2004,**24A**(1):123－128

Acta Mathematica Scientia
数学物理学报

一维相对论振子运动的研究*

朱　平

(思茅师范专科学校成教处　云南思茅 665000)

摘要:该文运用椭圆积分的理论,给出了一维相对论振子运动的解析解以及振子的振动周期.指出相对论振子的振动周期不但与振子的固有性质有关,而且还与振子的振幅有关.

关键词:相对论振子;椭圆积分;运动研究。

MR(2000)主题分类:83C10　　**中图分类号**:O412.1　　**文献标识码**:A

文章编号:1003-3998(2004)01-123-06

一维相对论振子的运动情况,美国 Penfield R,Zatzkis H[1] 从能量守恒原理出发,得到了精确到$\frac{{\omega_0}^2a^2}{c^2}$级的位移近似解

$$\omega_0 t \simeq \left(1+\frac{3{\omega_0}^2a^2}{16c^2}\right)\theta-\frac{3{\omega_0}^2a^2}{32c^2}\sin 2\theta, \tag{1}$$

其中 $x=a\cos\theta$, x 为振子位移, a 为振子振幅。Penfield 指出,当 t 甚大时

$$x \simeq a\cos\left[\omega_0\left(1-\frac{3{\omega_0}^2a^2}{16c^2}t\right)\right]. \tag{2}$$

1986 年,周凌云采用奇异摄动解的方法得出了精确到 $\varepsilon=\frac{a^2{\omega_0}^2}{2c^2}$的近似解[2]

$$x \simeq a\cos\omega_0\left(1-\frac{3\varepsilon}{8}\right)t-\varepsilon\left[\frac{3}{32}a\cos\omega_0\left(1-\frac{3\varepsilon}{8}\right)t-\frac{3}{32}a\cos 3\omega_0\left(1-\frac{3\varepsilon}{8}\right)t\right]. \tag{3}$$

继而,周凌云又在文献[3]采用小参数法得出了精确到 $\left(\frac{a^2{\omega_0}^2}{2c^2}\right)^2$的近似解

$$x \simeq \frac{a}{4}\cos\omega_0 t+\frac{3a}{4}\left(1-\frac{{\omega_0}^2a^2}{16c^2+9{\omega_0}^2a^2}\right)\cos\frac{\omega_0}{\sqrt{1+\frac{a^2{\omega_0}^2}{2c^2}}}t+\frac{3a^3{\omega_0}^2}{4(16c^2+9{\omega_0}^2a^2)}\cos 3\omega_0 t. \tag{4}$$

显然,周的方法不但提高了解的精度,而且没有附加 t 甚大的条件。

一维相对论振子的研究,对于讨论分子振动能级的相对论修正具有重要的意义[4,5]. 本文运用椭圆积分的理论,给出了一维相对论振子运动的解析解以及振子振动周期的计算式子. 对以往有关文献中不够准确的地方作出了修正,并指出相对论振子的振动周期不但与振子的固有性质 ω_0 有关,而且还与振子振幅有关。

取一维相对论振子的受力方向为 x 轴方向,振子受力 $\vec{F}=-k_0x\vec{i}$.

式中 $k_0=m_0{\omega_0}^2$, m_0 为振子的静质量, ω_0 为经典谐振子的固有频率.

收稿日期:2002-04-08;修订日期:2002-12-16

* 基金项目:思茅师专自然科学基金资助

按文献[6]，相对论效应下的牛顿第二定律的形式可表为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}m_0\left(1+\frac{\int_{t_0}^{t}\vec{F}.\vec{v}\mathrm{d}t}{m_0c^2}\right)\vec{v}=\vec{F}, \tag{5}$$

c 为光速，$\vec{v}$ 为振子的速度 $\dot{x}$. 取初始条件：$t=0$，$x=-a$，$\dot{x}=0$. 于是

$$\int_0^t\vec{F}.\vec{v}\mathrm{d}t=\int_{-a}^{x}(-k_0x)\mathrm{d}x=\frac{m_0{\omega_0}^2}{2}(a^2-x^2). \tag{6}$$

