2005,**25A**(6):846－851

Acta Mathematica Scientia 数学物理学报

一类非线性算子方程解的存在唯一性及其应用*

张晓燕
（山东大学数学与系统科学学院　济南 250100）
孙经先
（徐州师范大学数学系　徐州 221116）

摘要:该文在更广泛的条件下,利用锥理论和 Banach 压缩映象原理证明了序 Banach 空间中一类非线性算子方程解的存在唯一性定理,并应用到 Banach 空间中二阶非线性混合型微分－积分方程初值问题,改进并推广了已有的一些结果.

关键词:锥理论;算子方程;Banach 压缩映象原理;微分－积分方程.

MR(2000)主题分类:47H15　　**中图分类号**:O177.91　　**文献标识码**:A

文章编号:1003-3998(2005)06-846-06

1　引言和预备知识

本文利用锥理论研究 Banach 空间中一类非线性算子方程 $x=Ax$ 解的存在唯一性问题.关于这类算子方程的研究,已出现了一系列的结果,可以参见郭大钧教授的专著[1]以及文[2－4].已有结果中大都使用了上、下解条件或紧性条件,这对于许多具体的非线性算子验证起来是困难的.本文对算子 A 的连续性和紧性没作任何假定,在不要求存在上、下解的情况下,利用锥理论和 Banach 压缩映象原理得到了非线性算子方程 $x=Ax$ 解的存在唯一性定理,并应用到 Banach 空间中二阶非线性混合型微分－积分方程初值问题。

设 E 是实 Banach 空间,P 是 E 中的一个锥,P 在 E 中导出一个半序"$\leqslant$",关于锥和由锥导出的半序的详细内容请参见文献[1][5]。θ 表示 E 中的零元.我们称锥 P 是正规的,如果存在常数 $N>0$,使得对任何 $x,y\in E$,$\theta\leqslant x\leqslant y$,都有 $\|x\|\leqslant N\|y\|$。我们称锥 P 是再生的,如果 $E=P-P$,即 E 中任何元素 x 均可表成 $x=y-z$ 的形式,其中 $y,z\in P$。我们称 P 为体锥,如果 $\mathring{P}\neq\phi$,即 P 的内点集不空.我们称线性算子 T 为正算子,如果对 $\forall\, x\geqslant\theta$,有 $Tx\geqslant\theta$.

引理 1[1]　锥 P 是再生的,当且仅当存在常数 $\tau>0$,使任何 $x\in E$ 都可表成

$$x=y-z,$$

这里

$$y,z\in P \text{ 且 } \|y\|\leqslant\tau\|x\|,\ \|z\|\leqslant\tau\|x\|.$$

收稿日期:2003-10-07;修订日期:2004-12-18

E-mail:jxsun7083@sohu.com

* 基金项目:国家自然科学基金(10371066)资助

2 主要结果

定理 1 设 P 是正规的再生锥，$A:E\to E$ 是一个非线性算子. 如果存在正线性有界算子 $T:E\to E$，使得 $I+T$ 可逆（I 为恒等算子），并且 $(I+T)x\geqslant\theta\Rightarrow x\in P$；又设存在正线性有界算子 $L:E\to E$，满足 $TL=LT$ 和 $r[(I+T)^{-1}][r(L)+r(T)]<1$（其中 $r(\cdot)$ 表示有界线性算子的谱半径），且

$$-T(x-y)\leqslant Ax-Ay\leqslant L(x-y),\quad \forall\, x,y\in E,\ x\geqslant y,\tag{1}$$

则 A 在 E 中有唯一不动点 x^*，并且，对任何 $x_0\in E$，令 $x_n=(I+T)^{-1}(Ax_{n-1}+Tx_{n-1})$ $(n=1,2,\cdots)$，必有 $x_n\to x^*(n\to\infty)$.

