2005,**25A**(7):981–989

Acta Mathematica Scientia 数学物理学报

一类具有功能性反应的中立型捕食者 - 食饵系统全局正周期解的存在性 *

陈凤德　陈晓星　林发兴　黄春潮

(福州大学数学与计算机科学学院　福建 350002)

摘要：首次研究一类具有 HollingII 型功能性反应中立型捕食者 - 食饵系统 (即 Rosenzweig-MacArthur 模型), 通过发展一些分析技巧，利用重合度理论中的延拓定理讨论了其全局正周期解的存在性，得到了保证周期解存在的充分条件．最后举例说明该文定理条件是可行的．

关键词：捕食者 - 食饵系统；　Holling II 类功能性反应；中立型；重合度；周期解．

MR(2000) 主题分类：34K20; 34C25; 92D25　**中图分类号**：O175.14　**文献标识码**：A

文章编号：1003-3998(2005)07-981-09

1　引言

Rosenzweig 和 MacArthur[1],Rosenzweig[2−3] 以及 Maynard Smith[4] 分析了捕食者 - 食饵的相互作用，提出了一类比 Volterra 模型和 Leslie 模型更为真实的模型，即 Rosenzweig-MacArthur 模型

$$\dot{x}=ax-bx^2-y\frac{ax}{1+bx},\ \ \dot{y}=-ey+ky\frac{ax}{1+bx}.$$

其中 a,b,e,k 均为正常数． 1965 年， Holling[5] 在实验的基础上，对不同类型的物种，提出了三种不同的功能性反应函数．“ R-M 模型” 在文献中通常被称为具有 Holling II 类功能性反应的捕食者 - 食饵系统．对于 “ R-M 模型”，许多学者进行了深入的研究 [1−4,6−7,10−11]: Rosenzweig 和 MacArthur[1] 用图表法结合数值法研究了 “ R-M 模型” 的稳定性；陈兰荪和井竹君 [6] 用微分方程定性分析的方法对 “ R-M 模型” 作了详细完整的分析，讨论了极限环的存在性和唯一性； Hsu 和 Huang[7] 研究了 “ R-M 模型” 的全局稳定性．最近，这一模型的非自治情形受到学者的重视．贾建文，胡宝安 [10] 考虑非自治系统的周期解存在性与全局吸引性问题．随后，范猛，王克 [11] 考虑了含时滞的系统，利用重合度理论得到保证系统存在正周期解的充分性条件．然而，据笔者所知，至今尚未有学者研究中立型 Holling II 型功能性反应的捕食模型周期正解的存在性，本文的目的旨在建立相关的生物数学模型，并用重合度理论得到其全局周期正解存在性的充分性条件．

收稿日期：2003-05-07; 修订日期：2003-11-24

E-mail: fdchen@fzu.edu.cn; fdchen@263.net

* 基金项目：国家自然科学基金 (天元基金)(10426010) 、福建省青年科技人才创新基金 (2004J0002) 、福建省教育厅基金 (JA04156) 和福州大学校科技发展基金 (2003-QX-21) 资助

我们考虑系统

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}N_1(t)}{\mathrm{d}t} = N_1(t)\Big[b_1(t) - \beta(t)N_1(t) - a_1(t)N_1(t-\tau_1(t)) \\ \qquad\qquad -c_1(t)N_1'(t-\tau_1(t))\Big] - \dfrac{\alpha(t)N_1(t)}{1+mN_1(t)}N_2(t-\sigma(t)), \\ \dfrac{\mathrm{d}N_2(t)}{\mathrm{d}t} = -b_2(t)N_2(t) + \dfrac{a_2(t)N_1(t-\tau_2(t))}{1+mN_1(t-\tau_2(t))}N_2(t). \end{cases} \tag{1}$$

其中 $N_1(t), N_2(t)$ 分别是食饵种群和捕食者种群在 t 时刻的密度； $b_i: R \to R, a_i, \tau_i, \sigma, \alpha: R \to (0,\infty)$ 是连续的 ω 周期函数且 $\int_0^\omega b_i(t)\mathrm{d}t > 0, \tau_i' < 1, \sigma' < 1$. 当 $m = 0, c_1(t) = 0$ 时系统 (1) 就是经典的 Lotka-Volterra 捕食者 - 食饵系统 [4,8,9]. 当 $\beta(t) = 0, c_1(t) = 0$ 时，上述系统已经由文 [11] 所研究，而当上述系统没有捕食者时，食饵种群就满足经典的中立型 Logistic 增长模型 (见文 [13, 公开问题 9.2]). 关于系统 (1) 的生态学意义参看文献 [1,4-6,8-13]. 在文献中虽然有部分文献研究系统 (1) 的各种特殊情形，然而就系统 (1) 而言，尚未见到有文章发表. 本文研究系统 (1) 的全局周期解的存在性. 有趣的是，由于中立型微分方程在应用重合度理论时定义的算子空间与文 [9,11] 的不一样，从而文献 [9,11] 所提供的验证解的先验估计的方法不能直接用于上述方程，我们发展文 [13] 的分析技巧，克服了由中立型时滞带来的分析上的困难，从而得到上述系统存在正周期解的充分性条件. 本文的方法可以应用于一些别的生物数学模型上.

2 主要结果

为了证明周期解的存在性，我们引入重合度理论中的延拓定理 [14,P40].

