文章编号:1672-3961(2008)04-0017-05

多输入-多输出线性系统有限时间观测器设计方法

邓修成,沈艳军,方胜乐
(三峡大学理学院,湖北 宜昌 443002)

摘要:基于有限时间稳定理论,给出了完全能观测的多输入-多输出线性系统的有限时间观测器的设计方法.所设计的观测器在有限时间后实现了对系统状态的精确重构.数值仿真实验验证了本方法的正确性.

关键词:有限时间稳定;有限时间观测器;Lyapunov稳定;线性系统;完全能观测
中图分类号:TP13 **文献标志码**:A

An approach to design the finite-time observer for MIMO-linear systems

DENG Xiu-cheng, SHEN Yan-jun, FANG Sheng-le
(College of Science, Three Gorges University, Yichang 443002, China)

Abstract: Based on the theory of finite-time stability, an approach to design the finite-time observer for multi-input multi-output linear systems was presented. It was shown that, after a finite time, the designed finite-time observer realizes the accurate reconstruction of the state of the linear systems. A numerical simulation example was given to illustrate the correctness of this method.

Key words: finite-time stability; finite-time observer; Lyapunov stability; linear systems; completely observer

0 引言

观测器的设计是控制理论的核心问题之一.一般情形下,由于想获得所研究系统的全部状态是非常困难的,因此,在很多实际问题中通常需要设计状态观测器来估计其实际状态.如今,观测器的设计在很多方面得到了广泛的应用,例如:输出反馈控制、系统监控、过程辨识、故障诊断等[1].

对于观测器的设计,早在20世纪六七十年代,从线性系统入手,研究者成功地设计了Kalman滤波器[2]、Luenberger观测器[3]等.在非线性系统方面,至今也积累了很多设计方法:在文献【4】中,利用Lyapunov函数和Bellman-Gronwall引理研究了观测器的设计问题;在文献【5】中,根据Lyapunov稳定性理论提出了一种选择增益矩阵的代数方法来设计观测器.尽管对同一个系统,可以使用几种不同的设计方法来解决观测器的设计问题,但是绝大部分的观测器的设计都是侧重于系统的静态特性(即状态的渐近重构),其暂态性能可能会不大理想.有限时间观测器却具有这些观测器不具备的快速性和精确性的特性.因此,很多研究者越来越重视系统有限时间观测器的设计问题.例如滞后法[6-8]是最近提出的较易分析和综合的方法.对非线性系统,文献【9】研究了一类非线性系统的有限时间观测器设计问题,实现了在任意给定的有限时间段内对状态函数的精确重构.对线性系统,传统意义上的以重构特定系统的状态并使之渐近稳定的观测器,已经有了完善的理论设计方法,然而,有限时间观测器的设计却还是一个棘手的问题,文献【10】给出了一类线性系统的有限时

收稿日期:2008-02-25
基金项目:国家自然科学基金资助项目(60773190);湖北省杰出青年团队项目(T200809);湖北省教育厅重点项目(D20081306)
作者简介:邓修成(1979-),男,湖北省广水人,助教,硕士研究生,从事棒控制、智能控制的研究.
E-mail:dxcdxcwahaha@sina.com.cn

间函数观测器的设计新方法.

本文主要考虑完全能观测的多输入–多输出线性系统的有限时间观测器设计问题.利用系统平衡点渐近稳定性和向量函数几何齐次[11]的概念,选择恰当的参数,构建出此类系统的有限时间观测器,理论研究表明系统在一个有限的时间点后达到稳定状态.最后通过一个仿真算例,验证了所得到理论结果的正确性.

本文中,$\mathbf{R}^n$ 表示 n 维的实数空间,$\mathbf{R}_+^n$ 表示 n 维的正实数空间,设 $\lfloor x \rceil^{\alpha} = |x|^{\alpha}\mathrm{sign}(x)$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

1 预备知识

考虑如下系统:

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = f(\boldsymbol{x}(t)), f(0) = 0, \boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n, \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0, \tag{1}$$

其中,$f: D \to \mathbf{R}^n$ 是原点 $\boldsymbol{x} = 0$ 的一个开邻域 D 上的连续函数.

