2009,**29A**(6):

Acta Mathematica Scientia 数学物理学报

四元数体上 Hermite 矩阵的最小化问题 *

[1,2] 袁仕芳　[2] 廖安平　[2] 雷渊

([1] 五邑大学数学物理系　江门 529020;　[2] 湖南大学数学与计量经济学院　长沙 410082)

摘要: 本文建立了四元数矩阵对的标准相关分解 (CCD-Q). 借助 CCD-Q, GSVD-Q 和有限维内积空间中的投影定理, 本文得到了基于四元数矩阵方程 $AXB = C$ 的 Hermite 矩阵最小化问题解的表达式.

关键词: 四元数矩阵方程; 最小化问题;　CCD-Q; GSVD-Q.

MR(2000) 主题分类: 65F05; 65H10; 15A33　**中图分类号**: O241.6　**文献标识码**: A

文章编号: 1003-3998(2009)06–

1　引言

本文用 $R^{m\times n}$ 表示所有 $m\times n$ 实矩阵的集合, $C^{m\times n}$ 表示所有 $m\times n$ 复矩阵的集合, $Q^{m\times n}$ 表示所有 $m\times n$ 四元数矩阵的集合, $SR^{n\times n}$ 表示所有 n 阶实对称矩阵的集合, $ASR^{n\times n}$ 表示所有 n 阶实反对称矩阵的集合, I_n 表示 n 阶单位矩阵. 对 $A\in Q^{m\times n}$, A^H 表示 A 的共轭转置矩阵. $A\in Q^{n\times n}$ 被称为 Hermite 矩阵, 如果 $a_{ij}=\overline{a}_{ji}(i,j=1,2,\cdots,n)$ [1]. 所有 n 阶 Hermite 四元数矩阵的集合记为 $HQ^{n\times n}$. 任意一个四元数 a 记为 $a=a_0+a_1i+a_2j+a_3k$, 其中 a_0,a_1,a_2,a_3 为实系数, 且 $i^2=j^2=k^2=-1, ij=-ji=k$, 这样对任意的 $A\in HQ^{n\times n}$, A 可表示为 $A=A_0+A_1i+A_2j+A_3k$, 其中 $A_0\in SR^{n\times n}, A_1,A_2,A_3\in ASR^{n\times n}$. 对 $A=(a_{ij})\in Q^{m\times n}, B=(b_{ij})\in Q^{m\times n}$, $A\circ B=(a_{ij}b_{ij})$ 表示 A 与 B 的 Hadamard 积并定义 A 与 B 的内积为 $(A,B)=\mathrm{tr}(A^HB)$, 则 $Q^{m\times n}$ 是一个 Hilbert 内积空间且由此内积导出的范数 $\|A\|=(A,A)^{\frac{1}{2}}$ 是 Frobenius 范数.

特殊矩阵集合 S 的最小化问题来自科学计算与工程应用的许多领域 [2–3]. 在结构设计, 有限元模型修正和控制理论等领域中, 矩阵集合 S 往往是某个矩阵方程的约束解集合 [4–9].

许多学者致力于矩阵集合 S 的研究, 它是解决这类最小化问题的关键, 也就是在域上, 环上或体上求某个矩阵方程的约束解集合或约束最小二乘解集合, 已取得许多重要的结果, 见文 [10–20].

域上特殊矩阵集合的最小化问题已有成功的解决 (例如, 文 [4–7, 15]). 近几年来基于矩阵方程

$$AXB=C \tag{1}$$

收稿日期: 2007–; 修订日期: 2008–

E-mail: liaoap@hnu.cn

* 基金项目: 湖南省自然科学基金资助项目 (03JJY6028) 和湖南省教育厅资助科研项目 (O1C162)

的 Hermite 矩阵最小化问题也取得许多重要的成果．例如，廖和雷 [21] 同时利用广义奇异值分解和标准相关分解得到了它的最小二乘对称解及其最佳逼近．彭等 [22], 彭 [23], 雷和廖 [24] 分别利用迭代法解决了这类最小化问题.

然而，就我们所知，基于四元数矩阵方程 (1) 的 Hermite 矩阵最小化问题讨论得还不是很多．本文我们来讨论此类问题.

