2005,**25A**(6):753－762

Acta Mathematica Scientia
数学物理学报

# 快变振荡下的同宿轨道分支*

刘兴波　朱德明

(华东师范大学数学系　上海 200062)

**摘要**:该文研究带有角变量的快变振荡系统的同宿轨道分支问题,通过建立完整的 *Poincaré* 映射,讨论其同宿轨道在小扰动下的保存性, 并进一步研究其分支出周期轨道的情况,推广和改进了一些文献的结果.

**关键词**:快变振荡系统;局部坐标系;同宿轨道;*Poincaré* 映射;分支。

**MR(2000)主题分类**:34C23;34C37;37C29　　**中图分类号**:O175.12　　**文献标识码**:A

**文章编号**:1003-3998(2005)06-753-10

## 1　引言

本文考虑带有角变量的快变振荡系统

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= f(x,I)+\varepsilon g^{x}(x,I,\theta,\lambda),\\
\dot{I} &= \varepsilon g^{I}(x,I,\theta,\lambda),\\
\dot{\theta} &= \Omega(I)+\varepsilon g^{\theta}(x,I,\theta,\lambda).
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

其中$(x,I,\theta)\in R^{n}\times R^{m}\times T^{l}$, $\lambda\in R^{k}$, $0<\varepsilon\ll 1$, $|\lambda|\ll 1$. 关于系统(1.1)的分支情况,文献[1－4]利用不变流形理论及推广的 Melnikov 函数, 对可积或近可积 Hamilton 系统的同宿轨道在小扰动下的保存性进行了讨论. 本文利用一种有别于上面提及的方法,对较一般的系统(1.1)讨论了同样的问题, 并进一步讨论了分支周期轨道的情况.

由于研究奇异环分支周期轨道的最基本的方法是构造 Poincaré 映射, 因此我们首先把系统限制在 $x-I$ 空间进行讨论,在未扰系统的同宿轨道邻域引入局部坐标系,导出限制在相应的子空间上的 Poincaré 映射,这种方法最初发展于文[5,6],并被文[7]推广用于研究奇摄动系统的同宿轨道分支问题. 在此基础上我们进而建立系统在整个 $x-I-\theta$ 空间的完全的 Poincaré 映射,讨论较一般的系统(1.1)的同宿轨道的保存性及分支出周期轨道的情况. 本文其余各节安排如下:第二节利用不变流形理论,从几何意义上描述了扰动与未扰动系统的空间结构;在第三节中首先把系统限制在 $x-I$ 空间考虑,通过引入变分方程适当的基本解,在未扰系统的同宿轨道邻域建立局部坐标系,导出相应的 Poincaré 映射,进而导出系统(1.1)在整个 $x-I-\theta$ 空间的 Poincaré 映射;第四节主要通过约简 Poincaré 映射,导出用于讨论系统同宿轨道分支的分支方程,得到关于同宿轨道分支问题的相应结果.

---

收稿日期:2003-11-02; 修订日期:2004-10-15

E-mail: xbliu@math.ecnu.edu.cn

* 基金项目:国家自然科学基金(10371040)和上海市重点学科建设项目资助

## 2 不变流形理论及系统的动力学性态

本节主要利用不变流形理论，把扰动与未扰动系统的空间几何结构进行分解，并从几何意义上详细描述了系统的动力学性态.

考虑 $C^r(r\geqslant 3)$系统

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x,I)+\varepsilon g^x(x,I,\theta,\lambda),\\ \dot{I} &= \varepsilon g^I(x,I,\theta,\lambda),\\ \dot{\theta} &= \Omega(I)+\varepsilon g^\theta(x,I,\theta,\lambda),\end{aligned}\tag{2.1}$$

其中$(x,I,\theta)\in R^n\times R^m\times T^l$，$\lambda\in R^k$，$k\geqslant l+1$，$0<\varepsilon\ll 1$，$|\lambda|\ll 1$.

当 $\varepsilon=0$ 时,其未扰系统为

$$\dot{x}=f(x,I),\ \dot{I}=0,\ \dot{\theta}=\Omega(I).\tag{2.2}$$

我们作下述假设

$(\mathrm{H}_1)$ 存在 $I_0\in R^m$,使得未扰系统 $\dot{x}=f(x,I)$有一双曲奇点 $x_0=x(I_0)$和一条同宿轨道 $\Gamma:\gamma(t)$，$\gamma(\pm\infty)=x_0$，$x_0$ 的不稳定流形 $W^u$ 与稳定流形 $W^s$ 分别是$n_1$ 维与 $n_2$ 维$(n_1+n_2=n)$，$Df_x(x_0,I_0)$在奇点 $x_0$ 处有单实特征根 $\lambda_1$，$-\lambda_2$，其它特征根满足 $\mathrm{Re}\lambda>a>\lambda_1>0$，或 $\mathrm{Re}\lambda<-b<-\lambda_2<0$，其中 $a$，$b$ 为某两个常数,且对$\forall\, p\in\gamma(t)$，

$$\dim(W^u\cap W^s)=\dim(T_pW^u\cap T_pW^s)=1.$$

由上述假设知,此时系统(2.2)有一个 $l$ 维不变环面

$$M=\{(x,I,\theta)\mid x=x_0,\ I=I_0,\ \theta\in T^l\}$$

和一个同宿流形

$$\widetilde{\Gamma}_0=\{(x,I,\theta)\mid x=\gamma(t,I_0),I=I_0,\theta=\theta_0+\theta_1(t),\theta_0\in T^l,\ t\in R\},$$

其中 $\theta_1(t)=\Omega(I_0)t$，且当 $t\to\pm\infty$时，$\widetilde{\Gamma}_0\to M$.

$(\mathrm{H}_2)$ $\mathrm{Span}\{T_{\gamma(t)}W^u,T_{\gamma(t)}W^s,e^-\}=R^n$，$t\geqslant T\gg 1$，

$\mathrm{Span}\{T_{\gamma(t)}W^u,T_{\gamma(t)}W^s,e^+\}=R^n$，$t\leqslant -T\ll -1$，

其中 $e^\pm=\lim\limits_{t\to\pm\infty}\dot{\gamma}(t)/|\dot{\gamma}(t)|$，$e^+\in T_{x_0}W^s$，$e^-\in T_{x_0}W^u$ 是分别对应于$-\lambda_2$，$\lambda_1$ 的单位特征向量.

