

# 各向同性介质中地震压力波的格子 Boltzmann 模拟

宋 敏<sup>1,2</sup>, 姜 平<sup>2</sup>, 闫广武<sup>3</sup>

(1. 北京交通大学 土木工程学院, 北京 100044; 2. 吉林建筑工程学院 土木工程学院, 长春 130021; 3. 吉林大学 数学学院, 长春 130012)

**摘 要:**给出了一种新的用于模拟地震压力波的格子 Boltzmann 模型。通过使用压力分布函数的 Chapman-Enskog 展开和多重尺度技术,给出了地震压力波方程的高阶矩。利用这个模型,模拟了各向同性介质中多震源引起的地震压力波的运动以及单震源在不同参数的各向同性介质中的地震压力波的运动情况。通过与有限差分方法的数值结果进行比较发现该结果与有限差分方法的结果吻合很好。

**关键词:**工程力学;格子 Boltzmann 模型;各向同性介质;地震压力波

**中图分类号:**O354 **文献标识码:**A **文章编号:**1671-5497(2009)Sup. 2-0341-03

## Lattice Boltzmann model for multi-seismic resources pressure wave in isotropic medium

SONG Min<sup>1,2</sup>, JIANG Ping<sup>2</sup>, YAN Guang-wu<sup>3</sup>

(1. Institute of Civil and Engineering, Beijing Jiaotong University, Beijing 100044, China; 2. Civil and Engineering Institute, Jilin Architectural Civil and Engineering Institute, Changchun 130021, China; 3. College of Mathematics, Jilin University, Changchun 130012, China)

**Abstract:** A new lattice Boltzmann model for simulating the seismic pressure wave is proposed. By using the Chapman-Enskog expansion and multi-scales technique to the pressure distribution function, we obtained the moments of the distribution function of the seismic pressure wave equations. Using this model, we simulated the pressure wave motion caused by the multi-seismic source in the isotropic medium and single-seismic source in two isotropic media with difference parameters. These numerical results reproduce the classical numerical results. By comparison between these results and results of the finite difference method, we find that the numerical results agree well with the finite difference method ones.

**Key words:** engineering mechanics; lattice Boltzmann method; isotropic medium; seismic pressure wave

格子 Boltzmann 方法(LBM)在近十几年来取得了很大的进展,已经发展成为用于计算流体力学的一种可选择的方法<sup>[1]</sup>。最近,由 Yan G

W<sup>[2-3]</sup>等提出了高阶矩阵模式,将格子 Boltzmann 模型应用于波运动,为研究其他波动问题提供了可选择的途径。

**收稿日期:**2009-04-24.

**基金项目:**国家自然科学基金项目(90305013);吉林大学创新基金项目(2004CX041).

**作者简介:**宋敏(1963-),女,教授,博士,北京交通大学博士后.研究方向:工程力学与工程数学.

E-mail: songmin0508@yahoo.com.cn

**通信作者:**闫广武(1964-),男,教授,博士生导师.研究方向:力学与工程数学. E-mail: yangw@email.jlu.edu.cn

最近,几位科学家提出了几种地震压力波模拟的格子气自动机模型。所有这些模型都与第一个给出格子气自动机模拟的 Mora 的声子模型相似,是基于类似声子的粒子的相互作用。这些模型与格子 Boltzmann 模型不同的关键之处,将粘性项处理成散射项,为此需要使用一个以粒子速度为变量的空间函数。然而,这样的处理过于强调物理机理而忽视模型的精度,是不必要的,是以损失模型精度为代价的。

本文通过使用压力分布函数和多重尺度技术,研究复杂介质中由于地震所产生的压力波的波动现象,得到了一系列的格子 Boltzmann 方程,平衡态分布函数的高阶矩和地震压力波方程。数值试验可以使我们更好的理解地震压力波传播的细观介观特性。

### 1 格子 Boltzmann 模型

选择二维的 FHP 网格<sup>[4]</sup>。分布函数  $f_\alpha(x, t)$  其定义为在节点  $x$ , 时刻  $t$ , 具有速度  $e_\alpha$  的粒子出现的某种概率,其中  $\alpha = 0, 1, \dots, b$  ( $\alpha = 0$  表示静止粒子)。在 FHP 格子中,  $b = 6$ , 粒子的速度为

$$e_\alpha = c \left[ x_0 \cos \frac{2(\alpha-1)\pi}{b} + y_0 \sin \frac{2(\alpha-1)\pi}{b} \right]$$

$$\alpha = 1, \dots, 6$$

式中:  $x_0, y_0$  为  $x, y$  方向上的单位向量。下面定义宏观量压力  $p(x, t)$

$$p(\mathbf{x}, t) = \sum_\alpha f_\alpha(\mathbf{x}, t) \quad (1)$$

为了得到一个稳定的统计宏观量,我们需要假设分布函数具有平衡态,并且

$$\sum_\alpha f_\alpha^{\text{eq}}(\mathbf{x}, t) = p(\mathbf{x}, t) \quad (2)$$

式中:  $f_\alpha^{\text{eq}}$  表示平衡态分布函数。

格子 Boltzmann 方程可以写为:

$$f_\alpha(\mathbf{x} + \mathbf{e}_\alpha t + 1) - f_\alpha(\mathbf{x}, t) = \Omega_\alpha(\mathbf{x}, t) \quad (3)$$