基于四元数矩阵方程 (1) 的 Hermite 矩阵最小化问题可描述如下：

问题 I 给定 $A \in Q^{n\times m}, B \in Q^{m\times k}$, 和 $C \in Q^{n\times k}$. 求 $X \in HQ^{m\times m}$ 使得

$$\|AXB - C\| = \min_{\widetilde{X}\in HQ^{m\times m}} \|A\widetilde{X}B - C\|.$$

问题 II 给定 $X^* \in Q^{m\times m}$, 求 $\widehat{X} \in S_L$ 使得

$$\|\widehat{X} - X^*\| = \min_{X\in S_L} \|X - X^*\|, \tag{2}$$

其中 S_L 是问题 I 的解集合.

问题 II 的解 $\widehat{X}$ 称作基于四元数矩阵方程 (1) 的 Hermite 矩阵最小化问题的解.

如果我们令 $X_1 = X - X^*$, $C^* = C - AX^*B$, 则 $\|AXB - C\| = \|AX_1B - C^*\|$ 且 $\|X - X^*\| = \|X_1\|$. 据此在下面的讨论中，我们可不失一般性地假定问题 II 中 $X^* = 0$.

本文结构如下．我们首先在第 2 节讨论四元数矩阵对的标准相关分解，然后在第 3 节和第 4 节里，分别得到问题 I, II 解的表达式.

2 CCD-Q

本节我们建立四元数矩阵对的标准相关分解 (CCD-Q).

定理 1 (CCD-Q) 设 $D \in Q^{m\times n}$, $B \in Q^{m\times k}, \mathrm{rank}(D) = p$, $\mathrm{rank}(B) = q$, 则存在酉矩阵 $Q \in Q^{m\times m}$ 和非奇异矩阵 $M \in Q^{n\times n}, N \in Q^{k\times k}$ 使得

$$D = Q(\Sigma_D, 0)M, \quad B = Q(\Sigma_B, 0)N, \tag{3}$$

其中 $\Sigma_D \in R^{m\times p}$ 和 $\Sigma_B \in R^{m\times q}$ 且

$$\Sigma_D = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} I_i & 0 & 0 \\ 0 & \Gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & S & 0 \\ 0 & 0 & I_{p-i-j} \end{pmatrix} & \begin{matrix} i \\ j \\ q-i-j \\ m-q-p+i \\ j \\ p-i-j \end{matrix} \end{array}, \quad \Sigma_B = \begin{pmatrix} I_q \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\Gamma = \mathrm{diag}(\alpha_{i+1}, \cdots, \alpha_{i+j}), 1 > \alpha_{i+1} \geq \cdots \geq \alpha_{i+j} > 0,$$

$$S = \mathrm{diag}(\beta_{i+1}, \cdots, \beta_{i+j}), 0 < \beta_{i+1} \leq \cdots \leq \beta_{i+j} < 1,$$

$$\alpha_t^2 + \beta_t^2 = 1, t = (i+1) : (i+j),$$

$$i = \mathrm{rank}(D) + \mathrm{rank}(B) - \mathrm{rank}([D, B]),$$

$$j=\operatorname{rank}([D,B])+\operatorname{rank}(B^HD)-\operatorname{rank}(D)-\operatorname{rank}(B).$$

证 由四元数矩阵的奇异值分解 [25], 对 $D\in Q^{m\times n}$, 则存在酉矩阵 $\Omega\in Q^{m\times m}$, $G\in Q^{n\times n}$ 使得

$$\begin{aligned}D&=\Omega\begin{pmatrix}\Sigma_p&0\\0&0\end{pmatrix}G^H=(Q_D,\widetilde{Q}_D)\begin{pmatrix}\Sigma_p&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}G_D^H\\\widetilde{G}_D^H\end{pmatrix}\\&=Q_D\Sigma_pG_D^H=(Q_D,0)\begin{pmatrix}\Sigma_pG_D^H\\R\end{pmatrix}=(Q_D,0)R_D,\end{aligned}$$

其中 $\Sigma_p=\operatorname{diag}(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_p)\in Q^{p\times p}$, $\sigma_1\geq\sigma_2\geq\cdots\geq\sigma_p$ 为 D 的正奇异值， $Q_D\in Q^{m\times p}$ 标准列正交， $\operatorname{rank}(\Sigma_pG_D^H)=p$, 则必存在矩阵 R 使得 $R_D=(G_D\Sigma_p,R^H)^H\in Q^{n\times n}$ 非奇异. 类似地， $B=(Q_B,0)R_B$, 其中 $Q_B\in Q^{m\times q}$ 标准列正交， $R_B\in Q^{k\times k}$ 非奇异. 令 $Q_1=(Q_D,\widehat{Q}_D)$, $Q_2=(Q_B,\widehat{Q}_B)$, 其中 Q_1,Q_2 是酉矩阵，$\widehat{Q}_D,\widehat{Q}_B$ 分别正交于 Q_D,Q_B . 这样 $Q_2^HQ_1$ 是一个 $m\times m$ 酉矩阵，由四元数矩阵的 C-S 分解 [25], 存在酉矩阵 $U_1\in Q^{q\times q},U_2\in Q^{(m-q)\times(m-q)},V_1\in Q^{p\times p},V_2\in Q^{(m-p)\times(m-p)}$ 使得