假设$(\mathrm{H}_2)$等价于下述所谓的强倾斜性质

$$\begin{aligned}T_{\gamma(t)}W^u &\to T_{x_0}W^{uu}\oplus e^+, &\quad t\to+\infty,\\ T_{\gamma(t)}W^s &\to T_{x_0}W^{ss}\oplus e^-, &\quad t\to-\infty.\end{aligned}$$

为了对扰动系统(2.1)的几何结构有个更全面的认识,我们先把系统(2.1)限制在 $x-I$ 空间来考虑,讨论它在 $x-I$ 空间的性态,此时 $\theta$ 可看作参数.

作变换 $x\to x+x_0$，$I\to I+I_0$，

此时系统(2.1)可改写为下面的时变系统

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x,I)+\varepsilon g^x(x,I,\theta,\lambda)=H(x,I,\theta,\lambda,\varepsilon),\\ \dot{I} &= \varepsilon g^I(x,I,\theta,\lambda).\end{aligned}\tag{2.3}$$

满足 $f(0,0)=0$. 对系统(2.3)作进一步假设

$(\mathrm{H}_3)$ $g^x(0,0,\theta,\lambda)=0$,$g^I(x,I,\theta,\lambda)=g_1^I(x,I)+g_2^I(x,I,\theta,\lambda)$，

且满足

$$g_1^I(0,0)=0,\ \mathrm{Re}(\sigma(D_I g_1^I(0,0)))\neq 0,\ g_2^I(0,0,\theta,\lambda)=0.$$

由于 $\varepsilon$ 为充分小的参数，故系统(2.3)有一局部 $C^r$ 中心积分流形

$$W_{\mathrm{loc}}^c : X = X^c(I,\theta,\lambda,\varepsilon),$$

满足 $X^c(0,0,0,0)=0$，$X_I^c(0,0,0,0)=-H_x^{-1}(0,0,0,0,0)H_I(0,0,0,0,0)$.

由上述假设，我们可将 $I$ 空间进行分解，不妨设 $I=(I_1,I_2)\in R^{m_1}\times R^{m_2}$，$m_1+m_2=m$，$g^I=(g_1,g_2)$，$D_I g_1^I(0,0)=\mathrm{diag}(C_1,-C_2)$，其中 $\mathrm{Re}(\sigma(C_1))>0$，$\mathrm{Re}(\sigma(-C_2))<0$. 此时系统(2.3)的第二个方程可分解成

$$\begin{aligned}\dot I_1 &= \varepsilon g_{11}(x,I)+\varepsilon g_{12}(x,I,\theta,\lambda),\\ \dot I_2 &= \varepsilon g_{21}(x,I)+\varepsilon g_{22}(x,I,\theta,\lambda).\end{aligned}\tag{2.4}$$

当 $\varepsilon=0$ 时,系统 (2.3) 的未扰系统为

$$\dot x = f(x,I),\quad \dot I = 0.\tag{2.5}$$

依据不变流形理论,存在一 $C^r$变换,在原点某小邻域 $U_0$ 中，把系统(2.5)的稳定流形 $W^s$，不稳定流形 $W^u$，强稳定流形 $W^{ss}$，强不稳定流形 $W^{uu}$ 拉直,由假设($\mathrm{H}_3$) 及前面的讨论知，也可引进适当的 $C^r$ 坐标变换把局部中心流形拉直，即在 $I$ 空间，分别把 $\dot I_1=g_{11}$ 和 $\dot I_2=g_{21}$ 的稳定流形与不稳定流形在邻域 $U_0$ 中局部拉直. 此时(2.3)式可化为如下 $C^{r-1}$ 系统

$$\begin{aligned}&\dot x_1 = f_{11}(x,y,I,\theta,\lambda,\varepsilon),\quad \dot y_1 = f_{21}(x,y,I,\theta,\lambda,\varepsilon),\\ &\dot x_2 = f_{12}(x,y,I,\theta,\lambda,\varepsilon),\quad \dot y_2 = f_{22}(x,y,I,\theta,\lambda,\varepsilon),\\ &\dot I_1 = \varepsilon g_1(x,y,I,\theta,\lambda,\varepsilon),\quad \dot I_2 = \varepsilon g_2(x,y,I,\theta,\lambda,\varepsilon).\end{aligned}\tag{2.6}$$

由于上述变换只能把系统 (2.3) 的自治系统部分拉直，而不能把包含参数 $\theta$ 的非自治部分拉直，因此在 $U_0$ 内系统 (2.6) 具有下列形式

$$\begin{aligned}\dot x_1 &= [\lambda_1+\cdots]x_1+O(|y|)\cdot O(|x_2|)+\varepsilon g_1^x(z,\theta,\lambda),\\ \dot y_1 &= [-\lambda_2+\cdots]y_1+O(|x|)\cdot O(|y_2|)+\varepsilon g_2^x(z,\theta,\lambda),\\ \dot x_2 &= [A_2+\cdots]x_2+(O(|y|))x_1+O(x_1^2)+\varepsilon g_3^x(z,\theta,\lambda),\\ \dot y_2 &= [-B_2+\cdots]y_2+(O(|x|))y_1+O(y_1^2)+\varepsilon g_4^x(z,\theta,\lambda),\\ \dot I_1 &= \varepsilon[(C_1+\cdots)I_1+(O(|x|)+O(|y|))\cdot O(|I_2|)]+\varepsilon g_5^I,\\ \dot I_2 &= \varepsilon[(-C_2+\cdots)I_2+(O(|x|)+O(|y|))\cdot O(|I_1|)]+\varepsilon g_6^I,\end{aligned}\tag{2.7}$$

其中 $\mathrm{Re}(\sigma(A_2))>\lambda_3$，$\mathrm{Re}(\sigma(-B_2))<-\lambda_4$，$z=(x,y,I)$，且由假设($\mathrm{H}_4$)知 $g_i^x=O(z)$，$g_j^I=O(z)$，$i=1,2,3,4$，$j=5,6$.