设 X, Z 是赋范向量空间，$L: \mathrm{Dom}L \subset X \to Z$ 为线性映射，$N: X \to Z$ 为连续映射，如果 $\dim\mathrm{Ker}L = \mathrm{Codim\ Im}L < +\infty$ 且 $\mathrm{Im}L$ 是 Z 中闭子集，则称映射 L 为指标为零的 Fredholm 映射. 如果 L 是指标为零的 Fredholm 映射且存在连续投影 $P: X \to X$ 以及 $Q: Z \to Z$ 使得 $\mathrm{Im}P = \mathrm{Ker}L, \mathrm{Im}L = \mathrm{Ker}Q = \mathrm{Im}(I-Q)$, 则 $L|\mathrm{Dom}L \cap \mathrm{Ker}P: (I-P)X \to \mathrm{Im}L$ 可逆，设其逆映射为 K_P, 设 Ω 为 X 中的有界开集，如果 $QN(\bar\Omega)$ 有界且 $K_P(I-Q)N: \bar\Omega \to X$ 是紧的，则称 N 在 $\bar\Omega$ 上是 L - 紧的. 由于 $\mathrm{Im}Q$ 与 $\mathrm{Ker}L$ 同构，因而存在同构映射 $J: \mathrm{Im}Q \to \mathrm{Ker}L$.

引理 1[14](延拓定理) 设 L 是指标为零的 Fredholm 映射， N 在 $\bar\Omega$ 上是 L - 紧的，假设

(a) 对任意的 $\lambda \in (0,1)$, 方程 $Lx = \lambda Nx$ 的解满足 $x \notin \partial\Omega \cap \mathrm{domL}$;

(b) 对任意的 $x \in \partial\Omega \cap \mathrm{Ker}L, QNx \neq 0$ 而且 $\deg\{JQN, \Omega\cap\mathrm{Ker}L, 0\} \neq 0$.

则方程 $Lx = Nx$ 在 $\mathrm{Dom}L \cap \bar\Omega$ 中至少存在一个解.

类似于文 [11] 引理 2 的证明，我们有

引理 2 $R_2^+ = \{(x,y) \in R^2 | x \geq 0, y \geq 0\}$ 关于系统 (1) 是正向不变的.

由于系统 (1) 的可应用性，考虑初值问题 $N_i(s) = \phi_i(s), N_i'(s) = \phi_i'(s) \geq 0, \phi_i(0) > 0, i = 1,2.$ $\phi_i \in C([-\tau,0],[0,+\infty)) \cap C^1([-\tau,0],[0,+\infty))$, 其中 $\tau = \max\limits_{t\in[0,\omega]}\{\tau_1, \tau_2, \sigma\}$.

本文使用如下记号

$$\bar b_i = \frac{1}{\omega}\int_0^\omega b_i(t)\mathrm{d}t, \bar B_i = \frac{1}{\omega}\int_0^\omega |b_i(t)|\mathrm{d}t, \bar u = \frac{1}{\omega}\int_0^\omega u(t)\mathrm{d}t, |u|_0 = \max_{0\leq t\leq\omega}\{u(t)\},$$

$$\underline{u} = \min_{0\leq t\leq\omega}\{u(t)\}, c_{10} = \frac{c_1(t)}{1-\tau_1'(t)}, a_{20} = \frac{a_2(t)}{1-\tau_2'(t)}.$$

定理 1 如果

(1) $\underline{a_{20}}(1-|\tau_1'|_0)>2\overline{b}_2m$; (2) $|c_1|_0\mathrm{e}^A<1$; (3) $\overline{b}_1>(\overline{\beta}+\overline{a_1-c_{10}'})\mathrm{e}^A$;

(4) $\overline{b}_1>\dfrac{\overline{b}_2(\overline{\beta}+\overline{a}_1)}{\overline{a}_2-m\overline{b}_2}$; (5) $a_1(t)>c_{10}'(t)$,

其中 $A=\ln\Big\{\dfrac{2\overline{b}_2}{\underline{a_{20}}-2\overline{b}_2m}\Big\}+\dfrac{2\overline{b}_2|c_{10}|_0}{\underline{a_{20}}(1-|\tau_1'|_0)-2\overline{b}_2m}+(\overline{B}_1+\overline{b}_1)\omega.$

则系统 (1) 至少存在一个正的 ω 周期解.

证 作变换

$$N_i(t)=\mathrm{e}^{x_i(t)},\ \ i=1,2. \tag{2}$$

则系统 (1) 变为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x_1(t)}{\mathrm{d}t}=b_1(t)-\beta(t)\mathrm{e}^{x_1(t)}-a_1(t)\mathrm{e}^{x_1(t-\tau_1(t))}\\ \qquad\qquad -c_1(t)x_1'(t-\tau_1(t))\mathrm{e}^{x_1(t-\tau_1(t))}-\dfrac{\alpha(t)}{1+m\mathrm{e}^{x_1(t)}}\mathrm{e}^{x_2(t-\sigma(t))},\\ \dfrac{\mathrm{d}x_2(t)}{\mathrm{d}t}=-b_2(t)+\dfrac{a_2(t)\mathrm{e}^{x_1(t-\tau_2(t))}}{1+m\mathrm{e}^{x_1(t-\tau_2(t))}}.\end{cases} \tag{3}$$

取 $X=\{x(t)=(x_1(t),x_2(t))^T\in C^1(R,R^2);x(t+\omega)=x(t)\}$ 和 $Z=\{z(t)=(z_1(t),z_2(t))^T\in C(R,R^2);z(t+\omega)=z(t)\}$, 并记 $|x|_0=\max\limits_{t\in[0,\omega]}|x(t)|,|x|_1=\max\limits_{t\in[0,\omega]}\{|x|_0,|x'|_0\}$. 则 X 和 Z 分别在模 $|\cdot|_1$ 和 $|\cdot|_0$ 下为 Banach 空间. 令

$$Nx=\begin{pmatrix}b_1(t)-\beta(t)\mathrm{e}^{x_1(t)}-a_1(t)\mathrm{e}^{x_1(t-\tau_1(t))}\\ -c_1(t)x_1'(t-\tau_1(t))\mathrm{e}^{x_1(t-\tau_1(t))}-\dfrac{\alpha(t)}{1+m\mathrm{e}^{x_1(t)}}\mathrm{e}^{x_2(t-\sigma(t))}\\ -b_2(t)+\dfrac{a_2(t)\mathrm{e}^{x_1(t-\tau_2(t))}}{1+m\mathrm{e}^{x_1(t-\tau_2(t))}},\end{pmatrix},\quad x\in X.$$

$$Lx=\dot{x}=\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t},\quad Px=\frac{1}{\omega}\int_0^\omega x(t)\mathrm{d}t,\ x\in X;\quad Qz=\frac{1}{\omega}\int_0^\omega z(t)\mathrm{d}t,\ z\in Z.$$