定义 1[11] 如果存在开邻域 $\Delta \subset D$(D 如上给定)和一个函数 $T: \Delta \setminus \{0\} \to (0, \infty)$使得 $\forall \boldsymbol{x}_0 \in \Delta$,系统(1)的以 $\boldsymbol{x}_0$ 为初始条件的解 $\boldsymbol{x}(t, x_0) \in \Delta \setminus \{0\}$, $\forall t \in [0, T(\boldsymbol{x}_0))$且 $\lim\limits_{t \to T(x_0)} \boldsymbol{x}(t, \boldsymbol{x}_0) = 0$,那么系统(1)的零解是有限时间收敛的.称 $T(\boldsymbol{x}_0)$是停息时间点.

定义 2[11] 系统(1)的零解是有限时间稳定的,如果此解是 Lyapunov 稳定和有限时间收敛. 当 $\Delta = D = \mathbf{R}^n$ 时,此零解称为全局有限时间稳定.

定义 3[11] 设标量函数 $V(\boldsymbol{x}(t))$定义为 $V: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$,如果对$(r_1, \cdots, r_n) \in \mathbf{R}_+^n$, $V(\lambda^{r_1} x_1, \cdots, \lambda^{r_n} x_n) = \lambda^d V(x_1, \cdots, x_n)$, $\forall \lambda > 0$,则称函数 $V(\boldsymbol{x}(t))$关于权系数$(r_1, \cdots, r_n)$是 d 阶齐次.

定义 4[11] 如果对 $1 \leqslant i \leqslant n$,向量函数 $f(\boldsymbol{x}(t))$的第 i 个分量$f_i(\boldsymbol{x}(t))$是 $r_i + d$ 阶齐次函数,即

$$f_i(\lambda^{r_1} x_1, \cdots, \lambda^{r_n} x_n) = \lambda^{r_i + d} f_i(x_1, \cdots, x_n), \quad \forall \lambda > 0,$$

那么称 $f(\boldsymbol{x}(t))$关于系数$(r_1, \cdots, r_n) \in \mathbf{R}_+^n$ 是 d 阶齐次.

引理 1[12] 假设 $f(\boldsymbol{x}(t))$关于权系数$(r_1, \cdots, r_n) \in \mathbf{R}_+^n$ 是 m 阶齐次,系统(1)的原点是有限时间稳定的平衡点,当且仅当原点是渐近稳定的平衡点和 $m < 0$.

2 主要结果

此节的主要目的就是设计多输入–多输出完全能观测的系统的有限时间观测器.

考虑完全能观测的多输入–多输出线性定常系统:

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{U}, \quad \boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t), \tag{2}$$

其中,$\boldsymbol{A}$ 为 $n \times n$ 常阵,$\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{C}$ 分别为 $n \times p$ 和 $q \times n$ 常阵,$\boldsymbol{U}$ 为 $p \times 1$ 的输入阵,$\boldsymbol{x}(t)$为 $n \times 1$ 状态向量,$\boldsymbol{y}(t)$为 $q \times 1$ 的输出向量.

引理 2[13] 对完全能观测的多输入–多输出线性定常系统(2),$\mathrm{rank}(\boldsymbol{C}) = k$,则其龙伯格能观测规范型为

$$\dot{\hat{\boldsymbol{x}}}(t) = \hat{\boldsymbol{A}}\hat{\boldsymbol{x}}(t) + \hat{\boldsymbol{B}}\boldsymbol{U}, \quad \boldsymbol{y} = \hat{\boldsymbol{C}}\hat{\boldsymbol{x}}(t), \tag{3}$$

