2009,**29A**(3):529–537

Acta Mathematica Scientia
数学物理学报

一类微分方程零解全局弱吸引和全局吸引的充要条件 *

赵丽琴
(北京师范大学数学科学学院，数学与复杂系统教育部重点实验室　北京 100875)

摘要：考虑二阶微分方程

$$\dot{x}=\varphi(y)-F(x),\quad \dot{y}=-g(x)q(y) \tag{E}$$

零解的全局弱吸引和全局吸引性，说明了 Filippov 条件 (A_2) 不能排除最大椭圆扇形 S^* 的存在性，也不能排除 ∂S^* 作为其外侧邻域轨线正向极限集的可能. 全面回答了文献 [8] 末提出的问题；得到了方程 (E) 满足或不满足 Filippov 条件时零解全局弱吸引和全局吸引的一系列充分必要条件，同时也得到了零解全局渐近稳定的一些新条件.

关键词：Filippov 条件；全局吸引；全局弱吸引；全局渐近稳定.

MR(2000) 主题分类：34D05; 34C05　**中图分类号**：O175.21　**文献标识码**：A

文章编号：1003-3998(2009)03-529-09

1 问题的提出

关于系统

$$\dot{x}=\varphi(y)-F(x),\quad \dot{y}=-g(x)q(y) \tag{E}$$

以及其特殊形式

$$\dot{x}=\varphi(y)-F(x),\quad \dot{y}=-g(x) \tag{1}$$

零解的全局渐近稳定性问题，已经取得很多很好的结果 [1−10]. 这些结论绝大多数是在 Filippov 条件下 (见 (A_2)) 结合其他条件来保证原点的稳定性和吸引性的. 如果把稳定性和吸引性分开， Filippov 条件能否保证 (1) 式的所有解都以原点为唯一的正向极限点呢？这就是文献 [8] 末提出的问题，简单叙述如下.

问题 1　假设 (1) 式满足 (A_0), (A_1), 具有性质 $(\mathcal{H}^+)$ 和 $(\mathcal{H}^-)$. 如果 (A_2) 成立，零解是否全局吸引？

(A_0)　$F(x), g(x)$ 连续，　$F(0)=0,\ xg(x)>0(x\neq 0)$.

(A_1)　$\varphi(y)$ 局部 Lipschitz 连续，严格递增，　$\varphi(0)=0,\ \varphi(\pm\infty)=\pm\infty$.

(A_2)　$F(G_0^{-1}(-z))\leq F(G_0^{-1}(z))(z\in(0,\min\{G_0(-\infty),G_0(+\infty)\}))$, 且 $F(G_0^{-1}(-z))\not\equiv F(G_0^{-1}(z))(0<z\ll 1)$, 其中 $G_0(x)=\int_0^x|g(s)|\mathrm{d}s$.

关于 (E), 文献 [11] 研究了解的有界性. 本文考虑系统 (E) 的全局弱吸引和全局吸引性，举例说明在问题 1 的条件下， (1) 式的零解不一定全局吸引. 进而将给出满足或不满足

收稿日期：2007-03-07; 修订日期：2008-10-11
E-mail: zhaoliqin@bnu.edu.cn
∗ 基金项目：国家自然科学基金 (10671020) 资助

Filippov 条件时零解全局吸引的一系列充分必要条件，同时也得到全局渐近稳定的一些新条件.

全文均设各函数连续，且使得系统 (E) 初值问题的解具有唯一性. 为方便，全文的记号整理如下

(i) $\mathcal{O}^+(P)$ ($\mathcal{O}^-(P)$) 分别表示从 P 出发的正 (负) 半轨.

(ii) 曲线 $\varphi(y)=F(x)$ 称为特征曲线， $\Gamma^+=\{(x,y):\varphi(y)=F(x)(x>0)\}$， $\Gamma^-=\{(x,y):\varphi(y)=F(x)(x<0)\}$.

(iii) $D_1=\{(x,y):\varphi(y)>F(x)(x\geq 0)\}$, $D_2=\{(x,y):\varphi(y)<F(x)(x\geq 0)\}$, $D_3=\{(x,y):\varphi(y)<F(x)(x\leq 0)\}$, $D_4=\{(x,y):\varphi(y)>F(x)(x\leq 0)\}$.

(iv) 称 $(\mathcal{H}^+)$ 成立，如果对 $P\in D_1$, $\mathcal{O}^+(P)$ 必与 Γ^+ 相交. 称 $(\mathcal{H}^-)$ 成立，如果对 $P\in D_3$, $\mathcal{O}^+(P)$ 必与 Γ^- 相交.

2 问题 1 的否定回答

定义 1[13] 零解称为全局吸引，若 $\forall\ P\in R^2$, 有 $\omega(P)=\{(0,0)\}$. 零解称为全局弱吸引，若 $\forall\ P\in R^2$, 有 $(0,0)\in\omega(P)$, 且存在 $P_0\in R^2$, 使得 $\omega(P_0)\neq\{(0,0)\}$. 系统 (E) 称为全局吸引 (或全局弱吸引), 如果其零解是全局吸引的 (或全局弱吸引的).