## 3 Poincaré 映射

本节将利用系统(2.1)所确定的解,在未扰系统(2.2)的同宿轨道 $\widetilde\Gamma_0$ 邻域定义系统的 Poincaré 映射,来讨论 $\widetilde\Gamma_0$ 在小参数扰动下是否保存及是否分支出周期轨道的情况. 不妨设我们在 $\widetilde\Gamma_0$ 的管状邻域内已选定适当的横截面 $\Sigma$,而由系统(2.1)所确定的解为$(x_\varepsilon(t),I_\varepsilon(t),\theta_\varepsilon(t))$,则沿 $\widetilde\Gamma_0$ 的 Poincaré 映射为

$$P_\varepsilon:\Sigma\to\Sigma,$$
$$(x_\varepsilon(0),I_\varepsilon(0),\theta_\varepsilon(0))\to(x_\varepsilon(T_1),I_\varepsilon(T_1),\theta_\varepsilon(T_1)),$$

其中 $T_1$ 为首次回归时间,它依赖于 $\Sigma$ 上的初始点。为了能利用 $P_\varepsilon$ 来讨论扰动系统的分支

问题,我们需要先确定系统(2.1)的解$(x_\varepsilon(t), I_\varepsilon(t), \theta_\varepsilon(t))$的具体表达式。由于解的$x-I$分量在奇点邻域的奇异性,我们将分两步来导出$P_\varepsilon$的渐近表达式。首先我们将系统限制在$x-I$空间,导出$P_\varepsilon$的$x-I$分量的渐近表达式,然后在$x-I-\theta$空间建立$P_\varepsilon$的完整表达式。

### 3.1 $P_\varepsilon$ 的 $x-I$ 分量的渐近表达式

要导出$P_\varepsilon$的$x-I$分量的渐近表达式,等价的,我们只需讨论系统(2.6)的解在$\Gamma$邻域定义的 Poincaré 映射即可,因此本节我们将主要研究系统(2.6)的解的动态性质,来导出其在$\Gamma$邻域所定义的 Poincaré 映射的渐近表达式。

为简便计,记 $\widetilde{f}=(f_{11}, f_{21}, f_{12}, f_{22})$, $g^I=(g_1, g_2)$。令

$$r(t) = (\gamma(t), 0) = (x_1(t), y_1(t), x_2(t), y_2(t), 0),$$

此处 0 代表 $I$ 方向坐标. 下面我们在$\Gamma$邻域选取适当坐标系,建立关于系统(2.6)的 Poincaré 映射. $T$ 取充分大, 使 $r(\pm T)\in U_0$, $x_1(-T)=\delta>0$, $y_1(T)=\delta>0$, 其中$\delta$充分小,满足$\{(x,y,I):|x|,|y|,|I|<\frac{3\delta}{2}\}\subset U_0$.

定义 $$A(t) = \left(\frac{\partial\ \widetilde{f}}{\partial(x,y,I)}(r(t),0),\ \varepsilon\frac{\partial g^I}{\partial(x,y,I)}(r(t),0)\right)^*\Big|_{\varepsilon=0}.$$

考虑(2.6)式的线性变分方程

$$\dot{U} = A(t)U \tag{3.1}$$

及其伴随方程

$$\dot{U} = -A^*(t)U. \tag{3.2}$$

其中"$*$"表示转置. 选取(3.1)式的一个基解矩阵 $U(t)=(u_1(t), u_2(t), \cdots, u_6(t))$ 满足

$$u_1(t) \in (T_{r(t)}W^u + T_{r(t)}W^s)^c \cap (T_{r(t)}W^c_{\rm loc})^c,$$

$$u_2(t) = -\frac{\dot{r}(t)}{|\dot{r}(T)|} \in T_{r(t)}W^u \cap T_{r(t)}W^s,$$

$$u_3(t) \in T_{r(t)}W^u,\ u_4(t) \in T_{r(t)}W^s,$$

$$u_5(t), u_6(t) \in T_{r(t)}W^c_{\rm loc}.$$

注意到当 $\varepsilon=0$ 时, $\dot{I}\equiv 0$, 故类似于[7],可证得

**引理 3.1** 可适当选取 $u_1(t)$, $u_2(t)$, $\cdots$, $u_6(t)$ 以及 $u_{13}(t)$, 使得

$$U(T) = \begin{pmatrix} u_{11} & 0 & u_{31} & 0 & u_{51} & 0 \\ u_{12} & 1 & u_{32} & 0 & u_{52} & 0 \\ 0 & 0 & u_{33} & 0 & u_{53} & 0 \\ u_{14} & u_{24} & u_{34} & Id & u_{54} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Id & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Id \end{pmatrix},$$

$$U(-T) = \begin{pmatrix} 0 & u_{21} & 0 & u_{41} & 0 & u_{61} \\ 1 & 0 & 0 & u_{42} & 0 & u_{62} \\ u_{13} & u_{23} & Id & u_{43} & 0 & u_{63} \\ 0 & 0 & 0 & u_{44} & 0 & u_{64} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Id & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Id \end{pmatrix}.$$

其中 $u_{21}<0$，$\det u_{ii}\neq 0$，且当 $T\gg 1, j\neq i$ 时，$|u_{ij}u_{ii}^{-1}|\ll 1$，$|u_{24}|\ll 1$.

