alpha})\mathrm{Re}\int \zeta_{\alpha} f'_{\alpha}(\zeta_{\alpha})d\zeta_{\alpha} \tag{26c}$$

式中，$\alpha = 1, 2$ 分别表示上下媒质；$k_{\alpha} = \omega(\mu_{\alpha}\varepsilon_{\alpha})^{1/2}$；$\zeta_{\alpha} = \zeta(k_{\alpha}, t, x, y)$；$f_{\alpha}(\zeta_{\alpha})$为上($\alpha = 1$)下($\alpha = 2$)媒质中的解析函数；$E^{\alpha}_{z0-1}$、$H^{\alpha}_{x0-1}$、$H^{\alpha}_{y0-1}$ 为上($\alpha = 1$)下($\alpha = 2$)媒质中的场量． 把(26a)式代入(22)式，并注意到在双层媒质的交界面($y = 0$)上，$\zeta_1 = \zeta_2 = t/x = \zeta$ 及(14c)式，我们有

$$\mathrm{Re}f_2(\zeta) - \mathrm{Re}f_1(\zeta) = 0 \tag{27a}$$

$$(1/\mu_2)\mathrm{Re}(f_2'(\zeta)\zeta\sqrt{k_2^2-\zeta^2}) - (1/\mu_1)\mathrm{Re}(f_1'(\zeta)\zeta\sqrt{k_1^2-\zeta^2}) = tI\delta(x)H(t) \tag{27b}$$

把定义在上下半平面的解析函数 $f_1(\zeta)$ 及 $f_2(\zeta)$ 分别对称地扩张到下上半平面,使它们成为在全平面上有定义的解析函数,即定义全平面上的解析函数:

$$F_1(\zeta_1) = \begin{cases} F_1^+(\zeta_1) \equiv f_1(\zeta_1), & \mathrm{Im}\zeta_1 \geqslant 0 \\ F_1^-(\zeta_1) \equiv \overline{f_1(\overline{\zeta_1})}, & \mathrm{Im}\zeta_1 \leqslant 0 \end{cases} \tag{28a}$$

$$F_2(\zeta_2) = \begin{cases} F_2^+(\zeta_2) \equiv \overline{f_2(\overline{\zeta_2})}, & \mathrm{Im}\zeta_2 \geqslant 0 \\ F_2^-(\zeta_2) \equiv f_2(\zeta_2), & \mathrm{Im}\zeta_2 \leqslant 0 \end{cases} \tag{28b}$$

式中,Im 表示虚部;一表示共轭;$(\bullet)^+$,$(\bullet)^-$ 分别表示 $(\bullet)$ 于上下平面之值. 把 (28) 式代入 (27) 式,并注意到

$$\overline{\sqrt{k_\alpha^2-\zeta^2}} = -\sqrt{k_\alpha^2-\zeta^2} \quad (\alpha = 1, 2)$$

及 δ 函数的性质 $t\delta(x) = \delta(x/t) = \delta(1/\zeta)$,我们有

$$\Omega_1^+(\zeta) + \Omega_1^-(\zeta) = 0 \tag{29a}$$

$$\Omega_2^+(\zeta) - \Omega_2^-(\zeta) = -2I\delta(1/\zeta) \tag{29b}$$

式中

$$\Omega_1(\zeta) = F_2(\zeta) - F_1(\zeta) \tag{30a}$$

$$\Omega_2(\zeta) = (1/\mu_2)F_2'(\zeta)\zeta\sqrt{k_2^2-\zeta^2} + (1/\mu_1)F_1'(\zeta)\zeta\sqrt{k_1^2-\zeta^2} \tag{30b}$$

(29) 式是典型的 Reiman 边值问题,其解为

$$\Omega_1(\zeta) = 0, \quad \Omega_2(\zeta) = iI\zeta/\pi \tag{31}$$

把 (30) 式代入 (31) 式,得

$$F_1'(\zeta) = F_2'(\zeta) = iI/[\pi(\sqrt{k_1^2-\zeta^2}/\mu_1 + \sqrt{k_2^2-\zeta^2}/\mu_2)] \tag{32}$$

于是从 (26) 式,经过简单的变换后,我们求得上下媒质的自相似 E 波波场为

$$E_z^\alpha = -(I/\pi)\mathrm{Im}[\sqrt{k_\alpha^2-\zeta_\alpha^2}/A_\alpha] \tag{33a}$$

$$H_x^\alpha = -(I/\pi)\mathrm{Im}[(k_\alpha^2-\zeta_\alpha^2)/(\mu_\alpha A_\alpha)] \tag{33b}$$

$$H_y^\alpha = (I/\pi)\mathrm{Im}[\zeta_\alpha\sqrt{k_\alpha^2-\zeta_\alpha^2}/(\mu_\alpha A_\alpha)] \tag{33c}$$

$$A_\alpha = [(1/\mu_1)\sqrt{k_1^2-\zeta_\alpha^2} + (1/\mu_2)\sqrt{k_2^2-\zeta_\alpha^2}](x\sqrt{k_\alpha^2-\zeta_\alpha^2} - y\zeta_\alpha) \tag{33d}$$

$$(\alpha = 1, 2)$$

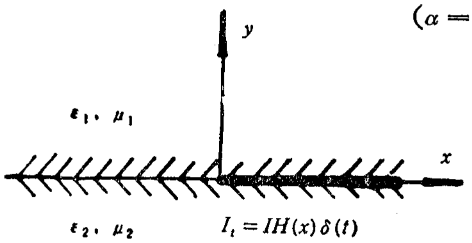

图 2

现在我们来讨论 H 波波场. 如图 2 所示,假定界面电流为沿 x 轴正向的瞬态脉冲电流,即

$$I_t = IH(x)\delta(t) \tag{34}$$

取 $S(x,y) \equiv x$,$m = 0$,$n = -1$,从 (23) 式可得上下媒质的自相似 **H** 波波场为

$$H_{z0-1}^\alpha = \mathrm{Re}f_\alpha(\zeta_\alpha) \tag{35a}$$

$$E^{a}_{x0-1} = -(1/\varepsilon)\mathrm{Re}\int\sqrt{k_a^2-\zeta_a^2}\,f'_a(\zeta_a)d\zeta_a \tag{35b}$$

$$E^{a}_{y0-1} = (1/\varepsilon)\mathrm{Re}\int\zeta_a f'_a(\zeta_a)d\zeta_a,\quad (\alpha=1,2) \tag{35c}$$