$$\begin{pmatrix}U_1^H&0\\0&U_2^H\end{pmatrix}Q_2^HQ_1\begin{pmatrix}V_1&0\\0&V_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}I_i&0&0&0_S^H&0&0\\0&\Gamma&0&0&S&0\\0&0&0_\Gamma&0&0&I\\0_S&0&0&I&0&0\\0&S&0&0&-\Gamma&0\\0&0&I&0&0&0_\Gamma^H\end{pmatrix}.$$

令 $U=\operatorname{diag}(U_1,U_2)$, 于是 $U^H(Q_B,\widehat{Q}_B)^HQ_DV_1=\Sigma_D$, 即 $U^HQ_2^HQ_DV_1=\Sigma_D$. 令 $Q=Q_2U$, 我们有

$$Q_D=Q_2U\Sigma_DV_1^H=Q\Sigma_DV_1^H,$$

$$\begin{aligned}Q_B&=Q_2\begin{pmatrix}I_q\\0\end{pmatrix}=Q_2UU^H\begin{pmatrix}I_q\\0\end{pmatrix}=Q\begin{pmatrix}U_1^H&0\\0&U_2^H\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I_q\\0\end{pmatrix}\\&=Q\begin{pmatrix}U_1^H\\0\end{pmatrix}=Q\begin{pmatrix}I_q\\0\end{pmatrix}U_1^H=Q\Sigma_BU_1^H.\end{aligned}$$

令 $M=\begin{pmatrix}V_1^H&0\\0&I\end{pmatrix}R_D$, $N=\begin{pmatrix}U_1^H&0\\0&I\end{pmatrix}R_B$, 我们有

$$D=(Q_D,0)R_D=(Q\Sigma_DV_1^H,0)R_D=Q(\Sigma_D,0)\begin{pmatrix}V_1^H&0\\0&I\end{pmatrix}R_D=Q(\Sigma_D,0)M,$$

$$B=(Q_B,0)R_B=(Q\Sigma_BU_1^H,0)R_B=Q(\Sigma_B,0)\begin{pmatrix}U_1^H&0\\0&I\end{pmatrix}R_B=Q(\Sigma_B,0)N.$$

证毕. ∎

3 问题 I 的解

引理 1 给定矩阵 $J \in Q^{n\times n}, S_A = \mathrm{diag}(a_1, a_2, \cdots, a_n) > 0, S_B = \mathrm{diag}(b_1, b_2, \cdots, b_n) > 0$, $a_i^2 + b_i^2 = 1, i = 1, 2, \cdots, n$. 考虑下面与未知矩阵 $S \in HQ^{n\times n}$ 有关的最小化问题:

$$\Phi = \|S_A S S_B - J\|^2 = \min. \tag{4}$$

则 S 可表示为

$$S = K \circ (S_A J S_B + S_B J^H S_A), \tag{5}$$

其中 $K = (k_{ij})_{n\times n}, k_{ij} = 1/(a_i^2 b_j^2 + b_i^2 a_j^2)$, $i, j = 1, 2, \cdots, n$.

证 对 $S = (S_{ij}) \in HQ^{n\times n}, J = (J_{ij}) \in Q^{n\times n}$, 记

$$S = S^{(0)} + S^{(1)} i + S^{(2)} j + S^{(3)} k, \quad J = J^{(0)} + J^{(1)} i + J^{(2)} j + J^{(3)} k,$$

$$S_{ij} = S_{ij}^{(0)} + S_{ij}^{(1)} i + S_{ij}^{(2)} j + S_{ij}^{(3)} k, \quad J_{ij} = J_{ij}^{(0)} + J_{ij}^{(1)} i + J_{ij}^{(2)} j + J_{ij}^{(3)} k.$$