证 因为 $I+T$ 可逆，故令

$$Bx=(I+T)^{-1}(Ax+Tx),\quad \forall\, x\in E.$$

由文[6]知，条件 $(I+T)x\geqslant\theta\Rightarrow x\in P$ 可推出 $(I+T)^{-1}$ 为正算子，因此由(1)式知 B 是增算子，且对 $\forall\, x,y\in E,x\geqslant y$，有

$$Bx-By\leqslant H(x-y),\tag{2}$$

其中 $H=(I+T)^{-1}(L+T)$. 因为 $TL=LT$，故 $(I+T)^{-1}(L+T)=(L+T)(I+T)^{-1}$. 根据[7]中命题 1.2.4 知，

$$r[(I+T)^{-1}(L+T)]\leqslant r[(I+T)^{-1}]r(L+T)\leqslant r[(I+T)^{-1}][r(L)+r(T)].$$

取 α 满足 $r[(I+T)^{-1}][r(L)+r(T)]<\alpha<1$，则根据[8]中谱半径的性质，有

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\|H^n\|^{\frac{1}{n}}&=r(H)=r[(I+T)^{-1}(L+T)]\\&\leqslant r[(I+T)^{-1}][r(L)+r(T)]<\alpha<1,\end{aligned}\tag{3}$$

于是存在自然数 n_0，使得

$$\|H^{n_0}\|<\alpha^{n_0}<1.\tag{4}$$

因 P 是再生的，由引理 1 知，存在 $\tau>0$，使任何 $x\in E$ 均可表成

$$x=y-z,\quad y,z\in P,\quad 且\quad \|y\|\leqslant\tau\|x\|,\ \|z\|\leqslant\tau\|x\|,\tag{5}$$

故

$$-(y+z)\leqslant x\leqslant y+z.\tag{6}$$

令

$$\|x\|_0=\inf\{\|u\|\mid u\in P,\ 且使 -u\leqslant x\leqslant u\}.\tag{7}$$

由(6)式知(7)式中的 u 是存在的，故 $\|x\|_0$ 有意义. 易证 $\|\cdot\|_0$ 是 E 中的一个范数. 由(5)－(7)式知

$$\|x\|_0\leqslant\|y+z\|\leqslant 2\tau\|x\|,\quad \forall\, x\in E.\tag{8}$$

另一方面，对任何满足 $-u\leqslant x\leqslant u$ 的 $u\in P$，我们有 $\theta\leqslant x+u\leqslant 2u$. 从而 $\|x\|\leqslant\|x+u\|+\|-u\|\leqslant(2N+1)\|u\|$，其中 N 表示 P 的正规常数. 由 u 的任意性，可得

$$\|x\|\leqslant(2N+1)\|x\|_0,\quad \forall\, x\in E.\tag{9}$$

因此由(8)式和(9)式知范数 $\|\cdot\|_0$ 与原范数 $\|\cdot\|$ 等价.

现任给 $x,y\in E$，对任何满足 $-u\leqslant x-y\leqslant u$ 的 $u\in P$，有

$$x\geqslant\frac{1}{2}(x+y-u),\quad y\geqslant\frac{1}{2}(x+y-u).\tag{10}$$

由于 L 和 T 都为正线性有界算子，故 H 也为正线性有界算子. 于是对(4)式中的自然数 n_0，

由(10)式和(2)式得

$$B^{n_0}x-B^{n_0}(\frac{x+y-u}{2})\leqslant H[B^{n_0-1}x-B^{n_0-1}(\frac{x+y-u}{2})]$$
$$\leqslant H^{n_0}(x-\frac{x+y-u}{2})=H^{n_0}(\frac{x-y+u}{2}),$$

又由(10)式及 B 为增算子知

$$B^{n_0}x-B^{n_0}(\frac{x+y-u}{2})\geqslant 0\geqslant -H^{n_0}(\frac{x-y+u}{2}),$$

即

$$-H^{n_0}(\frac{x-y+u}{2})\leqslant B^{n_0}x-B^{n_0}(\frac{x+y-u}{2})\leqslant H^{n_0}(\frac{x-y+u}{2}),\tag{11}$$