把 (35) 式代入 (24) 式，得

$$\mathrm{Re}f_2(\zeta)-\mathrm{Re}f_1(\zeta)=IH(x)H(t) \tag{36a}$$

$$(1/\varepsilon_2)\mathrm{Re}(\sqrt{k_2^2-\zeta^2}\,f'_2(\zeta))-(1/\varepsilon_1)\mathrm{Re}(\sqrt{k_1^2-\zeta^2}f'_1(\zeta))=0 \tag{36b}$$

(36a) 式两边同时对 x 求导，并注意到 (14b) 式，可得

$$\mathrm{Re}f'_2(\zeta)-\mathrm{Re}f'_1(\zeta)=-I\zeta^2\delta(1/\zeta)H(t) \tag{36a'}$$

把只在半平面有定义的解析函数 $f_1(\zeta_1)$、$f_2(\zeta_2)$ 按 (28) 式开拓到全平面，于是从(36a')，(36b) 式我们有

$$\Omega_1^+(\zeta)+\Omega_1^-(\zeta)=-2I\delta(\zeta) \tag{37a}$$

$$\Omega_2^+(\zeta)-\Omega_2^-(\zeta)=0 \tag{37b}$$

式中

$$\Omega_1(\zeta)=F'_2(\zeta)-F'_1(\zeta) \tag{38a}$$

$$\Omega_2(\zeta)=(1/\varepsilon_2)\sqrt{k_2^2-\zeta^2}\,F'_2(\zeta)+(1/\varepsilon_1)\sqrt{k_1^2-\zeta^2}\,F'_1(\zeta) \tag{38b}$$

Reiman 边值问题 (37) 式的解为

$$\Omega_1(\zeta)=F'_2(\zeta)-F'_1(\zeta)=iI/(\pi\zeta) \tag{39a}$$

$$\Omega_2(\zeta)=(1/\varepsilon_2)\sqrt{k_2^2-\zeta^2}\,F'_2(\zeta)+(1/\varepsilon_1)\sqrt{k_1^2-\zeta^2}\,F'_1(\zeta)=0 \tag{39b}$$

由此我们有

$$F'_1(\zeta)=-\frac{iI}{\pi\zeta}\,\frac{(1/\varepsilon_2)\sqrt{k_2^2-\zeta^2}}{(1/\varepsilon_1)\sqrt{k_1^2-\zeta^2}+(1/\varepsilon_2)\sqrt{k_2^2-\zeta^2}} \tag{40a}$$

$$F'_2(\zeta)=\frac{iI}{\pi\zeta}\,\frac{(1/\varepsilon_1)\sqrt{k_1^2-\zeta^2}}{(1/\varepsilon_1)\sqrt{k_1^2-\zeta^2}+(1/\varepsilon_2)\sqrt{k_2^2-\zeta^2}} \tag{40b}$$

于是从 (35) 式，经过简单的变换后，我们求得上下媒质的自相似H波波场为

$$H^{a}_{z}=(I/\pi)\mathrm{Im}\sqrt{(k_1^2-\zeta_a^2)(k_2^2-\zeta_a^2)}/(\varepsilon_a B_a) \tag{41a}$$

$$E^{a}_{x}=-(I/\pi)\mathrm{Im}(k_a^2-\zeta_a^2)\sqrt{k_\beta^2-\zeta_a^2}/(\varepsilon_1\varepsilon_2 B_a) \tag{41b}$$

$$E^{a}_{y}=(I/\pi)\mathrm{Im}\zeta_a\sqrt{(k_1^2-\zeta_a^2)(k_2^2-\zeta_a^2)}/(\varepsilon_1\varepsilon_2 B_a) \tag{41c}$$

$$B_a=[(1/\varepsilon_1)\sqrt{k_1^2-\zeta_a^2}+(1/\varepsilon_2)\sqrt{k_2^2-\zeta_a^2})(x\sqrt{k_a^2-\zeta_a^2}-y\zeta_a) \tag{41d}$$

$$\left(\alpha=1,\,2;\;\;\beta=\frac{2}{\alpha}\right)$$

其它形式的自相似电磁波场可类似求得，这里不再赘述。

参 考 文 献

[1] V. I. Smirnov, S. Sobolov, (1932a) Akad. Nauk. SSSR, Seism. Institut Trudy. 20, (1932b,c):

Acad. Sci. Paris, 194, 1437—1439, 1797—1799.
[2] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц 著,周奇译,连续媒质电动力学,人民教育出版社,北京,1964年.

ON SELF-SIMILAR SOLUTION OF THE ELECTROMAGNETIC FIELD

Gai Bingzheng
(Harbin Institute of Technology, Harbin)

Abstract The problem of self-similar solution of the two dimensional electromagnetic wave field are investigated. The structures of self-similar field compoments of E and H wave field are given. Applying the structures to the electromagnetic wave field excited by the current on the boundary surface in double layer medium, self-similar analytical solutions are obtained.

Key words Electromagnetic Wave field; Self-solution; Double layer medium