显然, $S^{(0)} \in SR^{n\times n}, S^{(1)}, S^{(2)}, S^{(3)} \in ASR^{n\times n}$, 我们有

$$\Phi = \Phi_0 + \sum_{l=1}^{3} \Phi_l,$$

其中

$$\Phi_0 = \|S_A S^{(0)} S_B - J^{(0)}\|^2, \quad \Phi_l = \|S_A S^{(l)} S_B - J^{(l)}\|^2, \quad (l = 1, 2, 3). \tag{6}$$

在 (6) 中, Φ_0 是一个有 $\frac{n(n+1)}{2}$ 个变量 $S_{ij}^{(0)}$ $(1 \le i \le j \le n)$ 的连续可微函数. 根据一个函数在一点可微的必要条件, 我们可得

$$S_{ij}^{(0)} = \frac{a_i J_{ij}^{(0)} b_j + b_i J_{ji}^{(0)} a_j}{a_i^2 b_j^2 + a_j^2 b_i^2}.$$

于是可得

$$S^{(0)} = K \circ (S_A J^{(0)} S_B + S_B J^{(0)T} S_A). \tag{7}$$

类似地, 我们可得

$$S^{(l)} = K \circ (S_A J^{(l)} S_B - S_B J^{(l)T} S_A), \quad (l = 1, 2, 3). \tag{8}$$

(5) 可由 (7)–(8) 可得. 证毕. ∎

为了得到问题 I 的解, 我们需要四元数矩阵对 $(A^H, B)^H$ 的 GSVD-Q, 其中 $A \in Q^{n\times m}$, $B \in Q^{m\times k}$.

引理 2 [26] (GSVD-Q) 设 $A \in Q^{n\times m}, B \in Q^{m\times k}$, 则存在酉矩阵 $U \in Q^{n\times n}, V \in Q^{k\times k}$ 和非奇异矩阵 $P \in Q^{m\times m}$ 使得

$$A = U(\Pi_A, 0)P, \quad B^H = V(\Pi_B, 0)P, \tag{9}$$

其中

$$\Pi_A=\begin{pmatrix} I_r & 0 & 0\\ 0 & S_A & 0\\ 0 & 0 & 0_A\end{pmatrix}_{n\times l},\quad \Pi_B=\begin{pmatrix} 0_B & 0 & 0\\ 0 & S_B & 0\\ 0 & 0 & I_{l-r-g}\end{pmatrix}_{k\times l},$$

$$S_A=\mathrm{diag}(\alpha_{r+1},\alpha_{r+2},\cdots,\alpha_{r+g}),\quad 1>\alpha_{r+1}\geq\alpha_{r+2}\geq\cdots\geq\alpha_{r+g}>0,$$

$$S_B=\mathrm{diag}(\beta_{r+1},\beta_{r+2},\cdots,\beta_{r+g}),\quad 0<\beta_{r+1}\leq\beta_{r+2}\leq\cdots\leq\beta_{r+g}<1,$$

$$\alpha_i^2+\beta_i^2=1,\quad i=(r+1):(r+g).$$

$$l=\mathrm{rank}\begin{pmatrix} A\\ B^H\end{pmatrix},\quad r=\mathrm{rank}\begin{pmatrix} A\\ B^H\end{pmatrix}-\mathrm{rank}(B^H),$$

$$g=\mathrm{rank}(A)+\mathrm{rank}(B^H)-\mathrm{rank}\begin{pmatrix} A\\ B^H\end{pmatrix}.$$

利用引理 1 和 2, 类似文 [13] 中定理 3.1, 我们可得下面定理.

定理 2 设矩阵对 $(A^H,B)^H$ 的 GSVD-Q 如 (??) 所示，其中

$$PXP^H=\begin{array}{c} r\\ g\\ l-r-g\\ m-l\end{array}\begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} & X_{13} & X_{14}\\ X_{12}^H & X_{22} & X_{23} & X_{24}\\ X_{13}^H & X_{23}^H & X_{33} & X_{34}\\ X_{14}^H & X_{24}^H & X_{34}^H & X_{44}\end{pmatrix}, \tag{10}$$

其中 $X_{ii}^H=X_{ii}$ $(i=1,2,3,4)$. 将酉矩阵 U,V 分块为

$$U=(U_1,U_2,U_3),\quad V=(V_1,V_2,V_3),$$

其中

$$\begin{cases} U_1\in Q^{n\times r},\quad U_2\in Q^{n\times g},\quad U_3\in Q^{n\times(n-r-g)},\\ V_1\in Q^{k\times(k-l+r)},\quad V_2\in Q^{k\times g},\quad V_3\in Q^{k\times(l-r-g)}.\end{cases}$$