则有 $\mathrm{Ker}L=\Big\{\mathrm{span}\Big\{\Big(\begin{array}{c}1\\0\end{array}\Big),\Big(\begin{array}{c}0\\1\end{array}\Big)\Big\}\Big\}$, $\mathrm{Im}L=\{z\in Z:\int_0^\omega z(t)\mathrm{d}t=0\}$ 是 Z 中的闭子集，且 $\dim\mathrm{Ker}L=2=\mathrm{codim}\mathrm{Im}L$, 故 L 是指标为零的 Fredholm 映射. 容易证明 P,Q 是连续投影且使得 $\mathrm{Im}P=\mathrm{Ker}L$, $\mathrm{Ker}Q=\mathrm{Im}L=\mathrm{Im}(I-Q)$. 因此 L 的逆映射 $K_P:\mathrm{Im}L\to\mathrm{Ker}P\cap\mathrm{Dom}L$ 存在，且

$$K_P(z)=\int_0^t z(s)\mathrm{d}s-\frac{1}{\omega}\int_0^\omega\int_0^t z(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}t.$$

于是计算易得

$$QNx=\Big(\frac{1}{\omega}\int_0^\omega\Delta_1(x,s)\mathrm{d}s,\frac{1}{\omega}\int_0^\omega\Delta_2(x,s)\mathrm{d}s\Big)^T,$$

$$\begin{aligned}K_P(I-Q)Nx=&\Big(\int_0^t\Delta_1(x,s)\mathrm{d}s-\Delta_3(x,t),\int_0^t\Delta_2(x,s)\mathrm{d}s\Big)^T\\ &-\Big(\frac{1}{\omega}\int_0^\omega\int_0^t\Delta_1(x,s)\mathrm{d}s\mathrm{d}t-\frac{1}{\omega}\int_0^\omega\Delta_3(x,t)\mathrm{d}t,\frac{1}{\omega}\int_0^\omega\int_0^t\Delta_2(x,s)\mathrm{d}s\mathrm{d}t\Big)^T\\ &-\Big((\frac{t}{\omega}-\frac{1}{2})\int_0^\omega\Delta_1(x,s)\mathrm{d}s,(\frac{t}{\omega}-\frac{1}{2})\int_0^\omega\Delta_2(x,s)\mathrm{d}s\Big)^T.\end{aligned}$$

其中 $\Delta_1(x,s):=b_1(s)-(a_1(s)-c_{10}'(s))\mathrm{e}^{x_1(s-\tau_1(s))}-\beta(s)\mathrm{e}^{x_1(s)}-\frac{\alpha(s)}{1+m\mathrm{e}^{x_1(s)}}\mathrm{e}^{x_2(s-\sigma(s))}$, $\Delta_2(x,s)=-b_2(s)+\frac{a_2(s)\mathrm{e}^{x_1(s-\tau_2(s))}}{1+m\mathrm{e}^{x_1(s-\tau_2(s))}}, \Delta_3(x,t)=c_{10}(t)\mathrm{e}^{x_1(t-\tau_1(t))}-c_{10}(0)\mathrm{e}^{x_1(-\tau_1(0))}$. 显然 QN 和 $K_P(I-Q)N$ 连续. 设 Ω 是 X 中的有界开集，显然 $QN(\bar\Omega)$ 有界，利用 Arzela-Ascoli 定理容易证明 $\overline{K_P(I-Q)N(\bar\Omega)}$ 是紧致集, 因此 N 在 $\bar\Omega$ 上是 L - 紧的. 对应于算子方程 $Lx=\lambda Nx,\lambda\in(0,1)$, 我们有

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x_1(t)}{\mathrm{d}t}=\lambda\Big\{b_1(t)-\beta(t)\mathrm{e}^{x_1(t)}-a_1(t)\mathrm{e}^{x_1(t-\tau_1(t))}\\ \qquad\qquad -c_1(t)x_1'(t-\tau_1(t))\mathrm{e}^{x_1(t-\tau_1(t))}-\dfrac{\alpha(t)}{1+m\mathrm{e}^{x_1(t)}}\mathrm{e}^{x_2(t-\sigma(t))}\Big\},\\ \dfrac{\mathrm{d}x_2(t)}{\mathrm{d}t}=\lambda\Big\{-b_2(t)+\dfrac{a_2(t)\mathrm{e}^{x_1(t-\tau_2(t))}}{1+m\mathrm{e}^{x_1(t-\tau_2(t))}}\Big\}.\end{cases}\tag{4}$$