令 $\Psi(t)=(\psi_1^*,\cdots,\psi_6^*)=U^{-1*}(t)$，则 $\Psi(t)$ 是系统(3.2)的基解矩阵，由于 $\Psi(t)U(t)=Id$，由 $T_{r(t)}W^u+T_{r(t)}W^s$ 及 $T_{r(t)}W^c$ 的不变性易知，对 $\forall\, 0\leqslant\mu<\min\{\lambda_1,\lambda_2\}$，满足

$$\exp(\mu\mid t\mid)\psi_1(t)\in(T_{r(t)}W^u+T_{r(t)}W^s)^c\cap(T_{r(t)}W^c_{\rm loc})^c\to 0,\quad t\to\pm\infty,$$

表 $\tilde{\psi}_i$ 为 $\psi_i$ 的 $x-y$ 空间分量，$i=1,3,4$，并记

$$v_i(t)=u_i(t),\quad i=1,2,3,4,$$
$$v_5(t)=(0,0,0,0,I_{m_1\times m_1},0),$$
$$v_6(t)=(0,0,0,0,0,I_{m_2\times m_2}).$$

因此我们可选取 $Z(t)=(v_1,-\dot{r}/|\dot{r}(T)|,v_3,v_4,v_5,v_6)$ 作为 $\Gamma$ 邻域的坐标系. 下面将在此坐标系下建立关于系统(2.6)在 $\Gamma$ 邻域的 Poincaré 映射. 定义

$$s(t)=r(t)+\sum_{i\neq 2}v_i(t)l_i,\tag{3.3}$$

取 $S_0=\{(x,y,I)=s(T):|l_i|<\delta\}$，$S_1=\{(x,y,I)=s(-T):|l_i|<\delta\}$. 易见 $S_0$ 和 $S_1$ 分别为系统(2.6)在 $r(T)$ 和 $r(-T)$ 处的 Poincaré 截面. 取 $\delta$ 充分小，使得 $S_0$，$S_1\subset U_0$.

下面首先利用系统(2.6)的轨道在 $\Gamma$ 的管状邻域建立从 $S_1$ 到 $S_0$ 的正则映射 $F_1$，其次利用系统(2.7)的轨道在原点邻域建立从 $S_0$ 到 $S_1$ 的奇异映射 $F_2$，然后进行复合得到 Poincaré 映射 $F=F_1\circ F_2:S_0\to S_0$.

3.1.1 建立正则映射 $F_1$

作坐标变换

$$(x_1,y_1,x_2,y_2,I_1,I_2)^*=s(t),\quad t\in[-T,T],$$

将其代入(2.6)式得到

$$(\dot{r}(t)+\sum_{i\neq 2}\dot{v}_i(t)l_i)+\sum_{i\neq 2}v_i(t)\,\dot{l}_i$$
$$=\dot{r}(t)+A(t)\sum_{i\neq 2}v_i(t)l_i+\varepsilon(\widetilde{f}_\varepsilon(r(t),\hat{\alpha},0),g^I(r(t),\hat{\alpha},0))^*+O(2).$$

其中 $i=1,3,4$，$\tilde{v}_i$ 是 $v_i$ 在$(x_1,y_1,x_2,y_2)$空间的限制. $\hat{\alpha}=(\theta,\lambda)$，$\theta=\theta_0+\theta_1(t)$，$\widetilde{I}=(l_5,l_6)^*$. 上式两边同乘以 $\psi_1^*$，$\psi_3^*$，$\psi_4^*$ 得

$$\dot{l}_i=\tilde{\psi}_i^*[\widetilde{f}_I\,\widetilde{I}+\varepsilon\,\widetilde{f}_\varepsilon(r(t),\hat{\alpha},0)]+O(2),$$
$$\dot{\widetilde{I}}=\varepsilon g^I(r(t),\hat{\alpha},0)+O(2),\tag{3.4}$$

对(3.4)式两边进行积分得

$$l_1(t)=l_1(-T)+\varepsilon\int_{-T}^t\tilde{\psi}_1^*[\widetilde{f}_I\,\widetilde{I}(s,T,\hat{\alpha})+\widetilde{f}_\varepsilon(r(s),\hat{\alpha},0)]\mathrm{d}s+\text{h.o.t.},$$

$$l_3(t)=l_3(-T)+\varepsilon\int_{-T}^t\tilde{\psi}_3^*[\widetilde{f}_I\,\widetilde{I}(s,T,\hat{\alpha})+\widetilde{f}_\varepsilon(r(s),\hat{\alpha},0)]\mathrm{d}s+\text{h.o.t.},$$

$$l_4(t)=l_4(-T)+\varepsilon\int_{-T}^t\tilde{\psi}_4^*[\widetilde{f}_I\,\widetilde{I}(s,T,\hat{\alpha})+\widetilde{f}_\varepsilon(r(s),\hat{\alpha},0)]\mathrm{d}s+\text{h.o.t.},$$

$$l_5(t)=l_5(-T)+\varepsilon\int_{-T}^t g_1(r(s),\hat{\alpha},0)\mathrm{d}s+\text{h.o.t.},$$

$$l_6(t)=l_6(-T)+\varepsilon\int_{-T}^t g_2(r(s),\hat{\alpha},0)\mathrm{d}s+\text{h.o.t.},$$

其中 $\widetilde{I}(t,T,\hat{\alpha})=\int_{-T}^t g^I(r(s),\hat{\alpha},0)\mathrm{d}s$，高阶项 h. o. t. 中含有 $O(\varepsilon^2)$，$O(l_i^2(-T))$，$O(\varepsilon l_i(-$

$T$))项等.

记

$$M_i(T,\alpha)=\int_{-T}^{T}\tilde{\psi}_i^*[\widetilde{f}_I\widetilde{I}(t,T,\hat{\alpha})+\widetilde{f}_\varepsilon(r(t),\hat{\alpha},0)]\mathrm{d}t,i=1,3,4,$$

$$M_5(T,\alpha)=\int_{-T}^{T}g_1(r(t),\hat{\alpha},0)\mathrm{d}t,\quad M_6(T,\alpha)=\int_{-T}^{T}g_2(r(t),\hat{\alpha},0)\mathrm{d}t,$$