记

$$U^HCV=(C_{ij}),\quad C_{ij}=U_i^HCV_j,\quad i,j=1:3.$$

则问题 I 的解 X 可表示为

$$X=P^{-1}\begin{pmatrix} X_{11} & C_{12}S_B^{-1} & C_{13} & X_{14}\\ S_B^{-1}C_{12}^H & K\circ(S_AC_{22}S_B+S_BC_{22}^HS_A) & S_A^{-1}C_{23} & X_{24}\\ C_{13}^H & C_{23}^HS_A^{-1} & X_{33} & X_{34}\\ X_{14}^H & X_{24}^H & X_{34}^H & X_{44}\end{pmatrix}P^{-H}, \tag{11}$$

其中

$$K=(k_{ij})\in R^{g\times g},\quad k_{ij}=1/(\alpha_i^2\beta_j^2+\alpha_j^2\beta_i^2),\quad i,j=(r+1):(r+g),$$

X_{i4} $(i=1,2,3)$ 为任意的四元数矩阵， X_{11},X_{33},X_{44} 为任意的 Hermite 四元数矩阵.

4 问题 II 的解

引理 3 (投影定理) 设 X 是一个内积空间, M 为 X 的子空间, $M^{\perp}$ 为子空间 M 的正交补. 对给定的 $x\in X$, 如果对任意的 $m\in M$, 存在 $m_0\in M$ 使得 $\|x-m_0\|\le\|x-m\|$ 成立, 则 m_0 是唯一的且 $m_0\in M$ 为 M 中唯一的最小化向量当且仅当 $(x-m_0)\perp M$ 即 $(x-m_0)\in M^{\perp}$.

定理 3 给定矩阵 $A\in Q^{n\times m}, B\in Q^{m\times k}$, 和 $C\in Q^{n\times k}$. 令 X_0 为问题 I 的任一解, 定义

$$C_0=AX_0B.$$

则矩阵方程

$$AXB=C_0 \tag{12}$$

在矩阵集合 $HQ^{m\times m}$ 中是相容的, 且它的 Hermite 解集合与四元数矩阵方程 (1) 的最小二乘 Hermite 解集合相同.

证 设 $S=\{Z|Z=AXB, X\in HQ^{m\times m}\}$. 由于 X_0 是问题 I 的一个解, 我们可知 $C_0\in S$ 且

$$\|C_0-C\|=\|AX_0B-C\|=\min_{X\in HQ^{n\times n}}\|AXB-C\|=\min_{Z\in S}\|Z-C\|.$$

利用引理 3 有 $(C_0-C)\perp S$, 即 $(C_0-C)\in S^{\perp}$. 于是对任意 $X\in HQ^{m\times m}$ 有 $(AXB-C_0)\in S$. 则

$$\|AXB-C\|^2=\|AXB-C_0+(C_0-C)\|^2=\|AXB-C_0\|^2+\|C_0-C\|^2.$$

故定理的结论成立. 证毕. ∎

由定理 2 和 3, 我们知 (12) 中 C_0 可表示成

$$C_0=U\begin{pmatrix}0 & C_{12} & C_{13}\\ 0 & S_A(K\circ(S_AC_{22}S_B+S_BC_{22}^HS_A))S_B & C_{23}\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}V^H,$$

这里的记号如定理 2 所示. 显然 C_0 仅依赖于矩阵 A 、 B 、 C, 与四元数矩阵方程 (1) 最小二乘 Hermite 解 (X_0,Y_0) 的选择无关.

类似引理 1, 我们可得下面引理.

引理 4 设 $S_A=\mathrm{diag}(a_1,a_2,\cdots,a_n)>0$.

(1) 给定 $J\in Q^{n\times n}$, 考虑下面与未知矩阵 $S\in HQ^{n\times n}$ 有关的最小化问题

$$\Phi=2\|SS_A-J\|^2+\|S\|^2=\min,$$

则 S 可表示为

$$S=F\circ(JS_A+S_AJ^H), \tag{13}$$

其中 $F=(f_{ij})_{n\times n}, f_{ij}=1/(1+a_i^2+a_j^2)$, $i=1:n, j=1:n$.