同理可得

$$-H^{n_0}(\frac{y-x+u}{2})\leqslant B^{n_0}y-B^{n_0}(\frac{x+y-u}{2})\leqslant H^{n_0}(\frac{y-x+u}{2}).\tag{12}$$

由(11)式减去(12)式得

$$-H^{n_0}u\leqslant B^{n_0}x-B^{n_0}y\leqslant H^{n_0}u.$$

注意到 $H^{n_0}u\in P$,则有 $\|B^{n_0}x-B^{n_0}y\|_0\leqslant\|H^{n_0}u\|\leqslant\|H^{n_0}\|\ \|u\|$,再由 u 的任意性,得

$$\|B^{n_0}x-B^{n_0}y\|_0\leqslant\|H^{n_0}\|\ \|x-y\|_0,\quad \forall x,y\in E.$$

由(4)式知 $\|H^{n_0}\|<\alpha^{n_0}<1$. 根据 Banach 压缩映象原理知 B^{n_0} 在 E 中有唯一不动点 x^*,从而 B 在 E 中有唯一不动点 x^*. 由 B 的定义知 A 在 E 中也有唯一不动点 x^*,即 x^* 为算子方程 $x=Ax$ 的唯一解. 并且,对任何 $x_0\in E$,令 $x_n=Bx_{n-1}(n=1,2,\cdots)$,有 $\|x_n-x^*\|_0\to 0$ $(n\to\infty)$. 再根据 $\|\cdot\|_0$ 与 $\|\cdot\|$ 的等价性,得 $\|x_n-x^*\|\to 0$ $(n\to\infty)$. 证完. ▌

注 1 在定理 1 中,我们对算子 A 没加任何紧性和连续性方面的假设,也不要求存在上、下解,只是在锥 P 正规再生,算子 A 满足一个序关系的条件下,证明了解的存在唯一性,并给出了迭代格式.

注 2 若 $T=L$,则条件 $TL=LT$ 自动满足. 若 $T=MI$ (M 为非负常数),则条件"$(I+T)x\geqslant\theta\Rightarrow x\in P$, $TL=LT$, $I+T$ 可逆"都自动满足,并且只要求 $r(L)<1$ 时,就有 $r[(I+T)^{-1}][r(L)+r(T)]<(1+M)^{-1}(1+M)=1$ 满足. 所以本文结果放宽了文献[1-4]中的条件,减弱了对算子 A 序关系的限制.

当 $T=L=B$ 时,我们又得到一个可行的唯一解的存在性定理:

定理 2 设 P 是正规的再生锥,$A:E\to E$ 是一个非线性算子. 如果存在正线性有界算子 $B:E\to E$, $r(B)<1$,使

$$-B(x-y)\leqslant Ax-Ay\leqslant B(x-y),\quad \forall x,y\in E,\ x\geqslant y.\tag{13}$$

则 A 在 E 中有唯一不动点 x^{**},并且,对任何 $x_0\in E$,令 $x_n=Ax_{n-1}(n=1,2,\cdots)$,必有 $x_n\to x^{**}(n\to\infty)$.

证 由 $r(B)<1$ 知,取 β,满足 $\lim\limits_{n\to\infty}\|B^n\|^{\frac{1}{n}}=r(B)<\beta<1$,于是存在自然数 n_1,使得

$$\|B^{n_1}\|<\beta^{n_1}<1.\tag{14}$$

由定理 1 的证明知,(5)-(10)式成立. 由(10)式和(13)式得

$$-B(\frac{x-y+u}{2})\leqslant Ax-A(\frac{x+y-u}{2})\leqslant B(x-\frac{x+y-u}{2})=B(\frac{x-y+u}{2}),\tag{15}$$

$$-B(\frac{y-x+u}{2})\leqslant Ay-A(\frac{x+y-u}{2})\leqslant B(y-\frac{x+y-u}{2})=B(\frac{y-x+u}{2}).\tag{16}$$