其中 $\alpha=(\theta_0,\lambda)$. 由前面假设及(2.7)式易证

**引理 3.2** 当(2.7)式成立时,有

$$M_1(T,\alpha)=\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{\psi}_1^*[\widetilde{f}_I\widetilde{I}(t,T,\hat{\alpha})+\widetilde{f}_\varepsilon(r(t),\hat{\alpha},0)]\mathrm{d}t\equiv M_1(\alpha),$$

$$\widetilde{I}(t,T,\alpha)=\int_{-T}^{t}g^I(r(t),\hat{\alpha},0)\mathrm{d}t\equiv\int_{-\infty}^{t}g^I(r(t),\hat{\alpha},0)\mathrm{d}t,$$

$$M_5(T,\alpha)=\int_{-\infty}^{+\infty}g_1(r(t),\hat{\alpha},0)\mathrm{d}t\equiv M_5(\alpha),$$

$$M_6(T,\alpha)=\int_{-\infty}^{+\infty}g_2(r(t),\hat{\alpha},0)\mathrm{d}t\equiv M_6(\alpha).$$

**证** 显见只需证明当 $|t|\geqslant T$ 时, $\tilde{\psi}_1^*(t)\widetilde{f}_j(t)\equiv 0$, $j=I,\varepsilon$, 以及 $g^I(t)=(g_1(t),g_2(t))\equiv 0$ 即可,其中 $\widetilde{f}_j(t)=\widetilde{f}_j(r(t),\hat{\alpha},0)$, $(g_1(t),g_2(t))=(g_1(r(t),\hat{\alpha},0),g_2(r(t),\hat{\alpha},0))$. 由(2.7)式我们可直接推出,当 $t\geqslant T$ 时,

$$r(t)=(0,y_1(t),0,y_2(t),0,0)^*,$$

$$g^I(t)=(g_1(t),g_2(t))\equiv 0,$$

$$\widetilde{f}_j=(0,\frac{\partial f_{21}}{\partial j}(r,\hat{\alpha},0),0,\frac{\partial f_{22}}{\partial j}(r,\hat{\alpha},0))^*.$$

而由 $\psi_i^*(T)v_2(T)=0$,可得 $\psi_{i2}(T)=0$, 其中 $i\neq 2$, 类似地,由 $\Psi(t)$的定义可得 $\psi_{i4}(T)=0$, $i=1,3$. 最后由(2.7)和(3.2)式得到, 当 $t\geqslant T$ 时,

$$\dot{\psi}_{12}=(\lambda_2+\mathrm{h.o.t.})\psi_{12},\dot{\psi}_{14}=O(\delta)\psi_{12}+(B_2+\mathrm{h.o.t.})\psi_{14}.$$

由解关于初值的唯一性推知

$$\psi_{12}(t)=0,\quad \psi_{14}(t)=0,\ t\geqslant T.$$

这就证得

$$\tilde{\psi}_1^*(t)f_j(t)\equiv 0,\quad t\geqslant T,\ j=I,\varepsilon.$$

对于 $t\leqslant -T$ 的情况, 我们可类似讨论. ▌

于是正则映射 $F_1:S_1\to S_0$,

$$q_1(l_1(-T),l_3(-T),l_4(-T),l_5(-T),l_6(-T))\to q_2(l_1(T),l_3(T),l_4(T),l_5(T),l_6(T))$$

可表示为

$$\begin{aligned}l_1(T)&=l_1(-T)+\varepsilon M_1(T,\alpha)+\mathrm{h.o.t.},\\ l_3(T)&=l_3(-T)+\varepsilon M_3(T,\alpha)+\mathrm{h.o.t.},\\ l_4(T)&=l_4(-T)+\varepsilon M_4(T,\alpha)+\mathrm{h.o.t.},\\ l_5(T)&=l_5(-T)+\varepsilon M_5(T,\alpha)+\mathrm{h.o.t.},\\ l_6(T)&=l_6(-T)+\varepsilon M_6(T,\alpha)+\mathrm{h.o.t.}.\end{aligned}\tag{3.5}$$

我们称 $(M_1(T,\alpha), M_3(T,\alpha), M_4(T,\alpha), M_5(T,\alpha), M_6(T,\alpha))$为 Melnikov 向量函数.

3.1.2 建立奇异映射 $F_2$

现在我们利用(2.7)式导出由系统的流在 $U$ 邻域所诱导的映射

$$F_2:S_0\to S_1,$$

$$q_0(x_{10},y_{10},x_{20},y_{20},I_{10},I_{20}) \to q_1(x_{11},y_{11},x_{21},y_{21},I_{11},I_{21}).$$

由于奇异映射 $F_2$ 在 $S_0$ 上的$(x,y_2,I)^*=0$ 处无定义，而且无法连续可微地延拓，从而无法应用隐函数定理. 为此我们将引入 Silnikov 变量来解决这一问题. 假定 $\lambda_1<\lambda_2$. 令 $\tau(\rho)$为系统(2.6)的轨线 $\rho$ 从截面 $S_0$ 到 $S_1$ 的转移时间. 由常数变易公式易知，$\rho(t)=(x_1,y_1,x_2,y_2,I_1,I_2)(t)$满足下列等式

$$\begin{aligned}
x_1(t) &= e^{\lambda_1(\varepsilon)(t-T-\tau)}\left[x_{11}+\varepsilon\int_{T+\tau}^{t} e^{\lambda_1(-s+T+\tau)} g_1^x ds\right]+\text{h.o.t.},\\
y_1(t) &= e^{-\lambda_2(\varepsilon)(t-T)}\left[y_{10}+\varepsilon\int_{T}^{t} e^{\lambda_2(s-T)} g_2^x ds\right]+\text{h.o.t.},\\
x_2(t) &= e^{A_2(\varepsilon)(t-T-\tau)}x_{21}+\hat{x}_2(t)+O(\varepsilon)+\text{h.o.t.},\\
y_2(t) &= e^{-B_2(\varepsilon)(t-T)}y_{20}+\hat{y}_2(t)+O(\varepsilon)+\text{h.o.t.},\\
I_1(t) &= e^{\varepsilon C_1(t-T-\tau)}I_{11}+\text{h.o.t.},\\
I_2(t) &= e^{-\varepsilon C_2(t-T)}I_{20}+\text{h.o.t.},
\end{aligned}$$