易证如下结论成立.

定理 1 假设 (E) 满足 (A_0), (A_1) 和 $q(y)>0(y\in R)$, 则

(i) (E) 全局吸引 (或全局弱吸引)$\Longrightarrow$ 所有解有界且不存在闭轨线.

(ii) 所有解正向有界 $\Longrightarrow$ $(\mathcal{H}^+)$, $(\mathcal{H}^-)$ 成立.

(iii) 若 (A_2) 成立，则所有解正向有界 $\Longleftrightarrow$$(\mathcal{H}^+)$, $(\mathcal{H}^-)$ 成立.

(iv) 若所有解正向有界，且不存在闭轨线，则 (E) 全局弱吸引当且仅当存在最大椭圆扇形 S^*, 使得从 S^* 任意外侧邻域 U 中出发的正半轨围绕 ∂S^* 无限盘旋.

(v) 若所有解正向有界，且不存在闭轨线，则 (E) 全局吸引当且仅当 (a) 或 (a′) 成立

(a) 不存在最大椭圆扇形.

(a′) 若存在最大椭圆扇形 S^*, 则存在 P, $\mathcal{O}^+(P)$ 不能围绕 ∂S^* 无限旋转.

定理 2 假设 $q(y)>0(y\in R)$, 且 (A_0)–(A_2), $(\mathcal{H}^+)$ 和 $(\mathcal{H}^-)$ 成立，则

(i) 零解全局弱吸引 $\Longleftrightarrow$ 原点的任意 δ 邻域由一个椭圆扇形和一个双曲扇形组成.

(ii) 零解全局吸引 $\Longleftrightarrow$ 不存在最大椭圆扇形或者原点的任意 δ 邻域内存在抛物椭圆扇形.

证 在定理的条件下， (E) 不存在闭轨线且所有解正向有界. 由 Poincaré-Bendixson 定理知 $\forall\ P\in R^2$, $\omega(P)$ 或者是原点，或者是奇异闭轨.

(i) 由假设存在最大椭圆扇形 S^*, 且 S^* 外的所有轨线围绕 S^* 的边界无限地盘旋，由定理 1(iv) 得零解全局弱吸引. 必要性显然.

(ii) 充分性. 若存在最大椭圆扇形 S^*, 则 S^* 有界, 且位于 x - 轴的上方或下方. $\forall\ \delta>0$, 原点的 δ 邻域内存在抛物椭圆扇形，因此存在 S^* 外的 P, 使得 $\mathcal{O}^+(P)$ 在 D_2 或 D_4 中趋于原点. 由解的唯一性，从 S^* 的任意外侧邻域 U 内出发的轨线不能围绕 S^* 无限地盘旋. 由定理 1(v) 知零解全局吸引.

必要性. 假设 (E) 全局吸引，且存在最大椭圆扇形 S^*. 不妨设其位于 x - 轴上方. 我们断言存在 S^* 外部的 $P_0(0,y_0)$ $(y_0>0)$, 使得 $\mathcal{O}^+(P_0)$ 在 D_2 中趋于零解. 事实上，若 $\forall\ P(0,y)$ $(y>0)$, $\mathcal{O}^+(P)$ 不在 D_2 趋于零解，则其必与负半 y - 轴相交，并接着再与正半 y -

轴相交于点 $P_1(0,y_1)$. 由 (A_2) 得 $y_1<y$. 从而 $\mathcal{O}^+(P)$ 围绕 ∂S^* 无限盘旋，即 ∂S^* 是 $\mathcal{O}^+(P)$ 的正向极限集. 这与 (E) 全局吸引矛盾. ▌

附注 1 (i) 定理 2 说明了在问题 1 的条件下，(E) 的零解可能全局吸引，也可能全局弱吸引，同时也说明了 Filippov 条件 (A_2) 不能排除最大椭圆扇形的存在性，也不能排除 ∂S^* 作为其外侧轨线正向极限集的可能. 因此仅仅就问题 1 的条件不能保证 (E) 的零解全局吸引.

(ii) 下面是满足问题 1 条件，但原点全局弱吸引的例子.

$$\dot{x}=y-F_\delta(x),\quad \dot{y}=-x^3, \tag{2}$$

其中

$$F_\delta(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{3}{2}x^2, & x\ge 0,\\[2mm] -\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{3}{2}x^2+\dfrac{2}{3}\delta x^3, & x<0.\end{cases}$$

由文献 [13] 得 $\exists\delta_0\in(0,1)$, 使得系统 (2) 有最大椭圆扇形 S^*, 且从 S^* 外部出发的所有正半轨围绕其无限盘旋. 因此零解全局弱吸引. 易证 $\forall\ \delta\in(0,1)$, (2) 式满足问题 1 的所有条件. 事实上， $z=G_0(x)=\int_0^x s^3\mathrm{d}s=\frac{1}{4}x^4$, $F(G_0^{-1}(z))=\frac{1}{3}(4z)^{\frac{3}{4}}-\frac{3}{2}(4z)^{\frac{1}{2}}$, $F(G_0^{-1}(-z))=-\frac{2}{3}\delta(4z)^{\frac{3}{4}}+F(G_0^{-1}(z))$, $F(G_0^{-1}(-z))-F(G_0^{-1}(z))=-\frac{2}{3}\delta(4z)^{\frac{3}{4}}<0$, 对 $\delta\in(0,1)$, 即 (A_2) 成立. 易证其余条件成立，从略.