其中,

$$\hat{\boldsymbol{A}} = \begin{bmatrix} \widetilde{\boldsymbol{A}}_{11} & \cdots & \widetilde{\boldsymbol{A}}_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ \widetilde{\boldsymbol{A}}_{k1} & \cdots & \widetilde{\boldsymbol{A}}_{kk} \end{bmatrix}; \tag{4}$$

$$\widetilde{\boldsymbol{A}}_{ii} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & * \\ 1 & & & * \\ & \ddots & & * \\ & & 1 & * \end{bmatrix}_{\gamma_i \times \gamma_i}, i = 1, 2, \cdots, k; \tag{5}$$

$$\boldsymbol{A}_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & * \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & * \end{bmatrix}_{\gamma_i \times \gamma_j}, i \neq j; \tag{6}$$

$$\hat{\boldsymbol{C}}=\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & & & & & \\ & & & * & \ddots & & & & \\ & & & & & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ * & & & & \cdots & & & & * \\ \vdots & & & & & & & & \vdots \\ * & & & & \cdots & & & & * \end{bmatrix}. \tag{7}$$

$\hat{\boldsymbol{B}}$ 无特殊形式．上述关系式中用“$*$”表示的元为可能的非零元，所缺的位置的元素是零元素，$\{\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_k\}$为系统($\boldsymbol{A},\boldsymbol{C}$)的能观测性指数集，显然 $\gamma_1+\cdots+\gamma_k=n$．下面将设计此观测器的具体形式．为了讨论问题的方便，$\mu_0=0,\mu_{k-1}=\gamma_1+\cdots+\gamma_{k-1},\mu_k=\gamma_1+\cdots+\gamma_n=n$．设 $a_{i,j},b_{i,j},c_{i,j}$分别为$\hat{\boldsymbol{A}},\hat{\boldsymbol{B}},\hat{\boldsymbol{C}}$ 的非零元素，那么上述可观测规范型(3)的第 i 块可等价地写成式(9.1－9.2)．

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_{\mu_i+1}=a_{\mu_i+1,\mu_1}\hat{x}_{\mu_1}+\cdots+a_{\mu_i+1,\mu_{k-1}}\hat{x}_{\mu_{k-1}}+a_{\mu_i+1,n}\hat{x}_n+\sum\limits_{j=1}^{p}b_{\mu_i+1,j}u_j; \\ \dot{\hat{x}}_{\mu_i+2}=a_{\mu_i+2,\mu_1}\hat{x}_{\mu_1}+\cdots+a_{\mu_i+2,\mu_{k-1}}\hat{x}_{\mu_{k-1}}+a_{\mu_i+2,n}\hat{x}_n+\hat{x}_{\mu_i+1}+\sum\limits_{j=1}^{p}b_{\mu_i+2,j}u_j; \\ \vdots \\ \dot{\hat{x}}_{\mu_i+\gamma_{i+1}}=a_{\mu_i+\gamma_{i+1},\mu_1}\hat{x}_{\mu_1}+\cdots+a_{\mu_i+\gamma_{i+1},\mu_{k-1}}\hat{x}_{\mu_{k-1}}+a_{\mu_i+\gamma_{i+1},n}\hat{x}_n+\hat{x}_{\mu_i+\gamma_{i+1}-1}+\sum\limits_{j=1}^{p}b_{\mu_i+\gamma_{i+1},j}u_j. \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1=\hat{x}_{\mu_1}; \\ y_2=\hat{x}_{\mu_2}+c_{2,\mu_1}\hat{x}_{\mu_1}; \\ \vdots \\ y_{k-1}=\hat{x}_{\mu_{k-1}}+c_{k-1,\mu_{k-2}}\hat{x}_{\mu_{k-2}}; \\ y_k=\hat{x}_n+c_{k,\mu_{k-1}}\hat{x}_{\mu_{k-1}}; \\ y_{k+1}=\sum\limits_{j=1}^{n}c_{k+1,j}\hat{x}_j; \\ \vdots \\ y_m=\sum\limits_{j=1}^{n}c_{m,j}\hat{x}_j. \end{cases}$$

$$i=0,1,\cdots,k-1. \tag{9.1-9.2}$$

设 $\alpha_i=i\alpha-(i-1),i=1,2,\cdots,n,\alpha>0$；$s_1,s_2,\cdots,s_n$ 为满足后面定理的常数；$\tilde{\boldsymbol{x}}$ 为 $\hat{\boldsymbol{x}}$ 的估计状态．于是可以构建第 i 块的观测器(10)：