(2) 给定 $J\in Q^{m\times n}$, 考虑下面与未知矩阵 $S\in Q^{m\times n}$ 有关的最小化问题

$$\Phi=\|SS_A-J\|^2+\|S\|^2=\min,$$

则 S 可表示为

$$S = G \circ (JS_A), \tag{14}$$

其中 $G = (g_{ij})_{m\times n}, g_{ij} = 1/(1 + a_j^2),\ i = 1 : m, j = 1 : n.$

定理 4 对 $A \in Q^{n\times m}, B \in Q^{m\times k}$, 设矩阵对 $[A^H, B]$ 的 CCD-Q 如 (3) 所示，即

$$A^H = Q(\Sigma_A, 0)M, \quad B = Q(\Sigma_B, 0)N, \tag{15}$$

其中 $Q, \Sigma_A, \Sigma_B, M, N$ 由 (3) 给出．令

$$Q^H XQ = \begin{array}{c} i \\ j \\ q-i-j \\ m-q-p+j \\ j \\ p-i-j \end{array} \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} & X_{13} & X_{14} & X_{15} & X_{16} \\ X_{12}^H & X_{22} & X_{23} & X_{24} & X_{25} & X_{26} \\ X_{13}^H & X_{23}^H & X_{33} & X_{34} & X_{35} & X_{36} \\ X_{14}^H & X_{24}^H & X_{34}^H & X_{44} & X_{45} & X_{46} \\ X_{15}^H & X_{25}^H & X_{35}^H & X_{45}^H & X_{55} & X_{56} \\ X_{16}^H & X_{26}^H & X_{36}^H & X_{46}^H & X_{56}^H & X_{66} \end{pmatrix}, \tag{16}$$

将 M^{-1}, N^{-1} 分块为 $M^{-1} = (M_1, M_2, M_3, M_4), \quad N^{-1} = (N_1, N_2, N_3, N_4)$, 其中

$$M_1 \in Q^{n\times i}, M_2 \in Q^{n\times j}, M_3 \in Q^{n\times(p-i-j)}, M_4 \in Q^{n\times(n-p)},$$

$$N_1 \in Q^{k\times i}, N_2 \in Q^{k\times j}, N_3 \in Q^{k\times(q-i-j)}, N_4 \in Q^{k\times(k-q)}.$$

记 $M^{-H}C_0N^{-1} = (\tilde{C}_{ij}), \tilde{C}_{ij} = M_i^{-H}C_0N_j^{-1}, (i, j = 1 : 4)$. 则问题 II 存在唯一解 $\widehat{X} \in S_L$ 且 $\widehat{X}$ 可表示为

$$\widehat{X} = Q \begin{pmatrix} \widetilde{C}_{11} & \widetilde{C}_{12} & \widetilde{C}_{13} & 0 & \widehat{X}_{15} & \widetilde{C}_{31}^H \\ \widetilde{C}_{12}^H & \widehat{X}_{22} & \widehat{X}_{23} & 0 & \widehat{X}_{25} & \widetilde{C}_{32}^H \\ \widetilde{C}_{13}^H & \widehat{X}_{23}^H & 0 & 0 & \widehat{X}_{35} & \widetilde{C}_{33}^H \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \widehat{X}_{15}^H & \widehat{X}_{25}^H & \widehat{X}_{35}^H & 0 & 0 & 0 \\ \widetilde{C}_{31} & \widetilde{C}_{32} & \widetilde{C}_{33} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} Q^H, \tag{17}$$

其中

$$\widehat{X}_{15} = (\widetilde{C}_{21}^H - \widetilde{C}_{12}\Gamma)S^{-1}, \quad \widehat{X}_{23} = \Gamma^{-1}(\widetilde{C}_{23} - S\widehat{X}_{35}^H), \quad \widehat{X}_{25} = (\widetilde{C}_{22}^H - \widehat{X}_{22}\Gamma)S^{-1},$$

$$\widehat{X}_{35} = (\widetilde{C}_{23}^H S), \quad \widehat{X}_{22} = F \circ (S^2\widetilde{C}_{22}^H\Gamma + \Gamma\widetilde{C}_{22}S^2),$$

$$F = (f_{st}), \quad f_{st} = 1/(\alpha_{i+t}^2\beta_{i+s}^2 + \beta_{i+t}^2), \quad s, t = 1 : j.$$