3 解的有界性和零解的全局渐近稳定性

关于解的有界性，有如下结论.

定理 3 假设下列条件成立

(i) $\liminf\limits_{x\to+\infty}F(x)>-\infty$, $\limsup\limits_{x\to-\infty}F(x)<+\infty$, $\inf\limits_{x\in R}G(x)>-\infty$;

(ii) 对 $x\in R$, 有 $g(x)F(x)\ge 0$;

(iii) $q(y)\neq 0$; $\exists\tilde{q}\ge 0$, 使得 $\forall\ y\in R$, 有 $Q(y)+\tilde{q}\ge 0$, 且 $\limsup\limits_{|y|\to+\infty}Q(y)=\pm\infty$;

(iv) $\varphi(\pm\infty)=\pm\infty$,

其中 $Q(y)=\int_0^y\frac{\varphi(s)}{q(s)}\mathrm{d}s, G(x)=\int_0^x g(s)\mathrm{d}s$. 则 (E) 的所有解正向有界当且仅当

$$\lim_{|x|\to+\infty}\Big(\sup(\mathrm{sgn}xF(x)+\int_0^x g(s)\mathrm{d}s)+\mathrm{sgn}x\int_0^x g(s)F(s)\mathrm{d}s\Big)=+\infty. \tag{3}$$

定理 3 的证明将由两个引理来完成.

引理 2 假设定理 3 的 (i)–(iii) 和条件 (3) 成立，则 $\forall\ P_0(x_0,y_0)\in R^2$, 存在 $M(P_0)>0$, 使得 $x^2(t)+y^2(t)\le M\ (t\ge 0)$, 其中 $(x(t),y(t))$ 表示 (E) 从 $(0,x_0,y_0)$ 出发的解.

证 由 (i), 存在 $\tilde{g}\ge 0$, 使得 $G(x)+\tilde{g}\ge 0\ (x\in R)$. 令

$$V(x,y)=G(x)+Q(y)+\tilde{g}+\tilde{q},\quad (x,y)\in R^2. \tag{4}$$

则 $0\le V(x,y)$, 且 $\forall\ (x,y)\in R^2$, 有

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\Big|_{(\mathrm{E})}=(\varphi(y)-F(x))g(x)-\frac{\varphi(y)}{q(y)}g(x)q(y)=-g(x)F(x)\le 0. \tag{5}$$

因此

$$0 \le V(x(t),y(t)) \le V(x(0),y(0)) = V_0. \tag{6}$$

首先证明 $y(t)$ 有上界. 用反证法. 假设结论不成立. 若 $\limsup\limits_{t\to+\infty} y(t,0,x_0,y_0) = +\infty$, 则存在 $\{t_n\} \to +\infty$ $(n \to +\infty)$, 使得 $\lim\limits_{n\to+\infty} y(t_n,0,x_0,y_0) = +\infty$. 由于 $\limsup\limits_{y\to+\infty} Q(y) = +\infty$, 存在 $y_1 > y_0$, 使得 $Q(y_1) > V_0$. 故 $\exists\ t_N$, 使得 $y(t_N,0,x_0,y_0) > y_1 > y_0$. 于是存在 $t^* > 0$, 使得 $y(t^*,0,x_0,y_0) = y_1$. 由 (6) 式得

$$V_0 < Q(y(t^*,0,x_0,y_0)) \le V(x_0,y_0) = V_0.$$

这是矛盾. 同理可证 $y(t)$ 有下界. 总之, 存在 $Y_0 > 0$, 使得 $|y(t)| < Y_0$ $(t \ge 0)$. 往证: 若 $\lim\limits_{x\to+\infty} \big(\sup(\mathrm{sgn}xF(x) + G(x)) + \mathrm{sgn}x \int_0^x g(s)F(s)\mathrm{d}s\big) = +\infty$, 则 $x(t)$ 有上界.

i) $\limsup\limits_{x\to+\infty} G(x) = +\infty$.

于是存在 $x_1 > x_0$, 使得 $G(x_1) + \tilde{g} > V_0$. 若 $\limsup\limits_{t\to+\infty} x(t) = +\infty$, 则存在 $t_N > 0$, 使得 $x(t_N) > x_1 > x_0$. 由介值定理, 存在 $t^* > 0$, 使得 $x(t^*) = x_1$, 且 $G(x(t^*)) + \tilde{g} = G(x_1) + \tilde{g} > V_0$. 这与 (6) 式矛盾.