其中 $$T\leqslant t\leqslant T+\tau,$$

$$g_1^x=[O(y_1)+O(y_2)+O(I)],\quad g_2^x=[O(x_1)+O(x_2)+O(I)],$$
$$\hat{x}_2(t)=e^{\lambda_1(t-T-\tau)}x_{11}\cdot O(|y_0|),\quad \hat{y}_2(t)=e^{-\lambda_2(t-T)}y_{10}\cdot O(|x_1|),$$
$$O(|y_0|)=O(|y_{10}|)+O(|y_{20}|),\quad O(|x_1|)=O(|x_{11}|)+O(|x_{21}|).$$

为保证映射在 $\Gamma\cap S_0$处的可微性,令 $s=e^{-\lambda_1(\varepsilon)\tau}$，注意到当 $\rho(T)\to\Gamma\cap S_0$时，$\tau(\rho)\to+\infty$，从而 $s\to0$，因此我们可用 Silnikov 变量$(x_{21},y_{20},I_{11},I_{20},s)$来定义(2.6)式在原点邻域产生的奇异映射，得到 $F_2$ 的具体表达式

$$\begin{aligned}
x_{10} &= x_1(T)\approx sx_{11},\ y_{11}=y_1(T+\tau)\approx s^{\lambda_2/\lambda_1}y_{10},\\
x_{20} &= x_2(T)\approx s^{A_2/\lambda_1}x_{21}+s\,x_{11}\cdot O(|y_0|),\\
y_{21} &= y_2(T+\tau)\approx s^{B_2/\lambda_1}y_{20}+s^{\lambda_2/\lambda_1}y_{10}\cdot O(|x_1|),\\
I_{10} &= I_1(T)\approx s^{\varepsilon C_1/\lambda_1}I_{11},\\
I_{21} &= I_2(T+\tau)\approx s^{\varepsilon C_2/\lambda_1}I_{20}.
\end{aligned}\tag{3.6}$$

现在我们利用(3.3)式求出 $q_0$ 与 $q_1$ 的新旧坐标间的关系

$$q_0=(x_{10},y_{10},x_{20},y_{20},I_{10},I_{20})^*=r(T)+Z(T)(l_{10},0,l_{30},l_{40},l_{50},l_{60})^*,$$
$$q_1=(x_{11},y_{11},x_{21},y_{21},I_{11},I_{21})^*=r(-T)+Z(-T)(l_1,0,l_3,l_4,l_5,l_6)^*,$$

其中 $Z(t)=(v_1(t),v_2(t),v_3(t),\cdots,v_6(t))$. 利用 $r(T)=(0,\delta,0,\delta_y,0,0)^*$ 和 $r(-T)=(\delta,0,\delta_x,0,0,0)^*$，$(|\delta_x|,|\delta_y|\ll\delta)$. 可以得到

$$\begin{aligned}
(l_{10},0,l_{30},l_{40},l_{50},l_{60})^* &= Z^{-1}(T)(x_{10},y_{10}-\delta,x_{20},y_{20}-\delta_y,I_{10},I_{20})^*,\\
(l_1,0,l_3,l_4,l_5,l_6)^*(-T) &= Z^{-1}(-T)(x_{11}-\delta,y_{11},x_{21}-\delta_x,y_{21},I_{11},I_{21})^*.
\end{aligned}\tag{3.7}$$

由引理 3.1，经简单计算可解得

$$\begin{aligned}
l_{10} &= u^{-1}(x_{10}-u_{31}u_{33}^{-1}x_{20}),\ l_{30}=u_{33}^{-1}x_{20},\\
l_{40} &= y_{20}-\delta_y-u_{14}u_{11}^{-1}x_{10}+(u_{14}u_{11}^{-1}u_{31}-u_{34})u_{33}^{-1}x_{20},\\
l_{50} &= I_{10},l_{60}=I_{20}.
\end{aligned}\tag{3.8}$$

且有 $y_{10}\approx\delta$. 类似可推得,当 $|y_{11}|,|y_{21}|\ll\delta$ 充分小时，$x_{11}\approx\delta$，且成立

$$\begin{aligned}
l_1(-T) &= y_{11}-u_{42}u_{44}^{-1}y_{21},\\
l_3(-T) &= x_{21}-\delta_x-u_{13}y_{11}+(u_{13}u_{42}-u_{43})u_{44}^{-1}y_{21},\\
l_4(-T) &= u_{44}^{-1}y_{21},\\
l_5(-T) &= I_{11},l_6(-T)=I_{21}.
\end{aligned}\tag{3.9}$$

由(3.5)、(3.6)、(3.8)和(3.9)式我们可得到系统(2.6)式 $\Gamma$ 邻域 Poincaré 映射的表达式

$$F = F_1 \circ F_2 : q_0 \in S_0 \to q_2 \in S_0,$$
$$F(l_{10}, l_{30}, \cdots, l_{60}) \to (l_1(T), l_3(T), \cdots, l_6(T)),$$

其显式表达式为

$$\begin{aligned}
l_1(T) &= \delta s^{\frac{\lambda_2(\varepsilon)}{\lambda_1(\varepsilon)}} + \varepsilon M_1(T,\alpha) + \text{h.o.t.},\\
l_3(T) &= x_{21} - \delta_x - \delta u_{13} s^{\frac{\lambda_2(\varepsilon)}{\lambda_1(\varepsilon)}} + \varepsilon M_3(T,\alpha) + \text{h.o.t.},\\
l_4(T) &= u_{44}^{-1} s^{\frac{B_2(\varepsilon)}{\lambda_1(\varepsilon)}} y_{20} + \delta s^{\frac{\lambda_2(\varepsilon)}{\lambda_1(\varepsilon)}} \cdot O(|x_1|) + \varepsilon M_4(T,\alpha) + \text{h.o.t.},\\
l_5(T) &= I_{11} + \varepsilon M_5(T,\alpha) + \text{h.o.t.},\\
l_6(T) &= s^{\frac{\varepsilon C_2}{\lambda_1(\varepsilon)}} I_{20} + \varepsilon M_6(T,\alpha) + \text{h.o.t.}.
\end{aligned} \tag{3.10}$$

