2005,**25A**(7):1061–1066

Acta Mathematica Scientia 数学物理学报

柱黑洞的熵 *

[1,2] 张子珍 [2] 张丽春 [2] 赵仁
([1] 山西大学物理系 太原 030006)
([2] 雁北师范学院物理系 大同 037009)

摘要：采用由广义测不准关系得到的新的态密度方程，研究了具有柱对称时空背景下黑柱的熵. 利用新的态密度方程后，不通过截断可以消除 brick-wall 模型中无法克服的发散项，并且同样可得到黑柱的熵与视界面积成正比的结论. 计算结果表明，黑柱熵是视界面上量子态的熵，是一种量子效应，是黑洞的内禀性质. 在计算中我们直接应用量子统计的方法，求柱黑洞背景下玻色场与费米场的配分函数，避开了求解各种粒子波动方程的困难，为研究各种时空黑洞熵提供了一条简捷的新途经.

关键词：广义测不准关系；量子统计；黑柱统计熵.

MR(2000) 主题分类：87C57 **中图分类号**：O412.1 **文献标识码**：A

文章编号：1003-3998(2005)07-1061-06

1 引言

黑洞熵是理论物理研究的重要课题. 因为熵具有统计意义，因而对黑洞熵的理解涉及到对黑洞微观本质的认识. 然而，熵如何作为黑洞微观状态的测度？这还没有很好地被理解，黑洞熵的统计起源问题并没有得到解决 [1]. 另一方面，自从 Bekenstein 和 Hawking 提出黑洞熵与其视界面积成正比以来 [2−4], 考察各种类型黑洞的热性质 [5] 成为黑洞物理学中的一个重要课题之一，尤其是对黑洞熵的研究近来非常活跃，人们为了探求黑洞的熵提出了各种求熵的方法 [6−11]. 其中用的最多的是研究黑洞 - 物质耦合系统的熵，即 G't Hooft 提出的 brick-wall 方法 [9]. 人们用此方法研究了各种球坐标系下，渐近平直时空中自由标量场的统计性质 [12−16], 发现黑洞熵的一般表达式是与黑洞视界面积成正比项，加上不与视界面积成正比且对数发散项. 然而，使人疑惑不解的是： 1) 黑洞视界外的标量场或 Dirac 场为什么就是黑洞的熵； 2) 态密度在视界附近发散问题； 3) 舍去对数项和把 L^3 项解释成远离围绕系统的真空的贡献； 4) 对标量场或 Dirac 场波函数近似求解问题； 5) 对非球坐标系下非渐近平直时空的熵如何计算. 以上问题都是原 brick-wall 方法中不尽人意的地方，而又无法克服的问题.

最近文献 [17-19] 应用广义测不准关系对态密度的影响，而给出的新的相体积，计算了球对称黑洞的熵. 计算结果表明，黑洞熵只有与视界面积成正比项，没有其它发散项. 为人们探讨黑洞熵的统计起源提供了一条新的途径.

收稿日期：2004-08-02; 修订日期：2005-03-23
E-mail: maria_zhangzi@sohu.com; zhao2969@sina.com.
* 基金项目：山西省自然科学基金 (20001009) 资助

本文将文献 [18] 研究黑洞熵的方法推广到研究用柱坐标系表示的黑柱的熵，得到黑柱的熵与视界面积成正比的结论．然而，由于我们利用了经广义测不准关系改进的态密度方程，从而使我们所研究的对象只是在视界附近 Planck 尺度的薄层，无需引进截断因子．这样计算的熵是黑洞视界面上的量子态数，是黑洞的内禀性质，是一种量子效应．不存在态密度在视界附近发散的疑难，在计算中我们采用了量子统计方法 [20], 回避了求解波动方程的困难．为研究各种时空背景下黑洞熵提供了一条可行之路．文中我们取温度的简单函数形式 $(C=G=K_B=1)$.

2 玻色场的熵

广义测不准关系 [21]

$$\Delta x \Delta p \geq \hbar + \frac{\lambda}{\hbar}(\Delta p)^2. \tag{1}$$

在 dVd^3p 相体积中，量子态的数目取如下的形式

$$\frac{dVd^3p}{(2\pi\hbar)^3(1+\lambda p^2)^3}, \tag{2}$$

式中 λ 是普朗克长度的量值.