(ii) $\limsup\limits_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$.

于是存在 $B > x_0$, 使得 $F(B) > \varphi_0$, 其中 $\varphi_0 = \max\limits_{|y|\le Y_0} |\varphi(y)|$. 我们断言 $x(t) < B(t \ge 0)$. 否则, 存在 $\tilde{t} > 0$, 使得 $x(\tilde{t}) = B$, 且 $x(t) < B(0 \le t < \tilde{t})$. 从而

$$0 \le \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(\tilde{t}) = \varphi(y(\tilde{t})) - F(x(\tilde{t})) < 0.$$

这是矛盾.

(iii) $\limsup\limits_{x\to+\infty}(G(x) + F(x)) < +\infty$, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_0^x g(s)F(s)\mathrm{d}s = +\infty$.

由 (i), 存在 F_0, 使得 $|F(x)| < F_0$ $(x \in R)$. 于是 $\forall\ x \ge 0$, 有

$$\Big|\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\Big| \le |\varphi(y(t))| + |F(x(t))| \le \varphi_0 + F_0. \tag{7}$$

由于 $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_0^x g(s)F(s)\mathrm{d}s = +\infty$, 存在 $B > \max\{x_0, 0\}$, 使得

$$\int_0^B g(u)F(u)\mathrm{d}u > \int_0^{x_0} g(u)F(u)\mathrm{d}u + (\varphi_0 + F_0)V_0. \tag{8}$$

我们断言 $x(t) < B$ $(t \ge 0)$. 否则, 存在 $\tilde{t} > 0$, 使得 $x(\tilde{t}) = B$. 从而存在 $t^* \in [0,\tilde{t})$, 使得 $x(t^*) = x_0$, $x'(t^*+0) > 0$, 且 $x_0 < x(t) < B$ $(t \in (t^*,\tilde{t}))$. 从 t^* 到 $\tilde{t}$ 积分 (5) 式得

$$\begin{aligned} V(x(\tilde{t}),y(\tilde{t})) - V(x(t^*),y(t^*)) &= -\int_{t^*}^{\tilde{t}} g(x(t))F(x(t))\mathrm{d}t \\ &\le -\frac{1}{\varphi_0 + F_0}\int_{t^*}^{\tilde{t}} g(x(t))F(x(t))\Big|\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\Big|\mathrm{d}t \\ &\le -\frac{1}{\varphi_0 + F_0}\Big|\int_{t^*}^{\tilde{t}} g(x(t))F(x(t))\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t\Big| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= -\frac{1}{\varphi_0+F_0}\int_{x_0}^{B} g(u)F(u)\mathrm{d}u\\ &= -\frac{1}{\varphi_0+F_0}\Big(\int_{x_0}^{0}+\int_0^B g(u)F(u)\mathrm{d}u\Big) < -V_0,\end{aligned}$$

因而 $V(x(\tilde{t}),y(\tilde{t})) < V(x(t^*),y(t^*)) - V_0 \le 0$. 这与 (6) 式矛盾.

总之 $x(t)$ 有上界．类似可证有下界. ▍

引理 3 在定理 3 的条件下，若所有解正向有界，则 (3) 式成立.

证 先证若 $\lim\limits_{x\to+\infty}\big(\sup(\mathrm{sgn}xF(x)+G(x))+\int_0^x g(s)F(s)\mathrm{d}s\big)<+\infty$, 则存在一无界解．事实上, 由 (i), 存在 $N>0$, 使得 $|F(x)|<N$, $|G(x)|<N$ $(x\in R^+)$ 且 $0\le\int_0^x g(s)F(s)\mathrm{d}s<+\infty$. 由 (iv), 存在 $M>0$, 使得 $\varphi(y)>1+N$ $(y\ge M)$. 由于 $\limsup\limits_{y\to+\infty}Q(y)=+\infty$, 存在 $y_0>M$, 有

$$Q(y_0) > Q(M)+N+\int_0^{+\infty} g(s)F(s)\mathrm{d}s. \tag{9}$$

我们断言从 $(0,y_0)$ 出发的解永远位于 $y=M$ 的上方. 若不然, 则存在 $t_1>0$, 使得 $y(t_1)=M$ 且 $y(t)>M$ $(t\in(0,t_1))$. 因而 $\forall\, t\in(0,t_1)$, 有 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\varphi(y)-F(x)>1$, 且 $x(t)$ 在 $(0,t_1)$ 内严格单调递增．从 0 到 t_1 积分 (5) 式得

$$\begin{aligned}V(x(t_1),y(t_1))-V(0,y_0) &= -\int_0^{t_1} g(x(s))F(x(s))\mathrm{d}s\\ &\ge -\int_0^{x(t_1)} g(x)F(x)\mathrm{d}x \ge -\int_0^{+\infty} g(x)F(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