由(4)、(5)、(6)有

$$\left[1+\frac{{\omega_0}^2}{2c^2}(a^2-x^2)\right]\ddot{x}-\frac{{\omega_0}^2}{c^2}x\dot{x}^2+{\omega_0}^2x=0. \tag{7}$$

而 $\ddot{x}=\frac{\mathrm{d}\dot{x}}{\mathrm{d}x}\dot{x}$，代人(7)式进行化简整理，再代人初始条件后有

$$\dot{x}=\pm\frac{\sqrt{{\omega_0}^2(a^2-x^2)\left[1+\frac{{\omega_0}^2}{4c^2}(a^2-x^2)\right]}}{\left[1+\frac{{\omega_0}^2}{2c^2}(a^2-x^2)\right]}. \tag{8}$$

设振子的振动周期为 T，当 $mT\leqslant t\leqslant\frac{T}{2}+mT$ $(m=0,1,2,\cdots)$时

$$\dot{x}>0,\ \dot{x}=\frac{\omega_0\sqrt{(a^2-x^2)\left[1+\frac{{\omega_0}^2}{4c^2}(a^2-x^2)\right]}}{\left[1+\frac{{\omega_0}^2}{2c^2}(a^2-x^2)\right]}. \tag{9}$$

当$\left(\frac{1}{2}+m\right)T\leqslant t\leqslant(m+1)T$，$m=0,1,2,\cdots$时

$$\dot{x}<0,\ \dot{x}=-\omega_0\frac{\sqrt{(a^2-x^2)\left[1+\frac{{\omega_0}^2}{4c^2}(a^2-x^2)\right]}}{\left[1+\frac{{\omega_0}^2}{2c^2}(a^2-x^2)\right]}. \tag{10}$$

(9)、(10)两式为振子的速度解析式. 文献[3]中给出振子的速度的表达式

$$\dot{x}=\omega_0\frac{\sqrt{(a^2-x^2)\left[1+\frac{{\omega_0}^2}{4c^2}(a^2-x^2)\right]}}{\left[1+\frac{{\omega_0}^2}{2c^2}(a^2-x^2)\right]},$$

只考虑了 $\dot{x}>0$ 的情况. 这是不够完全的，因为(9)式与(10)式是不能互相包含的.

当 $0\leqslant t\leqslant\frac{T}{2}$时，振子处在第一个前半周期

$$t=\frac{1}{\omega_0}\int_{-a}^{x}\frac{\left[1+\frac{{\omega_0}^2}{2c^2}(a^2-x^2)\right]\mathrm{d}x}{\sqrt{(a^2-x^2)\left[1+\frac{{\omega_0}^2}{4c^2}(a^2-x^2)\right]}}. \tag{11}$$

当$\frac{T}{2}\leqslant t\leqslant T$ 时，振子处在第一个后半周期

$$t-\frac{T}{2}=-\frac{1}{\omega_0}\int_{a}^{x}\frac{\left[1+\frac{{\omega_0}^2}{2c^2}(a^2-x^2)\right]\mathrm{d}x}{\sqrt{(a^2-x^2)\left[1+\frac{{\omega_0}^2}{4c^2}(a^2-x^2)\right]}}. \tag{12}$$