柱黑洞的时空线元 [22,23]

$$\begin{aligned} dS^2 = & -\Big(\alpha^2\rho^2 - \frac{2(M+\Omega)}{\alpha\rho} + \frac{4Q^2}{\alpha^2\rho^2}\Big)dt^2 - \frac{16J}{3\alpha\rho}\Big(1 - \frac{2Q^2}{(M+\Omega)\alpha\rho}\Big)dt\mathrm{d}\varphi \\ & + \Big[\rho^2 + \frac{4(M-\Omega)}{\alpha^3\rho}\Big(1 - \frac{2Q^2}{(M+\Omega)\alpha\rho}\Big)\Big]\mathrm{d}\varphi^2 \\ & + \Big(\alpha^2\rho^2 - \frac{2(3\Omega-M)}{\alpha\rho} + \frac{(3\Omega-M)4Q^2}{(\Omega+M)\alpha^2\rho^2}\Big)^{-1}\mathrm{d}\rho^2 + \alpha^2\rho^2\mathrm{d}z^2, \end{aligned} \tag{3}$$

式中 M, Q 和 J 是黑洞在 z 轴方向单位高度的质量，电荷和角动量， $\Omega = \sqrt{M^2 - \frac{8J^2\alpha^2}{9}}$, $\alpha^2 = -\frac{1}{3}\Lambda$. 当电荷和角动量为零时，时空线元为

$$dS^2 = -\Big(\alpha^2\rho^2 - \frac{4M}{\alpha\rho}\Big)dt^2 + \Big(\alpha^2\rho^2 - \frac{4M}{\alpha\rho}\Big)^{-1}\mathrm{d}\rho^2 + \rho^2\mathrm{d}\varphi^2 + \alpha^2\rho^2\mathrm{d}z^2. \tag{4}$$

黑洞的 Hawking 辐射温度是

$$T_H = \frac{\alpha^2(\rho_+ - \rho_2)(\rho_+ - \rho_3)}{4\pi\rho_+} = \frac{\alpha}{2\pi}\frac{3}{2}(4M)^{1/3}. \tag{5}$$

式中 $\rho_+ = \frac{\sqrt[3]{4M}}{\alpha}$, 是方程

$$\alpha^2\rho^2 - \frac{4M}{\alpha\rho} = 0 \tag{6}$$

的实根，为黑洞的视界位置， ρ_2 和 ρ_3 是方程 (6) 的两个虚根.

黑洞在 z 轴方向，单位高度的视界面积为

$$A_H = 2\pi\alpha\rho_+^2. \tag{7}$$

按照文献 [24] 的观点，无穷远静止观测者，测得的固有辐射温度为：

$$T=\frac{T_H}{\chi}, \tag{8}$$

式中 $\chi=\sqrt{\alpha^2\rho^2-\frac{4M}{\alpha\rho}}$, 是红移因子.

对于玻色气体，系统的配分函数为

$$\ln Z=-\sum_i g_i\ln(1-\mathrm{e}^{-\beta\varepsilon_i}). \tag{9}$$

由方程 (2) 知，在单位体积内，粒子的辐射频率小于等于 v 的量子态数为

$$g(v)=j\frac{4\pi p^3}{3(2\pi\hbar)^3(1+\lambda p^2)^3}=j\frac{4\pi v^3}{3(1+\lambda 4\pi^2v^2)^3}, \tag{10}$$

式中 j 为粒子的自旋简并度．对时空 (4), 单位高度在任意 ρ 点的一维曲面为 $A(\rho)=\int\mathrm{d}A=\int\alpha\rho^2\mathrm{d}\varphi$, 所以，在黑洞视界外，任意 ρ 点任意厚度的壳层内系统的配分函数为

$$\begin{aligned}\ln Z&=-\int A(\rho)\sqrt{g_{\rho\rho}}\mathrm{d}\rho\sum_i g_i\ln(1-\mathrm{e}^{\beta\varepsilon_i})=-\int A(\rho)\sqrt{g_{\rho\rho}}\mathrm{d}\rho\int_0^\infty\mathrm{d}g(v)\ln(1-\mathrm{e}^{-\beta hv})\\&=j\int A(\rho)\sqrt{g_{\rho\rho}}\mathrm{d}\rho\int_0^\infty\frac{4\pi\beta h}{3(1+\lambda4\pi^2v^2)^3(\mathrm{e}^{\beta hv}-1)}v^3\mathrm{d}v\\&=j\beta_0\int A(\rho)\sqrt{g_{\rho\rho}}\mathrm{d}\rho\int_0^\infty\frac{4\pi h\sqrt{-g_{tt}}}{3(1+\lambda4\pi^2v^2)^3(\mathrm{e}^{\beta hv}-1)}v^3\mathrm{d}v.\end{aligned} \tag{11}$$