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}_{\mu_i+1}=a_{\mu_i+1,\mu_1}\tilde{x}_{\mu_1}+\cdots+a_{\mu_i+1,\mu_{k-1}}\tilde{x}_{\mu_{k-1}}+a_{\mu_i+1,n}\tilde{x}_n+s_{\mu_i+1}\lfloor e_{\mu_{i+1}}\rceil^{\alpha_{\gamma_{i+1}}}+\sum\limits_{j=1}^{p}b_{\mu_i+1,j}u_j; \\ \dot{\tilde{x}}_{\mu_i+2}=a_{\mu_i+2,\mu_1}\tilde{x}_{\mu_1}+\cdots+a_{\mu_i+2,\mu_{k-1}}\tilde{x}_{\mu_{k-1}}+a_{\mu_i+2,n}\tilde{x}_n+\tilde{x}_{\mu_i+1}+s_{\mu_i+2}\lfloor e_{\mu_{i+1}}\rceil^{\alpha_{\gamma_{i+1}-1}}+\sum\limits_{j=1}^{p}b_{\mu_i+2,j}u_j; \\ \vdots \\ \dot{\tilde{x}}_{\mu_i+\gamma_{i+1}}=a_{\mu_i+\gamma_{i+1},\mu_1}\tilde{x}_{\mu_1}+\cdots+a_{\mu_i+\gamma_{i+1},\mu_{k-1}}\tilde{x}_{\mu_{k-1}}+a_{\mu_i+\gamma_{i+1},n}\tilde{x}_n+\tilde{x}_{\mu_i+\gamma_{i+1}-1}+s_{\mu_i+\gamma_{i+1}}\lfloor e_{\mu_{i+1}}\rceil^{\alpha_1}+\sum\limits_{j=1}^{p}b_{\mu_i+\gamma_{i+1},j}u_j. \end{cases}$$

$$i=0,1,\cdots,k-1. \tag{10}$$

其中，$\tilde{x}_{\mu_1}=y_1,\tilde{x}_{\mu_i}=y_i-c_{i,\mu_{i-1}}\tilde{x}_{\mu_i-1},i=2,3,\cdots,k$．

设 $e_i=\hat{x}_i-\tilde{x}_i$，式(9.1)减去式(10)得到所构建的观测器的第 i 块的动态误差为

$$\begin{cases} \dot{e}_{\mu_i+1}=-s_{\mu_i+1}\lfloor e_{\mu_{i+1}}\rceil^{\alpha_{\gamma_{i+1}}}; \\ \dot{e}_{\mu_i+2}=e_{\mu_i+1}-s_{\mu_i+2}\lfloor e_{\mu_{i+1}}\rceil^{\alpha_{\gamma_{i+1}-1}}; \\ \vdots \\ \dot{e}_{\mu_i+\gamma_{i+1}-1}=e_{\mu_i+\gamma_{i+1}-2}-s_{\mu_i+\gamma_{i+1}-1}\lfloor e_{\mu_{i+1}}\rceil^{\alpha_2}; \\ \dot{e}_{\mu_{i+1}}=e_{\mu_{i+1}-1}-s_{\mu_{i+1}}\lfloor e_{\mu_{i+1}}\rceil^{\alpha_1}. \end{cases} \quad i=0,1,\cdots,k-1. \tag{11}$$

再记 $r_i=(i-1)\alpha-(i-2), i=1,2,\cdots,n, \gamma=\max\{\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_k\}$，那么 $r_1=1, \alpha_i=r_{i+1}=r_i+\alpha-1$. 根据定义4容易得到引理3.