以下讨论(11)、(12)两式的求解。

(11)式被积函数分母无理式的四个根分别是$\pm a$，$\pm\sqrt{a^2+\frac{4c^2}{\omega_0{}^2}}$，于是从(11)式有

$$t=\frac{1+\frac{\omega_0{}^2a^2}{2c^2}}{\frac{\omega_0{}^2}{2c}}\int_{-a}^{x}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x-a)(x+a)(x-\sqrt{a^2+\frac{4c^2}{\omega_0{}^2}})(x+\sqrt{a^2+\frac{4c^2}{\omega_0{}^2}})}}$$

$$-\frac{1}{c}\int_{-a}^{x}\frac{x^2\mathrm{d}x}{\sqrt{(x-a)(x+a)(x-\sqrt{a^2+\frac{4c^2}{\omega_0{}^2}})(x+\sqrt{a^2+\frac{4c^2}{\omega_0{}^2}})}}$$

$$=(1+\frac{\omega_0{}^2a^2}{2c^2})\frac{2c}{\omega_0{}^2}I_1-\frac{1}{c}I_2,\tag{13}$$

$$I_1=\int_{-a}^{x}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x-a)(x+a)(x-\sqrt{a^2+\frac{4c^2}{\omega_0{}^2}})(x+\sqrt{a^2+\frac{4c^2}{\omega_0{}^2}})}},$$

$$I_2=\int_{-a}^{x}\frac{x^2\mathrm{d}x}{\sqrt{(x-a)(x+a)(x-\sqrt{a^2+\frac{4c^2}{\omega_0{}^2}})(x+\sqrt{a^2+\frac{4c^2}{\omega_0{}^2}})}},$$

I_1、I_2 为椭圆积分．令

$$a'=\sqrt{a^2+\frac{4c^2}{\omega_0{}^2}},\ b'=a,\ c'=-a,\ d'=-\sqrt{a^2+\frac{4c^2}{\omega_0{}^2}},$$

由椭圆积分公式[7]

$$I_1=gF(\varphi,k),$$

其中

$$sn^2u=\frac{(b'-d')(x-c')}{(b'-c')(b'-d')}=\frac{(a+\sqrt{a^2+\frac{4c^2}{\omega_0{}^2}})(x+a)}{2a(x+\sqrt{a^2+\frac{4c^2}{\omega_0{}^2}})},$$

$$k^2=\frac{(b'-c')(a'-d')}{(a'-c')(b'-d')}=\frac{4a\sqrt{a^2+\frac{4c^2}{\omega_0{}^2}}}{(a+\sqrt{a^2+\frac{4c^2}{\omega_0{}^2}})^2},$$

$$g=\frac{2}{\sqrt{(a'-c')(b'-d')}}=\frac{2}{a+\sqrt{a^2+\frac{4c^2}{\omega_0{}^2}}},$$

$$0<\alpha^2=\frac{(b'-c')}{(b'-d')}=\frac{2}{a+\sqrt{a+\frac{4c^2}{\omega_0{}^2}}}<k^2,$$

$$\varphi=amu_1=\sin^{-1}\sqrt{\frac{(b'-d')(x-c')}{(b'-c')(x-d')}}=\sin^{-1}\sqrt{\frac{(a+\sqrt{a^2+\frac{4c^2}{\omega_0{}^2}})(x+a)}{2a(x+\sqrt{a^2+\frac{4c^2}{\omega_0{}^2}})}},$$

$$snu_1=\sin\varphi,$$

而 $F(\varphi,k)$ 为第一类椭圆积分函数．由椭圆积分公式[7]

$$I_2=a^2g\left\{\frac{1}{\alpha^4}\left[\alpha_1{}^4u+2\alpha_1{}^2(\alpha^2-\alpha_1{}^2)V_1+(\alpha^2-\alpha_1{}^2)^2V_2\right]\right\},$$

而
$$\alpha_1{}^2=\frac{(b'-c')d'}{c'(b'-d')}=\frac{2\sqrt{a^2+\frac{4c^2}{\omega_0{}^2}}}{a+\sqrt{a^2+\frac{4c^2}{\omega_0{}^2}}},u=F(\varphi,k),V_1=\Pi(\varphi,\alpha^2,k),$$