由(15)式减去(16)式得

$$-Bu \leqslant Ax - Ay \leqslant Bu. \tag{17}$$

于是有

$$Ax \geqslant \frac{1}{2}(Ax + Ay - Bu), \quad Ay \geqslant \frac{1}{2}(Ax + Ay - Bu),$$

重复上述(15)—(17)式的证明过程,可得

$$-B(Bu) \leqslant A(Ax) - A(Ay) \leqslant B(Bu),$$

即$-B^2u \leqslant A^2x - A^2y \leqslant B^2u$,故由归纳法,易证$-B^nu \leqslant A^nx - A^ny \leqslant B^nu$,$n=1,2,\cdots$. 因此对于(14)式中的$n_1$,有

$$-B^{n_1}u \leqslant A^{n_1}x - A^{n_1}y \leqslant B^{n_1}u.$$

又$B^{n_1}u \in P$,所以$\| A^{n_1}x - A^{n_1}y \|_0 \leqslant \| B^{n_1}u \| \leqslant \| B^{n_1} \| \| u \|$,再由$u$的任意性,得

$$\| A^{n_1}x - A^{n_1}y \|_0 \leqslant \| B^{n_1} \| \| x - y \|_0, \quad \forall x, y \in E.$$

由(14)式知$\| B^{n_1} \| < \beta^{n_1} < 1$. 根据 Banach 压缩映象原理知$A^{n_1}$在$E$中有唯一不动点$x^{**}$,从而$A$在$E$中有唯一不动点$x^{**}$,即$x^{**}$为算子方程$x=Ax$的唯一解. 并且,对任何$x_0 \in E$,令$x_n = Ax_{n-1}$($n=1,2,\cdots$),有$\| x_n - x^{**} \|_0 \to 0$ ($n \to \infty$)。再根据$\| \cdot \|_0$与$\| \cdot \|$的等价性,得$\| x_n - x^{**} \| \to 0$ ($n \to \infty$). 证完. ▌

注 3 定理 2 将[1]中定理 3.1.14 中的条件$\| B \| < 1$放宽为$r(B) < 1$,从而使定理 2 便于实际应用.

3 应用

下面将所得结果应用到 Banach 空间中二阶非线性混合型微分—积分方程初值问题.

设E为实 Banach 空间,P是E中的正规体锥. 令$I=[0,a]$($a>0$). 令

$$C[I,E] = \{u \mid u: I \to E \text{ 连续}\}, \quad C^2[I,E] = \{u \mid u: I \to E \text{ 二阶连续可微}\}.$$

对$u \in C[I,E]$,令$\| u \|_c = \max\limits_{t \in I} \| u(t) \|$,易知$C[I,E]$在范数$\| \cdot \|_c$下是一个 Banach 空间. 又设$P_c = \{u \in C[I,E] \mid u(t) \geqslant \theta, t \in I\}$,显然$P_c$是$C[I,E]$中的一个锥,$P_c$在$C[I,E]$中导出的半序仍用"$\leqslant$"表示.

设$f: I \times E \times E \times E \to E$(不假定连续),对任给$u \in C[I,E]$,$g(t) = f(t, u(t), K_1u(t), K_2u(t)): I \to E$连续,$u_0, u_1 \in E$. 考虑$E$中二阶非线性混合型微分—积分方程初值问题

$$\begin{cases} u'' = f(t, u, K_1u, K_2u), & t \in I, \\ u(0) = u_0, \quad u'(0) = u_1, \end{cases} \tag{18}$$

其中$K_1u(t) = \int_0^t k_1(t,s)u(s)\mathrm{d}s$, $K_2u(t) = \int_0^a k_2(t,s)u(s)\mathrm{d}s$, $k_1 \in C[D, R^+]$, $k_2 \in C[I \times I, R^+]$, $D = \{(t,s) \in I \times I \mid s \leqslant t\}$, $k_1^* = \max\limits_{(t,s) \in D} k_1(t,s)$, $k_2^* = \max\limits_{(t,s) \in I \times I} k_2(t,s)$.