引理3　对 $\alpha>1-\dfrac{1}{\gamma-1}$，系统(11)关于权系数 $(r_{\gamma_{i+1}}, r_{\gamma_{i+1}-1},\cdots,r_1)$ 是 $\alpha-1$ 阶齐次.

证明　设 $f(e_{\mu_i+1},e_{\mu_i+2},\cdots,e_{\mu_{i+1}})$ 为系统(11)的向量函数，则根据定义4只需证明

$$f_{\mu_i+t}(\lambda^{r_{\gamma_{i+1}}}e_{\mu_i+1},\lambda^{r_{\gamma_{i+1}-1}}e_{\mu_i+2},\cdots,\lambda^{r_1}e_{\mu_{i+1}})=\lambda^{\gamma_{i+1}+\alpha-1}f_{\mu_i+t}(e_{\mu_i+1},e_{\mu_i+2},\cdots,e_{\mu_{i+1}}),$$

$$\forall\lambda>0, i=0,1,\cdots,k-1, t=1,\cdots,\gamma_{i+1}.$$

由 $f_{\mu_i+1}(e_{\mu_i+1},e_{\mu_i+2},\cdots,e_{\mu_{i+1}})=-s_{\mu_i+1}\lfloor e_{\mu_{i+1}}\rceil^{\alpha_{\gamma_{i+1}}}$ 有

$$f_{\mu_i+1}(\lambda^{r_{\gamma_{i+1}}}e_{\mu_i+1},\lambda^{r_{\gamma_{i+1}-1}}e_{\mu_i+2},\cdots,\lambda^{r_1}e_{\mu_{i+1}})=-\lambda^{\alpha_{\gamma_{i+1}}}s_{\mu_i+1}\lfloor e_{\mu_{i+1}}\rceil^{\alpha_{\gamma_{i+1}}}=\lambda^{r_{\gamma_{i+1}}+\alpha-1}f_{\mu_i+1}(e_{\mu_i+1},e_{\mu_i+2},\cdots,e_{\mu_{i+1}}).$$

当 $t=2,3,\cdots,\gamma_{i+1}$ 时，由

$$f_{\mu_i+t}(e_{\mu_i+1},\cdots,e_{\mu_{i+1}})=e_{\mu_i+t-1}-s_{\mu_i+t}\lfloor e_{\mu_{i+1}}\rceil^{\alpha_{\gamma_{i+1}-t+1}}$$

得

$$\begin{aligned}f_{\mu_i+t}(\lambda^{r_{\gamma_{i+1}}}e_{\mu_i+1},\lambda^{r_{\gamma_{i+1}-1}}e_{\mu_i+2},\cdots,\lambda^{r_1}e_{\mu_{i+1}})&=\lambda^{r_{\gamma_{i+1}-t+2}}e_{\mu_i+t-1}-s_{\mu_i+t}\lfloor\lambda^{r_1}e_{\mu_{i+1}}\rceil^{\alpha_{\gamma_{i+1}-t+1}}=\\&\lambda^{r_{\gamma_{i+1}-t+1}+\alpha-1}f_{\mu_i+t}(e_{\mu_i+1},e_{\mu_i+2},\cdots,e_{\mu_{i+1}}).\end{aligned}$$

当 $\alpha>1-\dfrac{1}{\gamma-1}$ 时，由于 $\gamma=\max\{\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_k\}$，故 $(r_{\gamma_{i+1}},r_{\gamma_{i+1}-1},\cdots,r_1)\in\mathbf{R}^+ (i=0,1,\cdots,k-1)$，因此结论成立.

现在根据引理1和引理3的结果，利用系统平衡点渐近稳定性和向量函数齐次性理论，构造恰当的Lyapunov函数，保证系统(11)是有限时间稳定的，以下是本文的主要结论.