$\Pi(\varphi,\alpha^2,k)$ 为第三类椭圆积分函数

$$V_2=\frac{1}{2(\alpha^2-1)(k^2-\alpha^2)}\Big[\alpha^2E(u)+(k^2-\alpha^2)u+(2\alpha^2k^2+2\alpha^2$$
$$-\alpha^4-3k^2)\Pi(\varphi,\alpha^2,k)-\frac{\alpha^4\, snu\ cnu\ dnu}{1-\alpha^2sn^2u}\Big],$$

$E(u)$为第二类椭圆积分函数. 所以，$0\leqslant t\leqslant\frac{T}{2}$时

$$t=\Big[(1+\frac{\omega_0{}^2a^2}{2c^2})\frac{2c}{\omega_0{}^2}\Big]gF(\varphi,k)$$
$$-\frac{a^2g}{c\alpha^4}\{\alpha_1{}^4u+2\alpha_1{}^2(\alpha^2-\alpha_1{}^2)\Pi(\varphi,\alpha^2,k)+(\alpha^2-\alpha_1{}^2)^2V_2\}. \tag{14}$$

同理,讨论当$\frac{T}{2}\leqslant t\leqslant T$ 时的解. 在(12)式中令 $y=-x,\mathrm{d}y=-\mathrm{d}x$,则

$$t=\frac{T}{2}+\frac{1}{\omega_0}\int_{-a}^{-y}\frac{\left[1+\frac{\omega_0^2}{2c^2}(a^2-y^2)\right]\mathrm{d}y}{\sqrt{(a^2-y^2)\left[1+\frac{\omega_0^2}{4c^2}(a^2-y^2)\right]}}.$$

而$\sqrt{a^2+\frac{4c^2}{\omega_0^2}}>a\geqslant-y\geqslant-a>-\sqrt{a^2+\frac{4c^2}{\omega_0^2}}$,即 $a'>b'\geqslant-y\geqslant c'>d'$, 所以

$$t=\frac{T}{2}+\Big[(1+\frac{\omega_0^2a^2}{2c^2})\frac{2c}{\omega_0^2}\Big]gF(\varphi,k)$$
$$-\frac{a^2g}{c\alpha^4}\{\alpha_1{}^4u+2\alpha_1{}^2(\alpha^2-\alpha_1{}^2)\Pi(\varphi,\alpha^2,k)+(\alpha^2-\alpha_1{}^2)^2V_2\}.$$

而
$$\frac{T}{2}=\frac{1}{\omega_0}\int_{-a}^{a}\frac{\left[1+\frac{\omega_0^2}{2c^2}(a^2-x^2)\right]\mathrm{d}x}{\sqrt{(a^2-x^2)\left[1+\frac{\omega_0^2}{4c^2}(a^2-x^2)\right]}}$$
$$=\Big[(1+\frac{\omega_0^2a^2}{2c^2})\frac{2c}{\omega_0^2}\Big]gF(\frac{\pi}{2},k)$$
$$-\frac{a^2g}{c\alpha^4}\left\{\alpha_1^4F(\frac{\pi}{2},k)+2\alpha_1^2(\alpha^2-\alpha_1^2)\Pi(\frac{\pi}{2},\alpha^2,k)+(\alpha^2-\alpha_1^2)^2V_2(\frac{\pi}{2})\right\},$$

$$t=\Big[(1+\frac{\omega_0^2a^2}{2c^2})\frac{2c}{\omega_0^2}\Big]g\Big[F(\frac{\pi}{2},k)+F(\varphi,k)\Big]$$
$$-\frac{a^2g}{c\alpha^4}\Big\{\alpha_1^4\Big[F(\frac{\pi}{2},k)+F(\varphi,k)\Big]+2\alpha_1^2(\alpha^2-\alpha_1^2)\Big[\Pi(\frac{\pi}{2},\alpha^2,k)+\Pi(\varphi,\alpha^2,k)\Big]$$
$$+(\alpha^2-\alpha_1^2)^2\Big[V_2(\frac{\pi}{2})+V_2(\varphi)\Big]\Big\}. \tag{15}$$

于是,利用相对论振子的周期性得到它的一般解.