### 3.2 $P_\varepsilon$ 的 $\theta$ 分量的渐近表达式

由[8]知，当 $\varepsilon$ 趋于零时，系统(2.1)的趋于 $\widetilde{\Gamma}_0$ 的解可近似表达为

$$\begin{aligned}
x_\varepsilon(t) &= \gamma(t) + O(\varepsilon),\\
I_\varepsilon(t) &= I_0 + \varepsilon p_1(t) + O(\varepsilon^2),\\
\theta_\varepsilon(t) &= \theta_0 + \theta_1(t) + \varepsilon\theta_2(t) + O(\varepsilon^2).
\end{aligned} \tag{3.11}$$

假设 $x_\varepsilon(0)=\gamma(0)$，$I_\varepsilon(0)=I_0$，$\theta_\varepsilon(0)=\theta_0$，把(3.11)代入(2.1)式，其中$(x,I)$分量由(2.6)式给出，则可解得

$$\theta_2(t) = \frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}I}\bigg|_{I=I_0} \int_0^t g^I(\gamma(s),\hat{\alpha})\mathrm{d}s + \int_0^t g^\theta(\gamma(s),\hat{\alpha})\mathrm{d}s,$$

考虑系统(2.1)在 $\widetilde{\Gamma}_0$ 邻域内相应于 $\theta$ 分量的 Poincaré 映射 $P:\theta_\varepsilon(T)\to\theta_\varepsilon(T+T_0)$，其显式表达式为

$$\begin{aligned}
&(\theta_0 + \theta_1(T) + \varepsilon\theta_2(T) + O(\varepsilon^2)) \to\\
&(\theta_0 + \theta_1(T+T_0) + \varepsilon\theta_2(T+T_0) + O(\varepsilon^2)).
\end{aligned} \tag{3.12}$$

其中 $T_0=2T+\tau$，我们进一步假设

$(\mathrm{H}_4)$ $\Omega(I_0)=0$，$g^\theta(0,0,\theta,\lambda)=0$.

定义 $$M_7(T,\alpha) = \frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}I}\int_T^{T+T_0} g^I(\gamma(t),\hat{\alpha})\mathrm{d}t + \int_T^{T+T_0} g^\theta(\gamma(t),\hat{\alpha})\mathrm{d}t.$$

我们称 $M_7(T,\alpha)$为相应于 $\theta$ 分量的 Melnikov 函数. 则由假设$(\mathrm{H}_4)$以及当 $t\to+\infty$时，$\gamma(t)$指数级地趋于零，可推知当 $\tau\to+\infty$时，$M_7(T,\alpha)$收敛.

由(3.10)、(3.12)式可以得到系统 (2.1) 在 $\widetilde{\Gamma}_0$邻域中的后继函数

$$\begin{aligned}
G(s, x_{21}, y_{20}, I_{11}, I_{20}, \theta_0) &= (G_1, G_3, \cdots, G_6, G_7)\\
&= (P_\varepsilon - I)(l_{10}, l_{30}, \cdots, l_{60}, \theta_\varepsilon(T)),
\end{aligned} \tag{3.13}$$

其中 $P_\varepsilon=(F,P)$，并且其 6 个分量分别为

$$\begin{aligned}
G_1 &= \delta s^{\frac{\lambda_2(\varepsilon)}{\lambda_1(\varepsilon)}} - u_{11}^{-1}\delta s + \varepsilon M_1(T,\alpha) + \text{h.o.t.},\\
G_3 &= x_{21} - \delta_x - \delta u_{13} s^{\frac{\lambda_2(\varepsilon)}{\lambda_1(\varepsilon)}} - u_{33}^{-1}\delta s O(|y_0|) + \varepsilon M_3(T,\alpha) + \text{h.o.t.},\\
G_4 &= -y_{20} + \delta_y + u_{14}u_{11}^{-1}\delta s + \varepsilon M_4(T,\alpha) + \text{h.o.t.},\\
G_5 &= (I - s^{\frac{\varepsilon C_1}{\lambda_1(\varepsilon)}}) I_{11} + \varepsilon M_5(T,\alpha) + \text{h.o.t.},\\
G_6 &= (s^{\frac{\varepsilon C_2}{\lambda_1(\varepsilon)}} - I) I_{20} + \varepsilon M_6(T,\alpha) + \text{h.o.t.},\\
G_7 &= \varepsilon M_7(T,\alpha) + \text{h.o.t.}.
\end{aligned} \tag{3.14}$$

显见系统(2.1)在 $\widetilde{\Gamma}_0$邻近有同宿轨道及周期轨道的充要条件是 $G=0$ 分别有满足 $s=0$ 或 $s>0$ 的解.

## 4 同宿轨道的保存性和分支周期轨道的存在性

本节利用上面给出的后继函数,考虑在小扰动下同宿轨道的保存性以及分支出周期轨道的情况.

考虑方程 $G(s,x_{21},y_{20},I_{11},I_{20},\theta_0)=0.$ (4.1)

由(3.14)式知当 $s=0$ 时,$G=0$ 等价于

$$\begin{aligned}&\varepsilon M_1(T,\alpha)+O(\varepsilon^2)=0,\\&x_{21}+\varepsilon M_3(T,\alpha)+\text{h.o.t.}=0,\\&-y_{20}+\varepsilon M_4(T,\alpha)+\text{h.o.t.}=0,\\&I_{11}+\varepsilon M_5(T,\alpha)+\text{h.o.t.}=0,\\&-I_{20}+\varepsilon M_6(T,\alpha)+\text{h.o.t.}=0,\\&\varepsilon M_7(T,\alpha)+O(\varepsilon^2)=0.\end{aligned} \tag{4.2}$$

当 $\varepsilon$ 充分小时,由(4.2)式可知,其第二、三、四、五个方程有解,将其代入第一、六个方程中可知,若存在 $\alpha=\alpha_0=(\theta_0,\lambda_0)$,使 $M_i(T,\alpha_0)=0$,$i=1,7$,$\mathrm{Rank}(M_{1\lambda}(T,\alpha_0),M_{7\lambda}(T,\alpha_0))=l+1$,则由隐函数定理知,存在一个$(k-l-1)$维曲面 $\lambda=\lambda(\theta_0,\varepsilon)$,使当 $\lambda=\lambda(\theta_0,\varepsilon)$,$0<\varepsilon\ll1$ 时,系统(2.1)在 $\widetilde{\Gamma}_0$ 邻近有唯一的 1-同宿轨道 $\widetilde{\Gamma}_\varepsilon$.