定理1　选取 $s_1,\cdots,s_n$ 使得 $\prod_{i=0}^{k-1}D_i(\lambda)=0$ 的根都具有负实部，那么存在 $\varepsilon\in\left(1-\dfrac{1}{\gamma-1},1\right)$，使得 $\forall\alpha\in(1-\varepsilon,1)$，系统(11)是有限时间稳定的，从而式(10)是系统(3)的有限时间观测器，其中，

$$D_i(\lambda)=\lambda^{\gamma_{i+1}}+s_{\mu_{i+1}}\lambda^{\gamma_{i+1}-1}+\cdots+s_{\mu_i+2}\lambda+s_{\mu_i+1}.$$

证明　为了讨论问题的方便，不妨引入以下记号：
$\bar{\boldsymbol{e}}=(\bar{e}_1,\cdots,\bar{e}_{k-1})^{\mathrm{T}}$；$\bar{\boldsymbol{e}}_i=(e_{\mu_{i+1}},e_{\mu_{i+1}-1},\cdots,e_{\mu_i+1})^{\mathrm{T}}$，$i=0,1,\cdots,k-1$；$\bar{\boldsymbol{r}}_i=(r_{\mu_i},r_{\mu_i-1},\cdots,r_{\mu_{i-1}+1}), i=1,\cdots,k$；$r=\prod_{i=1}^{n-1}r_i$. 当 $\alpha=1$ 时，系统(11)可以等价地写成

$$\dot{\bar{\boldsymbol{e}}}=\bar{\boldsymbol{A}}\bar{\boldsymbol{e}},\tag{12}$$

这里 $\bar{\boldsymbol{A}}=\mathrm{diag}(\bar{\boldsymbol{A}}_0,\cdots,\bar{\boldsymbol{A}}_{k-1})$，

$$\bar{\boldsymbol{A}}_i=\begin{bmatrix}-s_{\mu_{i+1}} & 1 & & & \\ -s_{\mu_{i+1}-1} & 0 & 1 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ -s_{\mu_i+2} & 0 & \cdots & & 1\\ -s_{\mu_i+1} & 0 & \cdots & & 0\end{bmatrix}, i=0,\cdots,k-1.$$

于是 $\bar{\boldsymbol{A}}_i$ 的特征多项式为 $D_i(\lambda)$，故 $\bar{\boldsymbol{A}}$ 的特征根是 $\prod_{i=0}^{k-1}D_i(\lambda)=0$ 的根. 由已知，$s_1,\cdots,s_n$ 使得 $\bar{\boldsymbol{A}}$ 的特征根都具有负实部. 因此，根据Lyapunov稳定性理论知系统(12)是渐近稳定的，于是存在正定阵 $\boldsymbol{P}_i$ 使得

$$\sum_{i=0}^{k-1}(\boldsymbol{P}_i\bar{\boldsymbol{A}}_i+\bar{\boldsymbol{A}}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_i)<0.$$

令 $V_\alpha(\bar{\boldsymbol{e}})=\sum_{i=0}^{k-1}V_\alpha(\bar{\boldsymbol{e}}_i)$，$V_\alpha(\bar{\boldsymbol{e}}_i)=\boldsymbol{y}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{y}_i$，$\boldsymbol{y}_i=\left(\lfloor e_{\mu_{i+1}}\rceil^{\frac{1}{\alpha_{\mu_{i+1}-1}r}},\lfloor e_{\mu_{i+1}-1}\rceil^{\frac{1}{\alpha_{\mu_{i+1}-2}r}},\cdots,\lfloor e_{\mu_i+1}\rceil^{\frac{1}{\alpha_{\mu_i}r}}\right)^{\mathrm{T}}$，显然 $V_\alpha(\bar{\boldsymbol{e}})$ 关于 $(\bar{r}_1,\bar{r}_2,\cdots,\bar{r}_k)\in\mathbf{R}^+$ 是 $\dfrac{2}{r}$ 阶齐次，对任意 $\alpha>0$，式(11)的向量场 f_α 是连续的. 当 $\alpha=1$ 时，有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}V_1(\bar{\boldsymbol{e}})=\sum_{i=0}^{k-1}2\bar{\boldsymbol{e}}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_i\dot{\bar{\boldsymbol{e}}}_i=\sum_{i=0}^{k-1}2\bar{\boldsymbol{e}}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{A}_i\bar{\boldsymbol{e}}_i<0.$$