在方程(3)中的  $\Omega_\alpha$  是 BGK 型的碰撞项,  $\Omega_\alpha = -\frac{1}{\tau} [f_\alpha(\mathbf{x}, t) - f_\alpha^{\text{eq}}(\mathbf{x}, t)]$ ,  $\tau$  是弛豫时间。我们选择 Knudsen 数  $\epsilon$  作为数值模拟的时间步长和 Chapman-Enskog 展开的小参数<sup>[5]</sup>。

选择如下形式的平衡态分布方程  $f_\alpha^{(0)}$

$$\begin{cases} f_\alpha^{(0)} = pA_0 + A_2 \lambda \rho u_j e_{\alpha j}, \alpha \neq 0 \\ f_0^{(0)} = pB_0 \end{cases} \quad (4)$$

式中:

$$A_0 = \frac{\gamma D}{bc^2}, B_0 = 1 - \frac{\gamma D}{c}, A_2 = \frac{D}{bc^2} \quad (5)$$

式中:  $D$  为空间维数,这里  $D = 2$ 。因此平衡态分布函数满足

$$\sum_\alpha f_\alpha^{(0)} \mathbf{e}_{\alpha j} = \lambda \rho u_j \quad (6)$$

$$\sum_\alpha f_\alpha^{(0)} \mathbf{e}_{\alpha i} \mathbf{e}_{\alpha j} = \gamma p \delta_{ij} \quad (7)$$

式中:  $p$  为压力;  $\rho u_j$  为动量;  $\delta_{ij}$  为 Kronecker 符号;  $\lambda, \gamma$  为参数。

通过简单的代数运算,可得到具有二阶精度的压力波方程组

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \gamma \frac{\partial^2 p}{\partial x_i \partial x_i} = -\xi \frac{\partial^3 u_j}{\partial x_i^2 \partial x_j} - \eta \frac{\partial^3 u_i}{\partial x_j^2 \partial x_i} + O(\epsilon^2) \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \lambda \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} - \gamma \lambda \rho \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_j \partial x_i} = \\ \xi \frac{\partial^3 u_j}{\partial t \partial x_i \partial x_j} + \eta \frac{\partial^3 u_i}{\partial t \partial x_j \partial x_j} + O(\epsilon^2) \end{aligned} \quad (9)$$

其中:

$$\begin{cases} \xi = \epsilon(\tau - \frac{1}{2}) [2\lambda \frac{c^2 \rho}{D+2} - \lambda \gamma \rho] \\ \eta = \epsilon(\tau - \frac{1}{2}) [\frac{\lambda \rho c^2}{D(D+2)}] \end{cases} \quad (10)$$

### 2 数值模拟

应用本文模型,我们模拟多震源引起的地震压力波的传播问题。

考虑二维地震压力波在均匀介质中传播。在一正方形区域内,划分  $M = 100 \times 100$  的网格,因此,空间步长为  $\Delta x = \Delta y = 0.01$ 。初始条件为

$$u(x, y, 0) = 0.0, v(x, y, 0) = 0.0 \quad (11)$$

$$p(x, y, 0) =$$

$$\begin{cases} 100 \cdot \sin(50t) \cdot e^{-20|t - \frac{\pi}{100}|}, & 0 \leq t \leq \frac{\pi}{50} \\ 0, & t > \frac{\pi}{50} \end{cases} \quad (12)$$

而在位置  $(x, y)$  处有压力冲击震源。我们在不同的位置放置多个震源,观察压力波的传播情况。为了生动地描述地震压力波传播情况,我们专门绘制了介质纵向纤维的横向位移图。位移是通过横向的速度进行积分得到的。在图 1(a) 中时刻  $T = 100\Delta t$  时距离为 50 的两个震源引起的压力波的纵向纤维的横向位移快照。图 1(b) 是该问题的有限差分方法(MacCormack 格式)的结果,这两个结果基本相同。并且再现了在各向同性介