设 $x=x(t)\in X$ 是系统 (4) 的对应于某个 $\lambda\in(0,1)$ 的解，将 (4) 式两端同时从 0 到 ω 积分得

$$\begin{cases}\displaystyle\int_0^\omega\Big[b_1(t)-\beta(t)\mathrm{e}^{x_1(t)}-a_1(t)\mathrm{e}^{x_1(t-\tau_1(t))}\\ \displaystyle -c_1(t)x_1'(t-\tau_1(t))\mathrm{e}^{x_1(t-\tau_1(t))}-\frac{\alpha(t)}{1+m\mathrm{e}^{x_1(t)}}\mathrm{e}^{x_2(t-\sigma(t))}\Big]\mathrm{d}t=0,\\ \displaystyle\int_0^\omega\Big[-b_2(t)+\frac{a_2(t)\mathrm{e}^{x_1(t-\tau_2(t))}}{1+m\mathrm{e}^{x_1(t-\tau_2(t))}}\Big]\mathrm{d}t=0.\end{cases}$$

即

$$\int_0^\omega\Big[\beta(t)\mathrm{e}^{x_1(t)}+(a_1(t)-c_{10}'(t))\mathrm{e}^{x_1(t-\tau_1(t))}+\frac{\alpha(t)}{1+m\mathrm{e}^{x_1(t)}}\mathrm{e}^{x_2(t-\sigma(t))}\Big]\mathrm{d}t=\bar b_1\omega,\tag{5}$$

$$\int_0^\omega\frac{a_2(t)\mathrm{e}^{x_1(t-\tau_2(t))}}{1+m\mathrm{e}^{x_1(t-\tau_2(t))}}\mathrm{d}t=\bar b_2\omega.\tag{6}$$

由 (4) 式第一个式子我们有

$$\begin{aligned}&x_1'(t)+\lambda c_{10}(t)(\mathrm{e}^{x_1(t-\tau_1(t))})'\\ =&\lambda\Big[b_1(t)-\beta(t)\mathrm{e}^{x_1(t)}-a_1(t)\mathrm{e}^{x_1(t-\tau_1(t))}-\frac{\alpha(t)}{1+m\mathrm{e}^{x_1(t)}}\mathrm{e}^{x_2(t-\sigma(t))}\Big],\end{aligned}$$

从而由 (5) 式以及上式有

$$\begin{aligned}&\int_0^\omega\Big|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big[x_1(t)+\lambda c_{10}(t)\mathrm{e}^{x_1(t-\tau_1(t))}\Big]\Big|\mathrm{d}t\\ \le&\lambda\int_0^\omega\Big|b_1(t)-\beta(t)\mathrm{e}^{x_1(t)}-(a_1(t)-c_{10}'(t))\mathrm{e}^{x_1(t-\tau_1(t))}-\frac{\alpha(t)}{1+m\mathrm{e}^{x_1(t)}}\mathrm{e}^{x_2(t-\sigma(t))}\Big|\mathrm{d}t\\ \le&\int_0^\omega|b_1(t)|\mathrm{d}t+\int_0^\omega\Big[\beta(t)\mathrm{e}^{x_1(t)}+(a_1(t)-c_{10}'(t))\mathrm{e}^{x_1(t-\tau_1(t))}+\frac{\alpha(t)}{1+m\mathrm{e}^{x_1(t)}}\mathrm{e}^{x_2(t-\sigma(t))}\Big]\mathrm{d}t\\ \le&(\overline{B}_1+\overline{b}_1)\omega.\end{aligned}$$

由 (4) 式第二式以及 (6) 式可得

$$\int_0^\omega|\dot x_2(t)|\mathrm{d}t=\lambda\int_0^\omega\Big|-b_2(t)+\frac{a_2(t)\mathrm{e}^{x_1(t-\tau_2(t))}}{1+m\mathrm{e}^{x_1(t-\tau_2(t))}}\Big|\mathrm{d}t\le(\bar B_2+\bar b_2)\omega,\tag{7}$$

其中 $\bar B_1=\frac{1}{\omega}\int_0^\omega|b_1(t)|\mathrm{d}t,\bar B_2=\frac{1}{\omega}\int_0^\omega|b_2(t)|\mathrm{d}t$.

现在令 $g_2 = t - \tau_2(t)$ 则由 $\tau_2'(t) < 1$ 知 $g_2(t)$ 是严格单调增加函数，故存在反函数 $t = \varphi_2(g_2)$. 因此

$$\begin{aligned}\int_0^\omega \frac{a_2(t)\mathrm{e}^{x_1(t-\tau_2(t))}}{1+m\mathrm{e}^{x_1(t-\tau_2(t))}}\mathrm{d}t &= \int_{-\tau_2(0)}^{\omega-\tau_2(\omega)} \frac{a_2(\varphi_2(g_2))}{1-\tau_2'(\varphi_2(g_2))}\frac{\mathrm{e}^{x_1(g_2)}}{1+m\mathrm{e}^{x_1(g_2)}}\mathrm{d}g_2 \\ &= \int_0^\omega \frac{a_2(\varphi_2(g_2))}{1-\tau_2'(\varphi_2(g_2))}\frac{\mathrm{e}^{x_1(g_2)}}{1+m\mathrm{e}^{x_1(g_2)}}\mathrm{d}g_2.\end{aligned}$$

于是，由积分中值定理知道存在 $\eta_2 \in [0,\omega]$ 使得

$$\int_0^\omega \frac{a_2(t)\mathrm{e}^{x_1(t-\tau_2(t))}}{1+m\mathrm{e}^{x_1(t-\tau_2(t))}}\mathrm{d}t = \frac{a_2(\eta_2)}{1-\tau_2'(\eta_2)}\int_0^\omega \frac{\mathrm{e}^{x_1(t)}}{1+m\mathrm{e}^{x_1(t)}}\mathrm{d}t. \tag{8}$$