设 $\Lambda = V_{\alpha}^{-1}([0,1])$, $\nabla = V_{1}^{-1}(\{1\})$,那么 Λ 和∇是紧集.定义 $\varphi:(0,1]\times\nabla\rightarrow\mathbf{R}$, $\varphi(\alpha,\bar{\boldsymbol{e}}) = L_{f_{\alpha}}V_{\alpha}(\bar{\boldsymbol{e}})$.那么 φ 是连续的且满足$\varphi(1,\bar{\boldsymbol{e}})<0$, $\bar{\boldsymbol{e}}\in\nabla$,即有 $\varphi(\{1\}\times\nabla)\subset(-\infty,0)$.因为 ∇是紧集,那么存在 $\varepsilon>0$ 使得 $\varphi((1-\varepsilon,1]\times\nabla)\subset(-\infty,0)$[14].因此,对 $\alpha\in(1-\varepsilon,1]$,有 $\bar{\boldsymbol{e}}\in\nabla$, $L_{f_{\alpha}}V_{\alpha}(\bar{\boldsymbol{e}})<0$.从而对$\forall\alpha\in(1-\varepsilon,1]$, Λ 是正的不变集.故对 $\alpha\in(1-\varepsilon,1]$,系统的原点是渐近稳定的平衡点[13].注意到 $\alpha-1<0$,由引理1可知,系统(11)是有限时间稳定的,从而式(10)是式(3)的有限时间观测器.

3　仿真实验

考虑以下完全能观测的多输入－多输出龙伯格线性定常系统:

$$\begin{cases}\dot{\hat{x}}_1 = \hat{x}_2 + 3\hat{x}_4;\\ \dot{\hat{x}}_2 = \hat{x}_1 + 2\hat{x}_2 + 2\hat{x}_4 + 2;\\ \dot{\hat{x}}_3 = \hat{x}_2 + 3\hat{x}_4 + 4;\\ \dot{\hat{x}}_4 = 4\hat{x}_2 + \hat{x}_3 + 4\hat{x}_4 + 6.\end{cases}\qquad \begin{cases}y_1 = \hat{x}_2;\\ y_2 = 2\hat{x}_2 + \hat{x}_4;\\ y_3 = \hat{x}_1 + 2\hat{x}_2 + 3\hat{x}_3 + 4\hat{x}_4.\end{cases}\tag{13.1－13.2}$$

则可以设计如下的有限时间观测器:

$$\begin{cases}\dot{\tilde{x}}_1 = y_1 + 3(y_2 - 2y_1) + 2\lfloor e_2\rceil^{\alpha_2};\\ \dot{\tilde{x}}_2 = \tilde{x}_1 + 2y_1 + 2(y_2 - 2y_1) + 3\lfloor e_2\rceil^{\alpha_1};\\ \dot{\tilde{x}}_3 = y_1 + 3(y_2 - 2y_1) + 4\lfloor e_4\rceil^{\alpha_2};\\ \dot{\tilde{x}}_4 = 4y_1 + \tilde{x}_3 + 4(y_2 - 2y_1) + 5\lfloor e_4\rceil^{\alpha_1}.\end{cases}\tag{14}$$

令 $e_i = \hat{x}_i - \tilde{x}_i$, $i = 1,2,3,4$.则式(13.1)减去式(14)可以得到其误差系统:

$$\begin{cases}\dot{e}_1 = -2\lfloor e_2\rceil^{\alpha_2};\\ \dot{e}_2 = e_1 - 3\lfloor e_2\rceil^{\alpha_1};\\ \dot{e}_3 = e_2 - 4\lfloor e_4\rceil^{\alpha_2};\\ \dot{e}_4 = e_3 - 5\lfloor e_4\rceil^{\alpha_1}.\end{cases}\tag{15}$$

如果取 $\alpha = 0.99$,则由 $\alpha_1 = 0.99$, $\alpha_2 = 0.98$,利用 Matlab 仿真画出其误差轨迹如图1所示。

显然,在一个有限时间以后误差系统达到稳定.