式中 $\beta=\beta_0\sqrt{-g_{tt}}.T_H=\frac{1}{\beta_0}$ 是黑洞的辐射温度．由自由能与配分函数的关系可得

$$F=-\frac{1}{\beta_0}\ln Z=-j\int A(\rho)\sqrt{g_{\rho\rho}}\mathrm{d}\rho\int_0^\infty\frac{4\pi h\sqrt{-g_{tt}}}{3(1+\lambda4\pi^2v^2)^3(\mathrm{e}^{\beta hv}-1)}v^3\mathrm{d}v. \tag{12}$$

因此，系统的熵可表为

$$\begin{aligned}S_b&=\beta_0^2\frac{\partial F}{\partial\beta_0}=j\beta_0\int A(\rho)\sqrt{g_{\rho\rho}}\mathrm{d}\rho\int_0^\infty\frac{4\pi\beta vh^2\sqrt{-g_{tt}}\mathrm{e}^{\beta hv}}{3(1+\lambda4\pi^2v^2)^3(\mathrm{e}^{\beta hv}-1)^2}v^3\mathrm{d}v\\&=j\frac{1}{6\pi^2\beta_0^3}\int\frac{A(\rho)\sqrt{g_{\rho\rho}}}{(-g_{tt})^{3/2}}\mathrm{d}\rho\int_0^\infty\frac{\mathrm{e}^xx^4\mathrm{d}x}{(1+\lambda\frac{x^2}{\beta_0^2(-g_{tt})})^3(\mathrm{e}^x-1)^2}.\end{aligned} \tag{13}$$

其中 $x=\beta hv$, 设

$$\begin{aligned}I_1(g_{tt})&=\int_0^\infty\frac{\mathrm{e}^xx^4\mathrm{d}x}{(1+\lambda\frac{x^2}{\beta_0^2(-g_{tt})})^3(\mathrm{e}^x-1)^2}\approx\int_0^\infty\frac{(x^2+x^3)\mathrm{d}x}{(1+\lambda\frac{x^2}{\beta_0^2(-g_{tt})})^3}\\&=\frac{\pi}{16}\beta_0^3\Big(\frac{-g_{tt}}{\lambda}\Big)^{3/2}+\frac{1}{4}\beta_0^4\Big(\frac{-g_{tt}}{\lambda}\Big)^2.\end{aligned} \tag{14}$$

在 (13) 式中，我们对 ρ 的积分区间取 $[\rho_H,\rho_H+\varepsilon]$. 把 (14) 代入 (13) 式，可得

$$\begin{aligned}S_b&=\frac{j}{6\pi^2\beta_0^3}\int_{\rho_H}^{\rho_H+\varepsilon}\frac{A(\rho)\sqrt{g_{\rho\rho}}\mathrm{d}\rho}{(-g_{tt})^{3/2}}\left[\frac{\pi}{16}\beta_0^3\Big(\frac{-g_{tt}}{\lambda}\Big)^{3/2}+\frac{1}{4}\beta_0^4\Big(\frac{-g_{tt}}{\lambda}\Big)^2\right]\\&=j\frac{A(\rho_H)}{6\pi^2}\left[\frac{\pi}{16\lambda^{3/2}}\sqrt{\frac{2\varepsilon}{\kappa}}+\frac{1}{4}\beta_0\frac{\varepsilon}{\lambda^2}\right].\end{aligned} \tag{15}$$

我们感兴趣的仅仅是来自视界附近的贡献，由广义测不准关系 (1) 不难得到在 Planck 尺度下位置的最小不确定度为 $2\sqrt{\lambda}$, 以此作为空间线元的最小长度，则有

$$2\sqrt{\lambda}=\int_{r_e}^{r_e+\varepsilon}\frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{f}}\approx\int_{r_e}^{r_e+\varepsilon}\frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{2\kappa_e(r-r_e)}}=\sqrt{\frac{2\varepsilon}{\kappa_e}},\tag{16}$$

其中 κ 是黑洞视界的表面引力， $\kappa=2\pi\beta_0^{-1}$. 由此我们可得熵的表达式为

$$S_b=j\frac{3A(\rho_H)}{16\lambda\pi},\tag{17}$$

式中， $A(\rho_H)$ 是黑柱在单位高度 z 轴方向对应的视界面积.