再次令 $t = s-\tau_1(s), t_1 = 0-\tau_1(0), t_2 = \omega-\tau_1(\omega)$. 同样的由 $\tau_1'(t) < 1$ 知道 t 是 s 的严格单调增加函数. 利用 $\tau_1(t)$ 的周期性有 $t_2 - t_1 = \omega$, 于是由积分中值定理和 $x_1(t)$ 的周期性知道存在 $\eta_1 \in [0,\omega]$ 使得

$$\begin{aligned}\frac{a_2(\eta_2)}{1-\tau_2'(\eta_2)}\int_0^\omega \frac{\mathrm{e}^{x_1(t)}}{1+m\mathrm{e}^{x_1(t)}}\mathrm{d}t &= \frac{a_2(\eta_2)}{1-\tau_2'(\eta_2)}\int_{t_1}^{t_2} \frac{\mathrm{e}^{x_1(t)}}{1+m\mathrm{e}^{x_1(t)}}\mathrm{d}t \\ &= \frac{a_2(\eta_2)}{1-\tau_2'(\eta_2)}\int_{0-\tau_1(0)}^{\omega-\tau_1(\omega)} \frac{\mathrm{e}^{x_1(t)}}{1+m\mathrm{e}^{x_1(t)}}\mathrm{d}t \\ &\overset{t=s-\tau_1(s)}{=} \frac{a_2(\eta_2)}{1-\tau_2'(\eta_2)}\int_0^\omega \frac{\mathrm{e}^{x_1(s-\tau_1(s))}}{1+m\mathrm{e}^{x_1(s-\tau_1(s))}}(1-\tau_1'(s))\mathrm{d}s \\ &= a_{20}(\eta_2)(1-\tau_1'(\eta_1))\int_0^\omega \frac{\mathrm{e}^{x_1(t-\tau_1(t))}}{1+m\mathrm{e}^{x_1(t-\tau_1(t))}}\mathrm{d}t.\end{aligned} \tag{9}$$

现在，由 (6),(8),(9) 三式可得

$$a_{20}(\eta_2)\int_0^\omega \frac{\mathrm{e}^{x_1(t)}}{1+m\mathrm{e}^{x_1(t)}}\mathrm{d}t + a_{20}(\eta_2)(1-\tau_1'(\eta_1))\int_0^\omega \frac{\mathrm{e}^{x_1(t-\tau_1(t))}}{1+m\mathrm{e}^{x_1(t-\tau_1(t))}}\mathrm{d}t = 2\int_0^\omega b_2(t)\mathrm{d}t,$$

于是，由积分中值定理知道存在 $\xi \in [0,\omega]$ 使得

$$a_{20}(\eta_2)\frac{\mathrm{e}^{x_1(\xi)}}{1+m\mathrm{e}^{x_1(\xi)}} + a_{20}(\eta_2)(1-\tau_1'(\eta_1))\frac{\mathrm{e}^{x_1(\xi-\tau_1(\xi))}}{1+m\mathrm{e}^{x_1(\xi-\tau_1(\xi))}} = 2\bar{b}_2. \tag{10}$$

由 (10) 式有 $a_{20}(\eta_2)\dfrac{\mathrm{e}^{x_1(\xi)}}{1+m\mathrm{e}^{x_1(\xi)}} \le 2\bar{b}_2$, 由此，利用定理条件 (1), 可解得

$$x_1(\xi) \le \ln\Big\{\frac{2\bar{b}_2}{\underline{a_{20}} - 2\bar{b}_2 m}\Big\}. \tag{11}$$

另一方面，由 (10) 式也有

$$a_{20}(\eta_2)(1-\tau_1'(\eta_1))\frac{\mathrm{e}^{x_1(\xi-\tau_1(\xi))}}{1+m\mathrm{e}^{x_1(\xi-\tau_1(\xi))}} \le 2\bar{b}_2,$$

利用定理条件 (1) 有

$$\mathrm{e}^{x_1(\xi-\tau_1(\xi))} \le \frac{2\bar{b}_2}{\underline{a_{20}}(1-|\tau_1'|_0) - 2\bar{b}_2 m}.$$

利用上式和 (11) 式有

$$\begin{aligned}&x_1(t)+\lambda c_{10}(t)\mathrm{e}^{x_1(t-\tau_1(t))}\\ \le\ & x_1(\xi)+\lambda c_{10}(\xi)\mathrm{e}^{x_1(\xi-\tau_1(\xi))}+\int_0^\omega\Big|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big[x_1(t)+\lambda c_{10}(t)(\mathrm{e}^{x_1(t-\tau_1(t))})\Big]\Big|\mathrm{d}t\\ \le\ & \ln\Big\{\frac{2\overline{b}_2}{\underline{a_{20}}-2\overline{b}_2m}\Big\}+\frac{2\overline{b}_2|c_{10}|_0}{\underline{a_{20}}(1-|\tau_1'|_0)-2\overline{b}_2m}+(\overline{B}_1+\overline{b}_1)\omega\overset{\mathrm{def}}{=}A.\end{aligned}$$

注意到 $\lambda c_{10}(t)\mathrm{e}^{x_1(t-\tau_1(t))}>0$ 也就有

$$x_1(t)<A. \tag{12}$$

利用积分中值定理以及 (5) 式知存在 $\eta\in[0,\omega]$ 使得

$$\frac{\omega\underline{\alpha}\mathrm{e}^{x_2(\eta-\sigma(\eta))}}{1+m\mathrm{e}^A}=\int_0^\omega\frac{\underline{\alpha}\mathrm{e}^{x_2(t-\sigma(t))}}{1+m\mathrm{e}^A}\mathrm{d}t\le\int_0^\omega\frac{\alpha(t)\mathrm{e}^{x_2(t-\sigma(t))}}{1+m\mathrm{e}^{x_1(t)}}\mathrm{d}t\le\int_0^\omega b_1(t)\mathrm{d}t.$$