证 利用相容矩阵方程 (12), 结合 (15) 和 (16), 我们可得

$$X = Q \begin{pmatrix} \widetilde{C}_{11} & \widetilde{C}_{12} & \widetilde{C}_{13} & X_{14} & \widehat{X}_{15} & \widetilde{C}_{31}^H \\ \widetilde{C}_{12}^H & X_{22} & \widetilde{X}_{23} & X_{24} & \widetilde{X}_{25} & \widetilde{C}_{32}^H \\ \widetilde{C}_{13}^H & \widetilde{X}_{23}^H & X_{33} & X_{34} & X_{35} & \widetilde{C}_{33}^H \\ X_{14}^H & X_{24}^H & X_{34}^H & X_{44} & X_{45} & X_{46} \\ \widehat{X}_{15}^H & \widetilde{X}_{25}^H & X_{35}^H & X_{45}^H & X_{55} & X_{56} \\ \widetilde{C}_{31} & \widetilde{C}_{32} & \widetilde{C}_{33} & X_{46}^H & X_{56}^H & X_{66} \end{pmatrix} Q^H,$$

其中

$$\widetilde{X}_{25} = (\widetilde{C}_{22}^H - X_{22}\Gamma)S^{-1}, \quad \widetilde{X}_{23} = \Gamma^{-1}(\widetilde{C}_{23} - SX_{35}^H).$$

由四元数体上 Frobenius 范数的酉不变性有

$$\|X\| = \|Q^H XQ\| = \left\| \begin{pmatrix} \widetilde{C}_{11} & \widetilde{C}_{12} & \widetilde{C}_{13} & X_{14} & \widehat{X}_{15} & \widetilde{C}_{31}^H \\ \widetilde{C}_{12}^H & X_{22} & \widetilde{X}_{23} & X_{24} & \widetilde{X}_{25} & \widetilde{C}_{32}^H \\ \widetilde{C}_{13}^H & \widetilde{X}_{23}^H & X_{33} & X_{34} & X_{35} & \widetilde{C}_{33}^H \\ X_{14}^H & X_{24}^H & X_{34}^H & X_{44} & X_{45} & X_{46} \\ \widehat{X}_{15}^H & \widetilde{X}_{25}^H & X_{35}^H & X_{45}^H & X_{55} & X_{56} \\ \widetilde{C}_{31} & \widetilde{C}_{32} & \widetilde{C}_{33} & X_{46}^H & X_{56}^H & X_{66} \end{pmatrix} \right\|.$$

因此 $\|X\|^2 = \min, \forall X \in S_L$ 当且仅当

$$X_{14} = 0, X_{24} = 0, X_{33} = 0, X_{34} = 0, X_{44} = 0,$$

$$X_{45} = 0, X_{46} = 0, X_{55} = 0, X_{56} = 0, X_{66} = 0,$$

和

$$\begin{cases} 2\|X_{22}\Gamma S^{-1} - \widetilde{C}_{22}^H S^{-1}\|^2 + \|X_{22}\|^2 = \min, \\ \|X_{35}S\Gamma^{-1} - \widetilde{C}_{23}^H \Gamma^{-1}\|^2 + \|X_{35}\|^2 = \min. \end{cases} \tag{18}$$

利用引理 4, 矩阵方程 (**??**) 的解为

$$\widehat{X}_{22} = F \circ (S^2 \widetilde{C}_{22}^H \Gamma + \Gamma \widetilde{C}_{22} S^2), \quad \widehat{X}_{35} = (\widetilde{C}_{23}^H S).$$

证毕. ▌

利用 CCD-Q 和 GSVD-Q 可成功解决域上基于某个矩阵方程的特殊矩阵最小化问题，例如文 [3, 4, 5, 21]. 然而，就我们所知，还没有人同时利用这两种方法去解决体上基于某个四元数矩阵方程的特殊矩阵最小化问题. 本文在这一方面作了一个尝试.

参 考 文 献

[1] Zhang F Z. Quaternions and matrices of quaternions. Linear Algebra and its applications, 1997, **251**: 21–57

[2] Friswell M I, Mottorshead J E. Finite Element Model Updating in Structure Dynamics. Kluwer Academic Publishers, 1995

[3] Liao A P, Bai Z Z, Lei Y. Best approximate solution of matrix equation $AXB + CYD = E$. SIAM J Matrix Anal Appl, 2006, **27**: 675–688

[4] Lei Y, Liao A P, Zhang L. Minimization problem for symmetric orthogonal anti-symmetric matrices. Journal of Computational Mathematics, 2007, **25**: 211–220

[5] Liao A P, Lei Y, Yuan S F. The matrix nearness problem for symmetric matrices associated with the matrix equation $[A^TXA, B^TXB] = [C, D]$. Linear Algebra and its applications, 2006, **418**: 939–954