另一方面，有

$$V(x(t_1),y(t_1)) = Q(y(t_1))+G(x(t_1))+\tilde{g}+\tilde{q} \le Q(M)+N+\tilde{g}+\tilde{q},$$

$$Q(y_0) \le Q(M)+N+\int_0^{+\infty} g(s)F(s)\mathrm{d}s.$$

这与 Y_0 的选取矛盾．故 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\varphi(y)-F(x)>1(t\ge0)$ 且 $\lim\limits_{t\to+\infty}x(t)=+\infty$. ▍

定理 4 在下列条件下

(i) $xg(x)>0(x\neq0)$, $xF(x)\ge0$ 且在原点的任何区间上不恒为零.

(ii) $q(y)\neq0$, $y\varphi(y)q(y)>0$, $Q(\pm\infty)=+\infty$, $\varphi(\pm\infty)=\pm\infty$.

则 (E) 全局渐近稳定当且仅当

$$\lim_{|x|\to+\infty}(\sup|F(x)|+G(x))=+\infty. \tag{10}$$

证 充分性．由定理 3 知所有解正向有界．令 $V(x,y)=G(x)+Q(y)$ $((x,y)\in R^2)$, 则 $V(x,y)>0$. 由于 $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\big|_{(\mathrm{E})}=-g(x)F(x)\le0$, 且 $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\big|_{(\mathrm{E})}=0$ 不含有 (E) 的整条轨线，由 Barbaskin-Krasovskii 定理得 (E) 全局渐近稳定．在定理 4 的条件下 (3) 与 (10) 式等价，类似引理 3 可证必要性成立. ▍

附注 2 文献 [11] 定理 3.1, 3.2 得到了 (E) 所有解有界的充要条件．本文的定理 3 与文献 [11] 中的不同之处在于假设不同，即本文的 "$g(x)F(x)\ge0(x\in R)$" 和文献 [11] 的 (H_3): 存在 $a>0$, 使得 $G(a)=G(-a)$, $g(x)=-g(-x)\ge0$, $F(x)\ge F(-x)(x\ge a)$, $g(x)F(x)\ge0(\not\equiv0)$ $(x\in(-a,a))$. 因此，本文的定理 3 与文献 [11] 的定理互不包含.

4 全局吸引的进一步讨论

显然若系统 (E) 全局渐近稳定，则全局吸引. 因此全局渐近稳定的判据都可用来判别全局吸引. 然而，全局吸引不能推知全局渐近稳定. 由以上分析知本质因素在于最大椭圆扇形外的轨线能否围绕其无限盘旋. 基于这种思想，结合定性理论可得下述结论.

引理 4 假设 (A_0), (A_1) 成立，且 $q(y)>0(y\in R)$. 若存在 $P_0(x_0,y_0)$, 使得 $\mathcal{O}^-(P_0)$ 单调趋于无穷，且 $\mathcal{O}^+(P_0)$ 趋于原点，则系统 (E) 全局吸引当且仅当 $(\mathcal{H}^+)$, $(\mathcal{H}^-)$ 成立. 进一步若零解稳定，则 (E) 全局渐近稳定.

定理 5 设 (A_0), (A_1), (i), (ii) 或 (i), (ii)$'$ 成立，且 $q(y)>0$ $(y\in R)$,

(i) 存在 $a\geq 0$, $b\in R$ 及 $r(x)\in C((-\infty,-a])$, 使得 $\forall\ x<-a$, 有

$$r(x)>F(x),\quad \frac{\varphi^{-1}\big(r(x)\big)}{q(b)}+\int_{-a}^{x}\frac{g(s)}{r(s)-F(s)}\mathrm{d}s<\frac{b}{q(b)}. \tag{11}$$

(ii) 若 $a^2+b^2\neq 0$, 则存在 $a_-<0<a_+$, 使得 $G(a_\pm)\geq G(-a)+Q(b)$, 且 $xF(x)\geq 0$ $(x\in(a_-,0)\cup(0,a_+))$, 其中 $Q(y)=\int_0^y\frac{\varphi(s)}{q(s)}\mathrm{d}s$, $G(x)=\int_0^x g(s)\mathrm{d}s$.

(ii)$'$ 若 $a^2+b^2=0$, 则 $r(x)$ 满足 $r(0)=0$ 且

$$r(x)>F(x),\quad \frac{\varphi^{-1}\big(r(x)\big)}{q(0)}+\int_{0}^{x}\frac{g(s)}{r(s)-F(s)}\mathrm{d}s\leq 0. \tag{12}$$

则 (E) 全局吸引 $\Longleftrightarrow(\mathcal{H}^+),(\mathcal{H}^-)$ 成立.