现若令 $\eta-\sigma(\eta)=n_1\omega+\eta',\eta'\in[0,\omega],n_1$ 是某个整数，则由上式可得

$$\mathrm{e}^{x_2(\eta')}\le\frac{\overline{b}_1(1+m\mathrm{e}^A)}{\underline{\alpha}},$$

也就是

$$x_2(\eta')\le\ln\Big\{\frac{\overline{b}_1(1+m\mathrm{e}^A)}{\underline{\alpha}}\Big\}. \tag{13}$$

由 (7) 式和 (13) 式有

$$x_2(t)\le x_2(\eta')+\int_0^\omega|\dot{x}_2(t)|\mathrm{d}t\le\ln\Big\{\frac{\overline{b}_1(1+m\mathrm{e}^A)}{\underline{\alpha}}\Big\}+(\overline{B}_2+\overline{b}_2)\omega\overset{\mathrm{def}}{=}B. \tag{14}$$

另一方面，由 (4) 式第一式可得

$$|\dot{x}_1(t)|\le|b_1|_0+|\beta|_0\mathrm{e}^A+|a_1|_0\mathrm{e}^A+|c_1|_0|\dot{x}_1(t-\tau_1(t))|\mathrm{e}^A+|\alpha|_0\mathrm{e}^B.$$

注意到由定理条件 (2) 知有 $|c_1|_0\mathrm{e}^A<1$, 于是由上式可得

$$|\dot{x_1}|_0\le\frac{|b_1|_0+|\beta|_0\mathrm{e}^A+|a_1|_0\mathrm{e}^A+|\alpha|_0\mathrm{e}^B}{1-|c_1|_0\mathrm{e}^A}\overset{\mathrm{def}}{=}B_1. \tag{15}$$

由 (4) 式第二式可得 $|\dot{x}_2(t)|\le|b_2(t)|+\frac{|a_2(t)|\mathrm{e}^A}{1+m\mathrm{e}^A}$, 也就是

$$|\dot{x}_2|_0\le|b_2|_0+\frac{|a_2|_0\mathrm{e}^A}{1+m\mathrm{e}^A}\overset{\mathrm{def}}{=}B_2. \tag{16}$$

因为 $(x_1(t),x_2(t))^T\in X$, 所以存在 $\xi_i,\tau_i\in[0,\omega]$ 使得

$$x_i(\xi_i)=\min_{t\in[0,\omega]}x_i(t),\quad x_i(\tau_i)=\max_{t\in[0,\omega]}x_i(t),\quad i=1,2. \tag{17}$$

由 (6) 和 (17) 式有

$$\bar{b}_2\omega=\int_0^\omega\frac{a_2(t)\mathrm{e}^{x_1(t-\tau_2(t))}}{1+m\mathrm{e}^{x_1(t-\tau_2(t))}}\mathrm{d}t\ge\int_0^\omega\frac{a_2(t)\mathrm{e}^{x_1(\xi_1)}}{1+m\mathrm{e}^{x_1(\xi_1)}}\mathrm{d}t\ge\frac{\mathrm{e}^{x_1(\xi_1)}\bar{a}_2\omega}{1+m\mathrm{e}^{x_1(\xi_1)}},$$

所以由定理条件有

$$x_1(\xi_1) \le \ln\Big\{\frac{\bar{b}_2}{\bar{a}_2 - \bar{b}_2 m}\Big\}. \tag{18}$$

再次利用 (6) 式和 (17) 式，有

$$\bar{b}_2\omega = \int_0^\omega \frac{a_2(t)\mathrm{e}^{x_1(t-\tau_2(t))}}{1+m\mathrm{e}^{x_1(t-\tau_2(t))}}\mathrm{d}t \le \int_0^\omega a_2(t)\mathrm{e}^{x_1(\tau_1)}\mathrm{d}t \le \bar{a}_2\mathrm{e}^{x_1(\tau_1)}\omega,$$

即

$$x_1(\tau_1) \ge \ln\Big\{\frac{\bar{b}_2}{\bar{a}_2}\Big\}, \tag{19}$$

由 (18),(19) 式可知存在 $t_0 \in [0,\omega]$ 使得

$$|x_1(t_0)| \le \max\Big\{\Big|\ln\Big\{\frac{\bar{b}_2}{\bar{a}_2}\Big\}\Big|, \Big|\ln\Big\{\frac{\bar{b}_2}{\bar{a}_2 - \bar{b}_2 m}\Big\}\Big|\Big\}.$$

于是由 (15) 式和上式可得

$$|x_1(t)| \le |x_1(t_0)| + \int_0^t |x_1'(t)|\mathrm{d}t \le \max\Big\{\Big|\ln\Big\{\frac{\bar{b}_2}{\bar{a}_2}\Big\}\Big|, \Big|\ln\Big\{\frac{\bar{b}_2}{\bar{a}_2 - \bar{b}_2 m}\Big\}\Big|\Big\} + B_1\omega \overset{\mathrm{def}}{=} B_3. \tag{20}$$

另一方面，由 (5),(12) 和 (17) 式我们还有

$$\begin{aligned}
\bar{b}_1\omega &= \int_0^\omega \Big[\beta(t)\mathrm{e}^{x_1(t)} + (a_1(t) - c_{10}'(t))\mathrm{e}^{x_1(t-\tau_1(t))}\Big]\mathrm{d}t + \int_0^\omega \frac{\alpha(t)\mathrm{e}^{x_2(t-\sigma(t))}}{1+m\mathrm{e}^{x_1(t)}}\mathrm{d}t \\
&\le \int_0^\omega [\beta(t)\mathrm{e}^{x_1(t)} + (a_1(t) - c_{10}'(t))\mathrm{e}^{x_1(t-\tau_1(t))}]\mathrm{d}t + \int_0^\omega \alpha(t)\mathrm{e}^{x_2(\tau_2)}\mathrm{d}t \\
&\le \int_0^\omega [\beta(t)\mathrm{e}^{A} + (a_1(t) - c_{10}'(t))\mathrm{e}^{A}]\mathrm{d}t + \mathrm{e}^{x_2(\tau_2)}\overline{\alpha}\omega \\
&= \omega(\overline{\beta} + \overline{a_1 - c_{10}'})\mathrm{e}^{A} + \mathrm{e}^{x_2(\tau_2)}\omega\bar{\alpha},
\end{aligned}$$