定理 3 设P是E中的正规体锥,又设存在常数$M_i \geqslant 0, N_i \geqslant 0$ ($i=1,2,3$),使得对任意$t \in I, x, y, z, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \in E, \bar{x} \geqslant x, \bar{y} \geqslant y, \bar{z} \geqslant z$,都有

$$f(t, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) - f(t, x, y, z) \geqslant -M_1(\bar{x} - x) - M_2(\bar{y} - y) - M_3(\bar{z} - z), \tag{19}$$

$$f(t, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) - f(t, x, y, z) \leqslant N_1(\bar{x} - x) + N_2(\bar{y} - y) + N_3(\bar{z} - z). \tag{20}$$

则初值问题(18)在$C^2[I,E]$中存在唯一解$u^*(t)$.

证 定义算子$A: C[I,E] \to C[I,E]$如下

$$u(t)=u_0+tu_1+\int_0^t(t-s)f(s,u(s),K_1u(s),K_2u(s))\mathrm{d}s\triangleq Au(t),\quad t\in I.\tag{21}$$

则 $u\in C^2[I,E]$是初值问题(18)的解当且仅当 $u=Au$. 对任给的 $u,v\in C[I,E]$, $u\leqslant v$, 由(19)式和(21)式知

$$\begin{aligned}Av(t)-Au(t)\geqslant&-\int_0^t(t-s)[M_1(v(s)-u(s))+M_2(K_1v(s)-K_1u(s))\\&+M_3(K_2v(s)-K_2u(s))]\mathrm{d}s\\=&-\int_0^t(t-s)[M_1(v(s)-u(s))+M_2K_1(v(s)-u(s))\\&+M_3K_2(v(s)-u(s))]\mathrm{d}s\\\geqslant&-\int_0^t aM^*[(v(s)-u(s))+K_1(v(s)-u(s))+K_2(v(s)-u(s))]\mathrm{d}s,\end{aligned}$$

其中 $M^*=\max\{M_1,M_2,M_3\}$，再由(20)式和(21)式知

$$\begin{aligned}Av(t)-Au(t)\leqslant&\int_0^t(t-s)[N_1(v(s)-u(s))+N_2K_1(v(s)-u(s))\\&+N_3K_2(v(s)-u(s))]\mathrm{d}s\\\leqslant&\int_0^t aN^*[(v(s)-u(s))+K_1(v(s)-u(s))+K_2(v(s)-u(s))]\mathrm{d}s,\end{aligned}$$

其中 $N^*=\max\{N_1,N_2,N_3\}$. 令$\overline{M}=\max\{M^*,N^*\}$，则

$$-B(v(t)-u(t))\leqslant Av(t)-Au(t)\leqslant B(v(t)-u(t)),\quad\forall t\in I,$$

其中

$$Bu(t)=\int_0^t a\overline{M}[u(s)+K_1u(s)+K_2u(s)]\mathrm{d}s,\quad t\in I.\tag{22}$$

下证线性算子 B 的谱半径 $r(B)=0$. 对任意的 $t\in I$，由(22)式知

$$\|Bu(t)\|\leqslant a\overline{M}(1+ak_1{}^*+ak_2{}^*)t\|u\|_c.$$

记 $\eta\triangleq a\overline{M}(1+ak_1{}^*+ak_2{}^*)$. 则

$$\|(B^2u)(t)\|\leqslant\eta\int_0^t\|(Bu)(s)\|\mathrm{d}s\leqslant\eta^2\|u\|_c\int_0^t s\mathrm{d}s=\frac{\eta^2t^2}{2!}\|u\|_c,\quad\forall t\in I.$$