证 仅证充分性. 假设 $a^2+b^2\neq 0$. 我们断言 $\mathcal{O}^-(P_0)$ 永远位于曲线 $y=\varphi^{-1}(r(x))$ 的上方，其中 $P_0=(-a,b)$. 事实上，由 (i), P_0 在 $y=\varphi^{-1}(r(x))$ 的上方. 若 $\mathcal{O}^-(P_0)$ 与 $y=\varphi^{-1}(r(x))$ 首次相交于 $(x_1,\varphi^{-1}(r(x_1)))$, 则 $x_1<-a$ 且 $y(x)>\varphi^{-1}(r(x))$ $(x\in(x_1,-a))$, 其中 $y(x)$ 表示从 P_0 出发的轨线. 由于对 $x\in(x_1,-a)$, 有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{-g(x)q(y)}{\varphi(y)-F(x)}. \tag{13}$$

沿着轨线可得 $\frac{-g(x)q(y)}{\varphi(y)-F(x)}<\frac{-g(x)q(b)}{r(x)-F(x)}$. 从 x_1 到 $-a$ 积分 (13) 式可得

$$y(-a)-y(x_1)=\int_{x_1}^{-a}\frac{-g(x)q(y(x))}{\varphi(y(x))-F(x)}\mathrm{d}x\leq\int_{x_1}^{-a}\frac{-g(x)q(b)}{r(x)-F(x)}\mathrm{d}x.$$

故

$$y(-a)\leq y(x_1)+\int_{x_1}^{-a}\frac{-g(x)q(b)}{r(x)-F(x)}\mathrm{d}x<b. \tag{14}$$

这与 P_0 的选取矛盾. 因此 $\mathcal{O}^-(P_0)$ 永远位于 $y=\varphi^{-1}(F(x))$ 的上方，进而单调趋于无穷. 令

$$\gamma: V(x,y)=G(x)+Q(y)=v,\quad 0<v\leq G(-a)+Q(b).$$

由 (ii), $\forall\ (x,y)\in\gamma$, 有 $x\in(a_-,a_+)$. 注意到 $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\Big|_{(\mathrm{E})}=-g(x)F(x)\leq 0$ $(x\in(a_-,a_+)/\{(0,0)\})$, 故 $\mathcal{O}^+(P_0)$ 趋于原点.

假设 $a^2+b^2=0$. 我们断言下列结论成立

(a) $\forall\ \epsilon>0$, $\mathcal{O}^-(P_\epsilon)$ 不与 $y=\varphi^{-1}(F(x))$ 相交，其中 $P_\epsilon=(0,\epsilon)$.

(b) $F(x)<r(x)\leq 0(x<0)$, 且 $\forall\ P\in\Gamma^-$, $\mathcal{O}^+(P)$ 趋于原点.

事实上，$\forall\ \epsilon>0$, 若 $\mathcal{O}^-(P_\epsilon)$ 首次与 $y=\varphi^{-1}(r(x))$ 相交于 $(x_1,\varphi^{-1}(r(x_1)))$, 则 $x_1<0$ 且 $y(x)>\varphi^{-1}(r(x))(x\in(x_1,0))$. 类似可证 $y(0)\le y(x_1)+\int_{x_1}^0\frac{-g(x)q(0)}{r(x)-F(x)}\mathrm{d}x\le y(x_1)-\varphi^{-1}(r(x_1))=0$, 即 $y(0)\le 0$. 这是矛盾. 因此 $\forall\ \epsilon>0$ 和 $x<0$, 有

$$\varphi^{-1}(r(x))<y(x,0,\epsilon)<\epsilon,$$

故 $\varphi^{-1}(r(x))\le 0$ $(r(x)\le 0)$. 由解的唯一性 (b) 成立. ∎

定理 6 假设 $q(y)>0(y\in R)$, (A_0), (A_1) 以及下列条件成立

(i) $y>0$ 时 $\varphi(y)$ 下凸;

(ii) 存在 $0<a\le+\infty$, 使得 $\forall\ x\in(0,a)$, 有

$$F(x)>0\quad 且\quad \frac{q(\varphi^{-1}(F(x)))}{\varphi^{-1}(F(x))}\int_{0+}^{x}\frac{g(u)}{F(u)}\mathrm{d}u\le\frac{1}{4}. \tag{15}$$

若 $a<+\infty$, 则 (A_2) 成立，且存在 $x_n<0$, 使得 $x_n\to 0$ $(n\to+\infty), F(x_n)\le 0$. 则零解全局吸引 $\Longleftrightarrow$ $(\mathcal{H}^+)$, $(\mathcal{H}^-)$ 成立.