3 Fermi 场的熵

对于 Fermi 系统，配分函数

$$\ln Z=\sum_i g_i\ln(1+\mathrm{e}^{-\beta\varepsilon_i}).\tag{18}$$

由 (10) 式，可得

$$\begin{aligned}S_f=\beta_0^2\frac{\partial F}{\partial\beta_0}&=\int i\beta_0A(\rho)\mathrm{d}\rho\int_0^\infty\frac{4\pi\beta v\mathrm{e}^{\beta hv}h^2}{3(1+\lambda4\pi^2v^2)^3(\mathrm{e}^{\beta hv}+1)^2}v^3\mathrm{d}v\\&=i\frac{1}{6\pi^2\beta_0^3}\int\frac{A(\rho)\mathrm{d}\rho}{\chi^2}\int_0^\infty\frac{\mathrm{e}^xx^4\mathrm{d}x}{(1+\lambda\frac{x^2}{\beta_0^2\chi})^3(\mathrm{e}^x+1)^2}.\end{aligned}\tag{19}$$

$$\begin{aligned}I_2(\chi)&=\int_0^\infty\frac{\mathrm{e}^xx^4\mathrm{d}x}{(1+\lambda\frac{x^2}{\beta_0^2\chi})^3(\mathrm{e}^x+1)^2}\\&=\int_0^\infty\frac{\mathrm{e}^xx^4\mathrm{d}x}{(1+\mu x^2)^3(\mathrm{e}^x+1)^2}\\&=\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial\mu^2}\int_0^\infty\frac{\mathrm{e}^x\mathrm{d}x}{(1+\mu x^2)(\mathrm{e}^x+1)^2}\\&=-\frac{\partial^2}{\partial\mu^2}\int_0^\infty\frac{\mu x\mathrm{d}x}{(\mathrm{e}^x+1)(1+\mu x^2)^2}\\&\approx-\frac{\partial^2}{\partial\mu^2}\int_0^\infty\frac{\mu x\mathrm{d}x}{(x+2)(1+2\mu x^2)}\\&=-\frac{\partial^2}{\partial\mu^2}\int_0^\infty\left[\frac{\mu}{(1+2\mu x^2)}-\frac{2\mu}{(x+2)(1+2\mu x^2)}\right]\mathrm{d}x\\&=-\frac{\partial^2}{\partial\mu^2}\left[\sqrt{\frac{\mu}{8}}\pi-\frac{\mu}{2(2\mu+1)}\Big(\ln(2+x)^2-\ln(1+2\mu x^2)+4\frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{2}}\mathrm{arctg}x\sqrt{\frac{\mu}{2}}\Big)_0^\infty\right]\\&\approx\frac{1}{4}\mu^{-2}=\frac{1}{4}\beta_0^4\Big(\frac{\chi}{\lambda}\Big)^2.\end{aligned}\tag{20}$$

由此， Fermi 场的熵

$$S_f=i\frac{1}{6\pi^2\beta_0^3}\int_{\rho_H}^{\rho_H+\varepsilon}\frac{A(\rho)\mathrm{d}\rho}{\chi^2}\frac{1}{4}\beta_0^4(\frac{\chi}{\lambda})^2=i\frac{A(\rho_H)}{6\pi^2}\frac{1}{4}\beta_0\frac{\varepsilon}{\lambda^2}=i\frac{A(\rho_H)}{6\pi\lambda}.\tag{21}$$

式中， i 为费米子自旋简并度.

4 结论

通过以上分析，在柱黑洞背景下，从统计物理学角度出发，直接运用统计方法求解各种场的配分函数，避开了求解波动方程的困难，克服了近似处理的方式．由于我们运用了广义测不准关系对态密度的影响方程，在计算中无需引入截断因子，不存在黑洞视界外辐射场为什么是黑洞熵疑难，也不存在原 brick-wall 方法中无法克服的发散项，也没有舍去项．由此利用广义测不准关系计算黑洞熵不但对球坐标描述的时空有效，而且对柱对称时空也适用，因此我们所研究的方法具有普遍性．早在 1992 年，刘辽和李立新提出引力影响物态方程 [25], 并给出了在黑洞视界附近热辐射的态方程．王定雄利用此方程式计算了施瓦西黑洞的熵 [26], 得到黑洞熵与视界面积成正比的关系．并且在视界附近也没有发散项和舍去项．这样从不同的考虑出发，得到同样的结论，两者之间必有内在联系，即李－刘方程与广义测不准关系之间的内在联系是我们需要研究的理论物理课题．