当 $mT\leqslant t\leqslant(\frac{1}{2}+m)T, m=1,2,3,\cdots$ 时

$$t=(1+\frac{\omega_0^2 a^2}{2c^2})\frac{2c}{\omega_0^2}g[2mF(\frac{\pi}{2},k)+F(\varphi,k)]-\frac{a^2 g}{c\alpha^4}\Big\{\alpha_1^4[2mF(\frac{\pi}{2},k)+F(\varphi,k)]$$
$$+2\alpha_1^2(\alpha^2-\alpha_1^2)[2m\Pi(\frac{\pi}{2},\alpha^2,k)+\Pi(\varphi,\alpha^2,k)]+(\alpha^2-\alpha_1^2)^2[2mV_2(\frac{\pi}{2})+V_2(\varphi)]\Big\};\tag{16}$$

当 $(m+\frac{1}{2})T\leqslant t\leqslant(m+1)T, m=1,2,3,\cdots$ 时

$$\begin{aligned}t&=(1+\frac{\omega_0^2 a^2}{2c^2})\frac{2c}{\omega_0^2}g[2(m+\frac{1}{2})F(\frac{\pi}{2},k)+F(\varphi,k)]\\&-\frac{a^2 g}{c\alpha^4}\Big\{\alpha_1^4[2(m+\frac{1}{2})F(\frac{\pi}{2},k)+F(\varphi,k)]\\&+2\alpha_1^2(\alpha^2-\alpha_1^2)[2(m+\frac{1}{2})\Pi(\frac{\pi}{2},\alpha^2,k)+\Pi(\varphi,\alpha^2,k)]\\&+(\alpha^2-\alpha_1^2)^2[2(m+\frac{1}{2})V_2(\frac{\pi}{2})+V_2(\varphi)]\Big\}.\end{aligned}\tag{17}$$

(16)、(17)两式中，t 均为 φ、k 的函数，而 $\varphi=\sin^{-1}\sqrt{\frac{(a+\sqrt{a^2+\frac{4c^2}{\omega_0{}^2}})(x+a)}{2a(x+\sqrt{a^2+\frac{4c^2}{\omega_0{}^2}})}}$，$\varphi$ 是 x 的函数. $k^2=\frac{4a\sqrt{a^2+\frac{4c^2}{\omega_0{}^2}}}{(a+\sqrt{a^2+\frac{4c^2}{\omega_0{}^2}})^2}$，对于确定的振子和初始条件，$k$ 是一常数，不同的振子 k 的数值不同。因此，对于给定初始条件的振子而言，t 是位移 x 的函数. (16)、(17)两式即为一维相对论振子的位移解析式. 文献[2]得到了精确到 $\frac{a^2\omega_0{}^2}{2c^2}$ 级的相对论振子的近似振动周期

$$T\simeq\frac{2\pi}{\omega_0}(1+\frac{3a^2\omega_0{}^2}{16c^2}).\tag{18}$$

由(14)、(15)式均可得出一维相对论振子振动周期的计算式子

$$\begin{aligned}T&=(1+\frac{\omega_0^2 a^2}{2c^2})\frac{4c}{\omega_0^2}\,gF(\frac{\pi}{2},k)\\&-\frac{a^2 g}{c\alpha^4}\Big\{2\alpha_1^4F(\frac{\pi}{2},k)+4\alpha_1^2(\alpha^2-\alpha_1^2)\Pi(\frac{\pi}{2},\alpha^2,k)+2(\alpha^2-\alpha_1^2)^2V_2(\frac{\pi}{2})\Big\}.\end{aligned}\tag{19}$$