于是由定理条件 (3) 知有 $x_2(\tau_2) \ge \ln\Big\{\dfrac{\bar{b}_1 - (\overline{\beta} + \overline{a_1 - c_{10}'})\mathrm{e}^{A}}{\bar{\alpha}}\Big\} := H_1$, 于是

$$x_2(t) \ge x_2(\tau_2) - \int_0^\omega |\dot{x}_2(t)|\mathrm{d}t \ge H_1 - (\bar{B}_2 + \bar{b}_2)\omega. \tag{21}$$

由 (14),(21) 式我们有

$$\max_{t\in[0,\omega]} |x_2(t)| \le \max\Big\{|B|, |H_1 - (\bar{B}_2 + \bar{b}_2)\omega|\Big\} := B_4. \tag{22}$$

显然 $B_i(i=1,2,3,4)$ 的选取与 λ 的选取无关. 由定理已知条件 (4) 知代数方程组

$$\begin{cases} \bar{b}_1 - (\bar{\beta} + \bar{a}_1)v_1 - \dfrac{\bar{\alpha}}{1+mv_1}v_2 = 0, \\ \bar{b}_2 - \dfrac{\bar{a}_2 v_1}{1+mv_1} = 0 \end{cases} \tag{23}$$

有唯一正解 $(v_1^*, v_2^*) \in R_2^+$. 令 $H = B_1 + B_2 + B_3 + B_4 + B_5$, 其中 $B_5 > 0$ 充分大使得 $||(\ln\{v_1^*\}, \ln\{v_2^*\})^T|| = |\ln\{v_1^*\}| + |\ln\{v_2^*\}| < B_5$. 令

$$\Omega = \Big\{x(t) = (x_1(t), x_2(t))^T \in X : \|x\| < H\Big\}.$$

则 Ω 满足引理 1 中的条件 (a). 当 $x\in\partial\Omega\cap\mathrm{Ker}L=\partial\Omega\cap R^2$ 时, x 是 R^2 中的常值向量且 $||x||=H$, 于是

$$QNx=\begin{pmatrix}\bar b_1-(\bar\beta+\bar a_1)\mathrm{e}^{x_1}-\dfrac{\bar\alpha}{1+m\mathrm{e}^{x_1}}\mathrm{e}^{x_2}\\ -\bar b_2+\dfrac{\bar a_2\mathrm{e}^{x_1}}{1+m\mathrm{e}^{x_1}}\end{pmatrix}\neq 0.$$

又由已知条件直接计算知

$$\deg\{JQN,\Omega\cap\mathrm{Ker}L,0\}=\mathrm{sgn}\det\begin{pmatrix}* & -\dfrac{\bar\alpha}{1+m\mathrm{e}^{x_1^*}}\\ \dfrac{\bar a_2\mathrm{e}^{x_1^*}}{(1+m\mathrm{e}^{x_1^*})^2} & 0\end{pmatrix}\neq 0.$$

这里 J 可取为同构映射因为 $\mathrm{Im}P=\mathrm{Ker}L$. 至此我们已经证明了 Ω 满足引理 1 的全部条件. 由引理 1, 方程 $Lx=Nx$ 在 $\mathrm{Dom}L\cap\bar\Omega$ 中至少有一个解, 即系统 (3) 在 Ω 中至少存在一个 ω - 周期解 $x^*(t)=(x_1^*(t),x_2^*(t))^T$. 令 $u^*(t)=(\exp\{x_1^*(t)\},\exp\{x_2^*(t)\})^T$, 则由 (2) 式知道, $u^*(t)$ 是系统 (1) 的 ω - 周期正解. 定理证毕. ▌

注 由于中立型方程所考虑的空间 X 是 C_ω^1 空间, 因此, 对该空间中的 x 的模的估计难度较非中立型的加大很多, 本文中为了估计 $|x_1'|_0$(见 (15) 式), 我们不得不先估计 (12) 和 (14) 式, 这恰是定理 1 证明的困难之处, 是无法用文 [9,11] 的方法来证明的.

作为本文定理的一个应用, 考虑系统

$$\begin{cases}\dot H(t)=rH(t)\Big[1-\dfrac{a_1(t)H(t-\tau)+a_2\dot H(t-\tau)}{K}\Big]-\alpha(t)H(t)P(t),\\ \dot P(t)=-b(t)P(t)+\beta(t)H(t)P(t)\end{cases}\tag{24}$$

其中 r,a_2,K,τ 均为正常数, $a_1(t),\alpha(t),b(t),\beta(t)$ 均为 ω 周期连续正函数. 我们有

推论 1 在系统 (24) 中, 假设 (1) $\frac{ra_2}{K}\mathrm{e}^A<1$; (2) $\frac{\overline{a_1}}{K}\mathrm{e}^A<1$; (3) $\frac{\overline{a_1}\bar b}{K\bar\beta}<1$,
其中 $A=\ln\left\{\frac{2\bar b}{\bar\beta}\right\}+\frac{2\bar bra_2}{\bar\beta K}+2r\omega$. 则系统 (24) 至少存在一个正周期解.

文 [8] 考虑了上述系统的周期正解的存在性问题. 上述推论与文 [8] 的主要结果定理 1.1 基本一样, 不同的原因是我们在于我们研究的是时变时滞的情形, 为叙述方便起见, 估计 (10) 式的时候用了稍微不一致的界, 因此, 本文结果可以看作是文 [8] 结果的实质性推广.