[6] Liao A P, Bai Z Z. The Constrained Solutions of Two Matrix Equations. Acta Mathematica Sinica, 2002, **18**: 671–678

[7] Xie D X. Least-squares solutions of $X^TAX = B$ over positive semidefinite matrices. J Comput Math, 2003, **21**: 167–174

[8] Dai H, Lancaster P. Linear matrix equation explicit solutions from an inverse problem of vibration theory. Linear Algebra and its applications, 1996, **246**: 31–47
[9] Chang X W, Wang J S. The symmetric solution of the matrix equations $AX+YA=C$, $AXA^T+BYB^T=C$, and $(A^TXA, B^TXB)=(C,D)$. Linear Algebra and its applications, 1993, **179**: 171–189
[10] Dai H. On the symmetric solutions of linear matrix equations. Linear Algebra Appl, 1990, **131**: 1–7
[11] Chu K E. Symmetric solutions of linear matrix equations by matrix decompositions. Linear Algebra Appl, 1989, **119**: 35–50
[12] 王嘉松，常晓文．一类矩阵方程的对称解．南京大学学报：数学半年刊， 1990, **7**(2): 125–129
[13] Xu G P, Wei M S, Zheng D S. On solutions of matrix equation $AXB+CYD=F$. Linear Algebra Appl, 1998, **279**: 93–109
[14] 胡端平．矩阵方程 $X+AXB=C$ 与线性流形上的矩阵最佳逼近．数学物理学报， 1999, **19**(4): 467–471
[15] Shim S Y, Chen Y. Least squares solution of matrix equation $AXB^*+CYD^*=E$. SIAM J Matrix Anal Appl, 2003, **24**(3): 802–808
[16] Özgüler A B. The equation $AXB+CYD=E$ over a principle ideal domain. SIAM J Matrix Anal Appl, 1991, **12**(3): 581–591
[17] Huang L P, Liu J Z. The extension of Roth's theorem for matrix equations over a ring. Linear Algebra Appl, 1997, **259**: 229–235
[18] Wang Q W. Bisymmetric and centrosymmetric solutions to system of real quaternion matrix equation. Computers Math Applic, 2005, **49**: 641–650
[19] Wang Q W. The general solution to a system of real quaternion matrix equations. Computers Math Applic, 2005, **49**: 665–675
[20] 姜同松，魏木生．四元数矩阵的实表示与四元数矩阵方程．数学物理学报， 2006, **26 A**(4): 578–584
[21] Liao A P, Lei Y. Optimal approximate solution of the matrix equation $AXB=C$ over symmetric matrices. J Comput Math, 2007, **25**: 543–552
[22] Peng Y X, Hu X Y, Zhang L. An iteration method for the symmetric solutions and the optimal approximation solution of the matrix equation $AXB=C$. Applied Mathematics and Computation, 2005, **160**: 763–777
[23] Peng Z Y. An iteration method for the least squares symmetric solution of the linear matrix equation $AXB=C$. Applied Mathematics and Computation, 2005, **170**: 711–723
[24] Lei Y, Liao A P. A minimal residual algorithm for the inconsistent matrix equation $AXB=C$ over symmetric matrices. Applied Mathematics and Computation, 2007, **188**: 499–513
[25] 刘永辉，姜同松，魏木生．四元数矩阵的奇异值分解及其应用．高等学校计算数学学报， 2003, **25**(4): 321–328
[26] Jiang T S, Wei M S. Equality constrained least squares problem over quaternion field. Applied Mathematics Letters, 2003, **16**: 883–888

Minimization Problem for Hermitian Matrices over the Quaternion Field

[1,2]Yuan Shifang [2]Liao Anping [2]Lei Yuan
([1] *Department of Mathematics and Physics, Wuyi University, Jiangmen 529020;*
[2] *College of Mathematics and Econometrics, Hunan University, Changsha 410082*)

Abstract: In this paper, the canonical correlation decomposition of quaternion matrices (CCD-Q) is established. Based on the CCD-Q, GSVD-Q, and the projection theorem in the finite dimensional inner product space, the expression of minimization problem for Hermitian matrices associated with the quaternion matrix equation $AXB=C$ is derived.

Key words: Quaternion matrix equation; minimization problem; CCD-Q; GSVD-Q.
MR(2000) Subject Classification: 65F05; 65H10; 15A33