取 $\frac{\omega_0 a}{c}=0.1$，则 $sn^2u=1$，$k^2=1.812010\times10^{-1}$，$g=9.512490\times10^{-2}$，$\alpha^2=9.512490\times10^{-2}$，$\varphi=\frac{\pi}{2}$，$snu_1=\sin\varphi=1$，$\alpha_1{}^2=1.904875$，$k=0.4256771$，$\sin^{-1}k=25°12'$，$F(\varphi,k)=u=1.648995$，

$$\begin{aligned}V_1&=\Pi(\frac{\pi}{2},\alpha^2,k)=\Pi(\alpha^2,k)=K+\frac{\alpha KZ(\beta,k)}{\sqrt{(1-\alpha^2)(k^2-\alpha^2)}}\\&=F(\frac{\pi}{2},k)+\frac{\alpha KZ(46°24',k)}{\sqrt{(1-\alpha^2)(k^2-\alpha^2)}}=1.734386,\end{aligned}$$

$$E(u) = E(\frac{\pi}{2}, k) = 1.498115,\ cnu = 0,$$

$$V_2 = \frac{1}{2(\alpha^2-1)(k^2-\alpha^2)}[\alpha^2 E(u) + (k^2-\alpha^2)u + (2\alpha^2k^2 + 2\alpha^2 - \alpha^4 - 3k^2)\Pi(\frac{\pi}{2}, \alpha^2, k) - \frac{\alpha^4 snu\ cnu\ dnu}{1-\alpha^2 sn^2 u}] = 4.401440 \times 10^{-2}.$$

而$(1+\frac{\omega_0^2 a^2}{2c^2})\frac{4c}{\omega_0^2}gF(\frac{\pi}{2},k) = 2.101930\times 10^{-7}a$，$\frac{a^2 g}{c\alpha^4}\{\alpha_1^4 u + 2\alpha_1{}^2(\alpha^2-\alpha_1^2)V_1 + (\alpha^2-\alpha_1^2)^2 V_2\} = -2.869194\times 10^{-7}a$，$T = 2(1.050965\times 10^{-7}a + 2.869194\times 10^{-7}a) = 7.840318\times 10^{-7}a$（秒）.

这个结果告诉我们，相对论振子的周期不但与振子的固有特性 ω_0 有关，而且还与振子的振幅 a 有关，这是区别于经典振子的周期只决定于振子的固有特性 ω_0 而与振子振幅无关的重要特性. 这样，在相对论条件下，分子振子的辐射不但与分子的结构有关，而且还与分子振动状态有关.

参 考 文 献

[1] Penfield R, Zatzkis H. One-dimensional relativistic vibrator. Jonr Franklin Inst, 1956, **262**(2): 121

[2] 周凌云. 一维相对论振子的奇异摄动解. 昆明理工大学学报, 1986, **24**(1): 104

[3] 周凌云. 关于一维相对论振子. 数学物理学报, 1987, **7**(3): 262

[4] 周凌云. 分子振动能级的相对论修正. 原子与分子物理学报, 1990, **7**(1): 1264－1265

[5] 周凌云. 非谐振子的相对论性能级及基态微扰级数发散详谬问题. 数学物理学报, 1993, **13**(2): 172－176

[6] 吕家鸿. 对牛顿万有引力定律的一种可能的修正. 中国科学技术大学学报, 1984, **14**(1): 39－47

[7] Byrd P F. Handbook of Ellptic Integrals for Engineers and Physicists. Berlin: Springer-Verlag, 1954. 113

Research of the Motion Law on One-Dimensional Relativistic Vibrator

Zhu Ping

(*Department of Adult Education*, *Simao Teacher's College*, *Yunnan* 665000)

Abstract: American R Penfield and Chinese Zhou Lingyun have discussed the approximate solutions to the motion law on one-dimensional relativistic vibrator. In this thesis, utilizing the elliptical integrals theory, the authors have obtained the analytic solutions and the vibration period on one-dimensional relativistic vibrator.

Key words: The relativistic vibrator; Elliptical integrals; Reserch of motions.

MR(2000) Subject Classification: 83C10