证 假设 $a=+\infty$. 首先证明 $\forall\ 0<x_0<+\infty$, $\mathcal{O}^+(P_0)$ 在 D_2 中趋于原点，其中 $P_0=(x_0,\varphi^{-1}(F(x_0)))$. 用反证法. 若不然，则 $\mathcal{O}^+(P_0)$ 必然交负半 y - 轴于点 $B(0,y_B)$ $(y_B<0)$. 记与正半 x - 轴相交于 $(0,x_1)$, 则 $0<x_1<x_0$. 令

$$W(x)=\frac{\varphi^{-1}(F(x))-y(x)}{\varphi^{-1}(F(x))},\ x\in(0,x_0). \tag{16}$$

由于 $W(x_0)=0$, $W(x_1)=1$ 且 $W(x)>1$ $(x\in(0,x_1))$, 存在 $x_2\in(x_1,x_0)$, 使得 $W(x_2)=\frac{1}{2}$ 且 $W(x)>\frac{1}{2}$ $(x\in(0,x_1))$, 即

$$y(x_2)=\frac{1}{2}\varphi^{-1}(F(x_2)),\quad y(x)<\frac{1}{2}\varphi^{-1}(F(x))(x\in(0,x_2)). \tag{17}$$

由 (i), $y>0$ 时 $\varphi^{-1}(y)$ 下凸. 从而对 $x\in(0,x_2)$, 有

$$y(x)<\frac{1}{2}\varphi^{-1}(F(x))=\frac{\varphi^{-1}(F(x))+\varphi^{-1}(F(0))}{2}\le\varphi^{-1}(\frac{1}{2}F(x)). \tag{18}$$

故 $\forall\ 0<\epsilon\ll 1$, 有

$$y(x_2)-y(\epsilon)=\int_\epsilon^{x_2}\frac{g(x)q(y(x))}{F(x)-\varphi(y(x))}\mathrm{d}x\le q(\varphi^{-1}(F(x_2)))\int_\epsilon^{x_2}\frac{2g(x)}{F(x)}\mathrm{d}x;$$

且

$$\lim_{\epsilon\to 0+}(y(x_2)-y(\epsilon))\le q(\varphi^{-1}(F(x_2)))\int_{0+}^{x_2}\frac{2g(x)}{F(x)}\mathrm{d}x,$$

$$y(x_2)-y(0)\le q(\varphi^{-1}(F(x_2)))\int_{0+}^{x_2}\frac{2g(x)}{F(x)}\mathrm{d}x\le\frac{1}{2}\varphi^{-1}(F(x_2)).$$

于是 $y_B\ge 0$. 这是矛盾. 由解的唯一性得从负半 y - 轴出发的负半轨趋于无穷. 由引理 4 结论成立.

假设 $a<+\infty$. 类似可证对于 $P=(\frac{1}{2}a,\varphi^{-1}(F(\frac{1}{2}a)))$, 有 $\mathcal{O}^+(P)$ 趋于原点. 由 (ii), 存在 $\delta>0$, 使得对 $x\in[-\delta,0)$, 从 $(x,\varphi^{-1}(F(x)))$ 出发的负半轨必与负半 y - 轴相交，从而不存在同宿轨. 由定理 2 结论成立. ∎

例题 考虑系统

$$\dot{x} = y - F(x),\ \ \dot{y} = -x, \tag{19}$$

$$F(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2}x^2, & x \le 0, \\ 2x^2 \sin x, & x > 0. \end{cases}$$

可证系统 (19) 全局渐近稳定，且 $\forall\, z_0 > 0$, 存在 $(z_0 <)l < L$, 使得

$$F(G_0^{-1}(-z)) > F(G_0^{-1}(z)) \ \ (z \in (l, L)).$$

证 (i) 由于 $\limsup\limits_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$, $\limsup\limits_{x\to-\infty} F(x) = -\infty$, 系统 (19) 具有性质 $(\mathcal{H}^+)$ 和 $(\mathcal{H}^-)$. 取 $a = 0$, $b = 1$, 及 $r(x) = F(x) + 1$. 则 $\forall\, x \le 0$, 有

$$\varphi^{-1}\big(r(x)\big) + \int_0^x \frac{g(s)}{r(s) - F(s)} \mathrm{d}s = F(x) + 1 + \int_0^x s\mathrm{d}s = (F(x) + \frac{1}{2}x^2) + 1 = 1.$$

令 $a_\pm = \pm\frac{\pi}{2}$, 则

$$G_0(\pm\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi^2}{8} > \frac{1}{2} = G_0(-a) + Q(b),$$

$$xF(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2}x^3 > 0, & -\dfrac{\pi}{2} \le x < 0, \\ 2x^3 \sin x > 0, & 0 < x \le \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

从而系统 (19) 满足定理 5 的所有条件，故全局渐近稳定.