由归纳法易证，对任何自然数 n，有

$$\|(B^nu)(t)\|\leqslant\frac{\eta^nt^n}{n!}\|u\|_c,\quad\forall t\in I,$$

于是 $\|(B^nu)\|_c=\max\limits_{t\in I}\|(B^nu)(t)\|\leqslant\dfrac{\eta^na^n}{n!}\|u\|_c$，从而 $\|B^n\|\leqslant\dfrac{\eta^na^n}{n!}$，故

$$r(B)=\lim_{n\to\infty}\|B^n\|^{\frac{1}{n}}=0.$$

由于 P 是 E 中的正规锥，易证 P_c 是 $C[I,E]$中的正规锥。又由于 P 是 E 中的体锥，故由[9]中的引理 2.1.2 知 P_c 也是$C[I,E]$中的体锥，从而由[1]知 P_c 是$C[I,E]$中的再生锥。因此满足定理 2 的所有条件，故 A 在 $C[I,E]$中有唯一不动点 $u^*(t)$，即初值问题(18)在 $C^2[I,E]$中存在唯一解 $u^*(t)$.

注 4 定理 3 在 f 关于第二变元 M_1-增、第三变元 M_2-增和第四变元 M_3-增的情况下，在不要求存在上、下解和紧型条件下，并且对(19)和(20)式中的非负常数 M_i 和 N_i $(i=1,2,3)$没有任何限制的情况下，得到了初值问题(18)的唯一解，这是以往文献(如[1，9－13]等)所没有得到的新结果.

参 考 文 献

[1] 郭大钧. 非线性分析中的半序方法. 济南：山东科技出版社，2000

[2] 孙经先. 一类非线性算子方程的迭代求解. 工程数学学报，1989，**6**(2)：12－17

[3] 孙经先，刘立山. 非线性算子方程的迭代解及其应用. 数学物理学报，1993，**13**(2)：141－145

[4] 张晓燕，刘立山. 非线性算子方程迭代解的存在性定理及其应用. 数学物理学报，2001，**21**(3)：398－404

[5] 郭大钧. 非线性泛函分析. 济南：山东科技出版社，1985

[6] Chen Yongzhuo. Fixed Points of T-monotone Operators. Nonlinear Analysis，TMA，1995，**24**(8)：1281－1287

[7] 李炳仁. Banach 代数. 北京：科学出版社，1992

[8] Taylor A E，Lay D C. Introduction to Functional Analysis. New York：Springer-Verlag，1980

[9] Guo Dajun，Lakshmikantham V，Liu Xinzhi. Nonlinear Integral Equations in Abstract Spaces. Dordrecht：Kluwer Academic Publishers，1996

[10] 刘立山. Banach 空间非线性混合型微分-积分方程的解. 数学学报，1995，**38**(6)：721－731

[11] 刘立山. Banach 空间中不连续非线性 Volterra 型积分方程的唯一解. 数学学报，2001，**44**(1)：131－136

[12] 宋福民. Banach 空间中微分方程的弱 Carathéodory 解. 数学学报，1998，**41**(6)：1265－1272

[13] Liu Lishan. Iterative method of solutions and coupled quasi-solutions of nonlinear integro-differential equations of mixed type in Banach spaces. Nonlinear Analysis，2000，**42**：583－598

Existence and Uniqueness of Solutions for a Class of Nonlinear Operator Equations and its Applications

Zhang Xiaoyan

(*School of Mathematics and System Science*，*Shandong University*，*Jinan* 250100)

Sun Jingxian

(*Department of Mathematics*，*Xuzhou Normal University*，*Xuzhou* 221116)

Abstract：By using the cone theory and the Banach contraction mapping principle，the existence and uniqueness theorem of solutions for a class of nonlinear operator equations in ordered Banach spaces is investigated in more general condition. As an application，an existence and uniqueness theorem of solutions for initial value problems of nonlinear second order integro-differential equations of mixed type in Banach spaces is given. The results presented here improve and generalize some known results.

Key words：Cone theory；Operator equation；Banach contraction mapping principle；Integro-differential equation。

MR(2000) Subject Classification：47H15