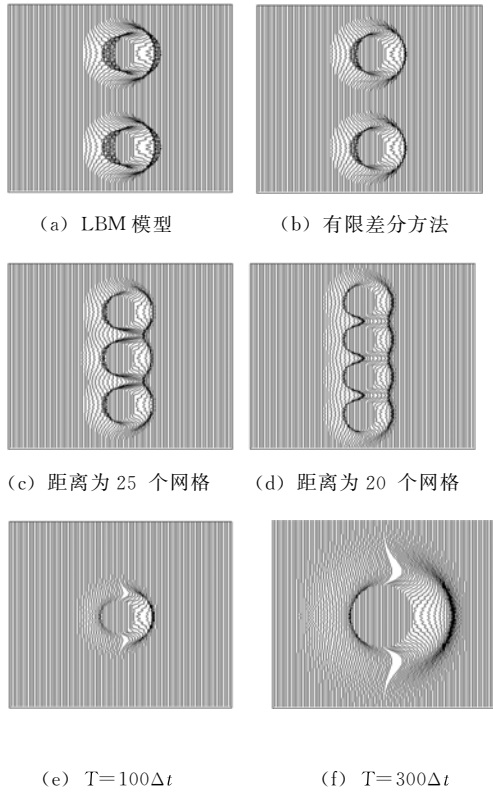


图 1 地震压力波传播快照(距离为 50 个网格)

Fig.1 Snapshots of the seismic pressure wave propagation (distance is 50 cells)

质中地震压力波传播的经典结果。

图 1 中(a)、(b)参数分别为:格子规模  $100 \times 100$ 。  $\Delta x = \Delta y = 0.01$ ,  $c = 3.0$ ,  $\tau = 0.506$ ,  $\rho = 0.1$ ,  $\gamma = 0.01$ ,震源在点(50,25)和(50,75)。

在图 1(c)、(d)为  $T = 100\Delta t$  三个震源和四个震源引起的压力波的纵向纤维的横向位移快照。在  $T = 100\Delta t$  时多个震源已经相互影响,压力波已经开始合成。该结果均与有限差分方法的计算结果相同。更多的震源可以模拟地震带引起的地震压力波的传播问题。

图 1(c)、(d)参数分别为:格子规模  $100 \times 100$ 。  $\Delta x = \Delta y = 0.01$ ,  $c = 3.0$ ,  $\tau = 0.506$ ,  $\rho = 0.1$ ,  $\gamma = 0.01$ ,三震源在点(50,25)、(50,50)和(50,75),四震源在点(50,20)、(50,40)、(50,60)和(50,85)。

最后,考虑二维地震压力波在两种不同  $\gamma$  的

均匀介质中传播。其中  $x < 50$  时  $\gamma = 0.1$ ,  $x \geq 50$  时  $\gamma = 0.2$ 。图 1(e)、(f)为  $T = 100\Delta t$ ,  $T = 300\Delta t$  两个时刻、位置在(50,50)的震源引起的压力波的纵向纤维的横向位移快照。由于两部分的  $\gamma$  不同,压力波的传播速度不同,并且出现位移的间断。与该结果已有的经典结果相同<sup>[6]</sup>。

图 1(e)、(f)参数分别为:格子规模  $100 \times 100$ 。  $\Delta x = \Delta y = 0.01$ ,  $c = 3.0$ ,  $\tau = 0.506$ ,  $\rho = 0.1$ ,  $\gamma = 0.01$ ,震源在点(50,50)。其中  $x < 50$  时  $\gamma = 0.1$ ,  $x \geq 50$  时  $\gamma = 0.2$ 。

### 3 结束语

提出了一个用于地震压力波的格子 Boltzmann 模型。该模型使用压力的线性平衡态分布函数而不用声子格子模型。通过选择不同的  $\gamma$  得到了不同的地震压力波的传播速度。本文模型亦可用于一些复杂的各项异性介质中地震压力波的运动模拟。

### 参考文献:

- [1] Chen S Y, Doolen G D. Lattice Boltzmann method for fluid flows[J]. Annu Fluid Mech, 1998,30(1): 329-364.
- [2] Yan G W. A lattice Boltzmann equation for waves [J]. Journal of Computational Physics, 2000, 161 (1): 61-69.
- [3] 闫广武,董银峰. 基于格子 Bhatnagar-Gross-Krook 模型的地震压力波模拟[J]. 力学学报,2005,37(2): 238-243.  
Yan Guang-wu, Dong Yin-feng. Application of the lattice Bhatnagar-Gross-Krook model to the simulation of seismic pressure wave[J]. Acta Mechanica Sinica, 2005,37(2): 238-243.
- [4] Frisch U, Hasslacher B, Pomeau Y. Lattice gas automata for the Navier-Stokes equations[J]. Phys Rev Lett, 1986, 56: 1505-1508.
- [5] Chapman S, Cowling T G. The mathematical theory of Non-uniform Gas[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1939.
- [6] Mora P. The lattice Boltzmann phononic lattice solid [J]. J Stat Phys, 1992, 68(3/4):591-609.