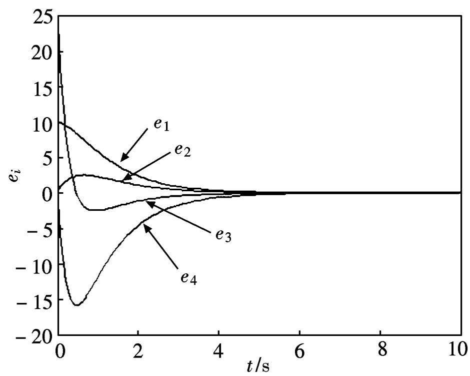

图1　误差轨迹
Fig.1　Error graph

4　结束语

本文通过引入龙伯格能观测规范型,利用有限时间稳定的理论设计了此类系统的有限时间观测器,并通过一个实例验证了所建立方法的有效性.

参考文献:

[1] CHENGT HEX D, ASADA H H. Nonlinear observer design for two phase flow heat exchangers of air conditioning systems[C]// Proceedings of 2004 American Control Conference. Bonston: the IEEE Press, 2004:1534-1539.
[2] KALMAN R E. On a new approach to filtering and prediction problems[J]. Transactions of the ASME Journal of Basic Engineering, 1960, 82(Series D):35-45.
[3] LUENBERGER D G. An introduction to observers[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1971, 16(6):596-602.
[4] ZAK S H. On the stabilization and observation of nonlinear uncertain dynamic systems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1990, 35(5):604-607.
[5] RAGHAVAN S. Observers and compensators for nonlinear system with application to flexible joint robot[D]. Berkeley: University California, 1992.
(下转第36页)

(上接第21页)

[6] ENGEL R, KREISSELMEIER G. A continuous-time observer which converges in finite time[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2002, 47(7):1202-1204.

[7] MENOLD P H, FINDEISEN R, ALLGOWER F. Finite time convergent observers for linear time-varying systems[C]// Proceedings of the 11th IEEE Mediterranem Conference on Control and Automation. Rhodos: the IEEE Press, 2003:78-84.

[8] MENOLD P H, FINDEISEN R, ALLGOWER F. Finite time convergent observers for nonlinear systems[C]// Proceedings of the 42nd IEEE Conference on Decision and Control. Maui: the IEEE Press, 2003:5673-5678.

[9] 丁玉琴, 刘允刚. 一类非线性系统有限时间函数观测器设计方法[J]. 山东大学学报:工学版, 2007, 37(1):56-60.
DING Yu-qin, LIU Yun-gang. An approach to design the finite time functional observer for a class of nonlinear systems[J]. Journal of Shandong University: Engineering Science, 2007, 37(1):56-60.

[10] RAFF T, MENOLD P, EBENBAUER C, et al. A finite time functional observer for linear systems[C]// Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control, and the European Control Conference. Seville: the IEEE Press, 2005:7198-7203.

[11] BHAT, BERNSTEIN D. Finite-time stability of continuous autonomous systems[J]. SIAM Journal of Control and Optimization, 2000, 38(3):751-766.

[12] BHAT, BERNSTEIN D. Geometric homogeneity with applications to finite-time stability[J]. Math Control Signals Systems, 2005, 17:101-127.

[13] 郑大钟.线性系统理论[M].北京:清华大学出版社,1990.
ZHENG Da-zhong. Theory of linear systems[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 1990.

[14] MUNKRES J R. Topology a first course[M]. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1975.

(编辑:许力琴)