参 考 文 献

[1] Liberati S. Problems in black-hole entropy interpretation. Il Nuovo Cimento, 1997, **B112**: 405
[2] Bekenstein J D. Black hole and entropy. Phys Rev, 1973, **D7**: 2333
[3] Hawking S W. Particle Creation by black hole. Commun Math Phys, 1975, **43**: 199
[4] Gibbons G W, Hawking S W. Cosmological event horizon thermodynamics, and particle. Creation Phys Rev, 1977, **D15**: 2738
[5] Zhao Z. Thermal Properties of Black Hole and Singularities of Space-time. 北京：北京师范大学出版社，1999. 265
[6] Hochberg D, Kephart T W, York J W. Positivity of entropy in the semiclassical theory of black holes and radiation. Phys Rev, 1993, **D48**: 479
[7] Padmanaban T. Phase volume occupied by a test particle around an incipient black hole. Physics letters A, 1989, **136**: 203
[8] Li X, Zhao Z. Entropy of a Vaidya black hole. Phys Rev, 2000, **D62**: 104001
[9] G't Hooft. On the quantum structure of a black hole. Nucl Phys, 1985, **B256**: 727
[10] Cognola G, Lecca P. Electromagnetic fields in schwarzschild and reissner-nordstrom geometry. Phys Rev, 1998, **D57**: 1108
[11] Cai R G, Ji J Y, Soh K S. Action and entropy of black hole in spacetime with a cosmological constant. Class Quantum Grav, 1998, **15**: 2783
[12] Solodukhin S N. Conical singularity and quantum corrections to the entropy of a black hole. Phys Rev, 1995, **D51**: 609
[13] 张丽春，赵仁． Sen 黑洞熵与能斯特定理．物理学报， 2004, **53**: 362
[14] Zhao R, Zhang J F, Zhang L C. Quantum statistical entropy of black hole. Gen Rel Grav, 2002, **34**: 2063
[15] 张靖仪，赵峥．直线加速动态黑洞 Dirac 场的熵．物理学报， 2002, **51**: 2399
[16] Jing J L, Yan M L. Statistical-mechanical entropy of the general static black hole due to electromagnetic field. Chin Phys, 2000, **9**: 389
[17] Li X. Black hole entropy without brick wall. Phys Letts, 2002, **B540**: 9
[18] Zhao R, Wu Y Q, Zhang L C. Spherically symmetric black-hole without brick walls. Class Quantum Grav, 2003, **20**: 4885
[19] Liu C Z, Li X, Zhao Z. Generalized uncertainty principle influences the entropy of a nonstationary black hole. International Journal of Theoretical Physics, 2003, **42**: 2081
[20] Zhao R, Zhang J F, Zhang L C. Statistical entropy in reissner-nordstrom black hole. Nucl Phys, 2001, **B609**: 247
[21] Chang L N, Minic D, Okaruma N, Takeuchi T. Effect of the minimal length uncertainty relation on the density of states and the cosmological constant problem. Phys Rev, 2002, **D65**: 125028
[22] Lemos J P S, Zanelli V T. Rotating charged black strings and three-dimensional black holes. Phys Rev, 1996, **D54**: 3840
[23] Andrew D B. φ_2 in the spacetime of a cylindrical black hole. Gen Rel Grav, 1999, **31**: 1549

[24] Tolman R C. Relativity, Thermodynamics and Cosmology. Oxford: Oxford University Press, 1034

[25] Li L X, Liu L. Properties of radiation near the black-hole horizon and the second law of thermodynamics. Phys Rev, 1992, **D46**: 3296

[26] Wang D X. Entropy of self-gravitating radiation systems and the entropy of black holes. Phys Rev, 1994, **D50**: 7385

Entropy of Cylindrical Black Hole

[1,2]Zhang Zizhen [2]Zhang Lichun [2]Zhao Ren

([1] *Department of Physics, Shanxi University, Taiyuan 030006*)

([2] *Department of Physics, Yanbei Normal Institute, Datong 037009*)

Abstract: Using the new equation of state density motivated by the generalized uncertainty relation, the authors derive the entropy of the black cylinder on the background of the cylindrically symmetric spacetime. When the new equation of state density is utilized to obtain that the entropy of the black cylinder is proportional to the horizon area, the divergence appearing in the brick wall model is removed, without any cutoff. It is shown that black cylinder's entropy is the entropy of quantum state on the surface of horizon. The black cylinder's entropy is a kind of quantum effect. It is the intrinsic property of the black cylinder. Via the method of quantum statistics, the authors directly derive the partition functions of Bosonic and Fermi field in black cylinder. The authors also avoid the difficult to solve the wave equation of various particles. The authors offer a new simple and direct way of calculating the entropy of black cylinders of different complicated spacetime.

Key words: Quantum statistics; Generalized uncertainty relation; Statistical entropy of black cylinder.

MR(2000) Subject Classification: 87C57