(ii) 由于 $z = \frac{1}{2}x^2$, 故 $F(G_0^{-1}(z)) = 4z\sin(\sqrt{2z}), F(G_0^{-1}(-z)) = -z, z \in (0, +\infty)$. 令 $z_n = \frac{(\frac{3\pi}{2} + 2n\pi)^2}{2}, n \in N$, 则 $F(G_0^{-1}(z_n)) = -4z_n, F(G_0^{-1}(-z_n)) = -z_n$, 即 $F(G_0^{-1}(z_n)) < F(G_0^{-1}(-z_n))$. 注意到 $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = +\infty$ 及 $F(G_0^{-1}(z)), F(G_0^{-1}(-z))$ 连续，可得 $\forall\, z_0 > 0$, 存在 $(z_0 <)\ l < L$, 使得 $F(G_0^{-1}(-z)) > F(G_0^{-1}(z))\ (z \in (l, L))$. ▮

附注 3 (i) 例题虽然在趋于无穷的无穷多个区间上不满足 "$F(G_0^{-1}(z)) \ge F(G_0^{-1}(-z))$", 但零解全局吸引. 因此 Filippov 条件 (A_2) 不是全局吸引的必要条件.

(ii) 在定理 5 中若 (i), (ii) 成立或定理 6 中 $a < +\infty$, 则系统 (E) 全局渐近稳定. 若定理 5 的 (i), (ii)$'$ 成立或定理 6 中 $a = +\infty$, 则零解可能不稳定，但全局吸引.

参 考 文 献

[1] Lassalle J P, Lefschetz S. Stability by Liapunov's Direct Method. New York: Academic Press, 1961

[2] Graef J.R. On the generalized Liénard equation with negative damping. Journal of Differential Equations, 1972, **12**: 34–62

[3] Li Huiqin. The necessary and sufficient conditions for the global asymptotic stability of Liénard equation. Acta Math. Sinica, 1988, **31**(2): 207–214 (in Chinese)

[4] Wang Ke. Asymptotic stability in the large of the zero solution for Liénard equation. Ke Xue Tong Bao, 1993, **38**(7): 584–586 (in Chinese)

[5] Chuanxi Qian. On global asymptotic stability of second order nonlinear differential systems. Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications, 1994, **22**: 823–833

[6] Liu Zhengrong. The conditions for the global stability of the Liénard equation. Acta Math Sinica, 1995, **38**(5): 614–620 (in Chinese)

[7] Gao Suzhi, Zhao Liqin. Global asymptotic stability of generalized Liénard equation. Chinese Science Bulletin, 1995, **40**: 105–109

[8] Jiang Jifa. The global stability of a class of second order differential equations. Nonlinear Analysis, 1997, **28**(5): 855–870

[9] Sujie J, Chen Da-Li, Mastsunaga H. On global asymptotic stability of system of Liénard type. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1998, **219**: 140–164

[10] Yang Qigui. Sufficient and necessary conditions for global stability of system of Liénard type. Acta Math Sinica, 2000, **43**(4): 719–726(in Chinese)

[11] Huang L H. Boundedness of solutions for some nonlinear differential systems. Nonlinear Analysis, 1997, **29**(7): 839–848

[12] Yang Qigui, Zhu Siming. Positive global attractor for a class of Liénard system. Sys Sci and Math Sci, 2002, **22**(1): 29–35 (in Chinese)

[13] Ding Changming. The homoclinic orbits in the Liénard plane. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1995, **191**(1): 26–39

[14] Sujie J, Hara T. Non-existence of periodic solutions of the Liénard system. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1991, **159**: 224–236

[15] Hara T. On the Vinograd type theorems for Liénard system. Nonlinear Analysis, 1993, **20**(6): 647–658

[16] Zhou Yurong, Wang Xiangrong. The family of homoclinic and closed orbits of the Liénard's systems. J Sys Sci and Math Sci, 1996, **16**(3): 281–288 (in Chinese)

[17] Liu Bing, Feng Binlu, Yu Yuanhong. Nonexistence of periodic solutions of generalized Liénard systems. Acta Math applicata Sinica, 1998, **21**(2): 233–239 (in Chinese)

[18] Zhou jin. Boundedness and convergence of solutions of a second-order nonlinear differential system. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2001, **256**: 360–374

Necessary and Sufficient Conditions for the Global Weak Attractivity and Global Attractivity of a Class of Nonlinear Differential Equations

Zhao Liqin

(*School of Mathematical Sciences, Laboratory of Mathematics and Complex Systems, Beijing Normal University, Beijing 100875*)

Abstract: This paper deals with the global weak attractivity and global attractivity for the nonlinear differential equations

$$\dot{x} = \varphi(y) - F(x), \quad \dot{y} = -g(x)q(y). \tag{E}$$

It is shown that Filippov condition (A_2) cannot exclude the existence of the maximum elliptic sector S^* and it cannot exclude the possibility of ∂S^* as the ω-limit set of the orbits departing from the exterior of S^*. The problem proposed by Jiang Jifa in Nonlinear Analysis, **28**(5), 855–870(1997) is answered by a negative answer. A series of necessary and sufficient conditions for the global weak attractivity and global attractivity are established for both the cases that Filippov condition holds and Filippov condition fails. Some new conditions for the global asymptotic stability are also obtained.

Key words: Filippov condition; Global attractivity; Global weak attractivity; Global asymptotic stability.

MR(2000) Subject Classification: 34D05; 34C05