最后我们举一个例子说明定理条件的可行性.

例 考虑如下具有 Holling II 类功能性反应中立型捕食 - 食饵系统

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}N_1(t)}{\mathrm{d}t}=N_1(t)\Big[1-(\dfrac12-\dfrac{\sin t}{4})N_1(t)-N_1(t-\dfrac12\sin^2 t)\\ \qquad -\dfrac12(1-\dfrac12\sin 2t)\sin^2 tN_1'(t-\dfrac12\sin^2 t)\Big]-\dfrac{\alpha(t)N_1(t)}{1+N_1(t)}N_2(t-\cos(t)),\\ \dfrac{\mathrm{d}N_2(t)}{\mathrm{d}t}=-(2+\sin t)N_2(t)+\dfrac{(\mathrm{e}^{16}+4-\cos t)N_1(t-2\pi)}{1+N_1(t-2\pi)}N_2(t).\end{cases}\tag{25}$$

对照系统 (1), 该例中有 $b_1(t)=1,\beta(t)=(\frac12-\frac{\sin t}{4}),a_1(t)=1,c_1(t)=\frac12(1-\frac12\sin 2t)\sin^2 t,\tau_1(t)=\frac12\sin^2 t,m=1,b_2(t)=2+\sin t,a_2(t)=\mathrm{e}^{16}+4-\cos t,\tau_2(t)=2\pi$. 于是对应于定理 1 有 $\underline{a_{20}}=\mathrm{e}^{16}+4,c_{10}=\frac12\sin^2 t,A=\ln\dfrac{4}{\mathrm{e}^{16}}+\dfrac{4}{\mathrm{e}^{16}-4}+4\pi$. 从而有

(1) $\underline{a_{20}}(1-|\tau_1'|_0)=(\mathrm{e}^{16}+4)\cdot\frac12>2\times 2=2\bar b_2m$;

(2) $|c_1|_0 e^A \le \frac{3}{2}\frac{4}{e^{16}}\exp(4/e^{16}+4\pi) < 1$;
(3) $\overline{b}_1 = 1 > 1 \times \frac{4}{e^{16}}\exp(4/e^{16}+4\pi) = (\overline{\beta} + \overline{a_1 - c'_{10}})e^A$;
(4) $\overline{b}_1 = 1 > \dfrac{3}{e^{16}+4-2} = \dfrac{\overline{b}_2(\overline{\beta}+\overline{a}_1)}{\overline{a}_2 - m\overline{b}_2}$;
(5) $a_1(t) = 1 > \frac{\sin 2t}{2} = c'_{10}(t)$,

即定理 1 的所有条件都满足，于是由定理 1 知道系统 (25) 至少存在一个正的 2π 周期正解.

显然该例的 2π 周期正解是无法用本文参考文献中提供的定理来判别的.

参 考 文 献

[1] Rosenzweig M L, MacArthur R. Graphical representation and stability conditions of predator-prey interactions. Amer Nat, 1963, **97**: 209–223
[2] Rosenzweig M L. Why the prey curve has a hump. Amer Nat, 1969, **103**: 81–87
[3] Rosenzweig M L. Paradox of enrichment: destabilization of exploitation system in ecological time. Science, 1969, **171**: 385–387
[4] Maynard Smith J. Models in Ecology. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1974
[5] Holling C S. The functional response of predators to prey density and its role in mimicry and population regulation. Mem Ent Soc Cannad, 1965, **45**: 3–60
[6] 陈兰荪，井竹君. 捕食者 - 食饵相互作用微分方程极限环存在性和唯一性. 科学通报， 1984, **24**(9): 521–523
[7] Hsu S B, Huang T W. Global stability for a class of predator-prey systems. SIAM J Appl Math, 1995, **35**: 763–783
[8] Li Yongkun. Positive periodic solution of a neutral predator-prey system. Applied Mathematics and Mechanics, 1999, **20**(5): 545–550
[9] Li Yongkun. Positive solution of a periodic delay predator-prey system. Proc of Amer Math Soc, 1999, **127**(5): 1331–1335
[10] 贾建文，胡宝安. 具 II 类功能反应的非自治捕食扩散系统的全局稳定性. 生物数学学报， 2000, **15**(4): 437–442
[11] 范猛，王克. 一类具有 Holling II 型功能性反应的捕食者 - 食饵系统全局周期解的存在性. 数学物理学报， 2001, **21**A(4): 492–497
[12] Kuang Y. Delay Differential Equations with Applications in Population Dynamics. New York: Academic Press, 1993
[13] Zhihui Yang, Jinde Cao. Sufficient conditions for the existence of positive periodic solutions of a class of neutral delays models. Applied Mathematics and Computation, 2003, **142**(1): 123–142
[14] Gaines R E, Mawhin J L. Coincidence Degree and Nonlinear Differential Equations. Berlin: Springer-Verlag, 1977

Global Existence of Postive Periodic Solution of a Neutral Type Predator-prey System with Holling Type II Functional Response

Chen Fengde Chen Xiaoxing Lin Faxin Huang Chuncao
(*Department of Mathematics, Fuzhou University, Fujian 350002*)

Abstract: The authors first establish the neutral type predator-prey system with Holling type II functional response, then by developing some new technique of analysis and using a continuation theorem based on coincidence degree theory, the authors study the global existence of positive periodic solution for the above model. A set of easily verifiable sufficient conditions is obtained. Example shows that our main results are feasible.

Key words: Holling II type functional response; Periodic solution; Coincidence degree; Neutral.

MR(2000) Subject Classification: 34K20; 34C25; 92D25