当 $\lambda_1>\lambda_2$ 时,可改令 $s=e^{-\lambda_2\tau}$,此时只需将(3.10)、(3.14)中的 $s$ 换成 $s^{\lambda_1(\varepsilon)/\lambda_2(\varepsilon)}$ 即可,于是可证得与上面类似结论. 因此我们得到下述结果。

**定理 4.1** 若假设$(\mathrm{H}_1)-(\mathrm{H}_4)$成立,$\lambda_1\neq\lambda_2$,且存在某一 $\alpha=\alpha_0=(\theta_0,\lambda_0)$,使得

$$M_i(T,\alpha_0)=0,i=1,7,\ \mathrm{Rank}\,(M_{1\lambda}(T,\alpha_0),M_{7\lambda}(T,\alpha_0))=l+1,$$

则存在$(k-l-1)$ 维参数曲面 $\lambda=\lambda(\theta_0,\varepsilon)$,满足 $\lambda(\theta_0,0)=\lambda_0$,使当 $\lambda=\lambda(\theta_0,\varepsilon)$,$0<\varepsilon\ll1$ 时,系统(2.1)在 $\widetilde{\Gamma}_0$ 邻近有唯一的 1-同宿轨道 $\widetilde{\Gamma}_\varepsilon$.

为了讨论系统(2.1)的周期轨道分支,我们考虑 $G=0$ 的相应于 $s>0$ 的解. 由于

$$\widetilde{G}=\frac{\partial\, G(s,x_{21},y_{20},I_{11},I_{20},\theta_0)}{\partial(s,x_{21},y_{20},I_{11},I_{20},\theta_0)}$$

在 $(s,x_{21},y_{20},I_{11},I_{20},\theta_0)=0$,$\varepsilon=0$ 处是退化的,故不能用隐函数定理来求解(3.14)式的零点.为此我们先考虑(4.1)式第三、四个方程 $G_3=0$,及 $G_4=0$ 的解. 当 $\varepsilon,s$ 充分小时,这两个方程分别存在唯一解 $x_{21}=o(\varepsilon)+o(s)$,$y_{20}=o(\varepsilon)+o(s)$. 把它们分别代入 $G_1=0,G_5=0,G_6=0$,$G_7=0$ 中,则此时 $G=0$ 是否有相应于 $s>0$ 的解等价于讨论 $G_1=0,G_5=0,G_6=0$,$G_7=0$ 是否有相应于 $s>0$ 的解. 因此当 $\lambda_2>\lambda_1$,我们只需考虑方程

$$\begin{aligned}&\delta s^{\frac{\lambda_2(\varepsilon)}{\lambda_1(\varepsilon)}}-u_{11}^{-1}\delta s+\varepsilon M_1(T,\alpha)+h.\ o.\ t.=0,\\&(I-s^{\frac{\varepsilon C_1}{\lambda_1(\varepsilon)}})I_{11}+\varepsilon M_5(T,\alpha)+\text{h.o.t.}=0,\\&(s^{\frac{\varepsilon C_2}{\lambda_1(\varepsilon)}}-I)I_{20}+\varepsilon M_6(T,\alpha)+\text{h.o.t.}=0,\\&\varepsilon M_7(T,\alpha)+O(\varepsilon^2)=0.\end{aligned} \tag{4.3}$$

当 $\lambda_2>\lambda_1$,$u_{11}M_1(T,\alpha)>0$ 时,$G_1=0$ 有唯一解 $s=\{\varepsilon\}\delta^{-1}u_{11}M_1(T,\alpha)+\text{h.o.t.}>0$. 由此可知 $s$ 与 $\varepsilon$ 为同阶量,故可把 $s^{\varepsilon C_1/\lambda_1(\varepsilon)}$,$s^{\varepsilon C_2/\lambda_1(\varepsilon)}$ 泰勒展开,得到

$$I-s^{\varepsilon C_1/\lambda_1}\approx-\varepsilon\lambda_1^{-1}C_1\ln s,\quad I-s^{\varepsilon C_2/\lambda_1}\approx-\varepsilon\lambda_1^{-1}C_2\ln s.$$

于是从(4.3)式的第二、三式解得

$$I_{11}=\lambda_1C_1^{-1}M_5(T,\alpha)/\ln s+O(\ln^{-2}s),$$

$$I_{20} = -\lambda_1 C_2^{-1} M_6(T,\alpha)/\ln s + O(\ln^{-2} s).$$

若存在 $\alpha=\alpha_0=(\theta_0,\lambda_0)$，使得 $M_7(T,\alpha_0)=0$，$M_{7\lambda}(T,\alpha_0)\neq 0$，则由隐函数定理知，存在一个 $(k-l)$ 维曲面 $\lambda=\lambda(\theta_0,\varepsilon)$，使当 $\lambda=\lambda(\theta_0,\varepsilon)$，$0<\varepsilon\ll 1$ 时，系统(2.1)在 $\widetilde{\Gamma}_0$ 邻近有一条周期为 $T_0$ 的周期轨道 $\widetilde{\Gamma}_\varepsilon$，且

$$T_0 = 2T+\tau = 2T-\lambda_1^{-1}\ln s = 2T-\lambda_1^{-1}\ln(\varepsilon\delta^{-1}u_{11}M_1(T,\alpha))+O(\varepsilon).$$

当 $\lambda_2<\lambda_1$ 时，在(4.3)式中用 $s^{\lambda_1(\varepsilon)/\lambda_2(\varepsilon)}$ 代替 $s$，则易知当 $M_1(T,\alpha)<0$ 时，$G_1=0$ 有唯一解 $s=-\varepsilon\delta^{-1}M_1(T,\alpha)+\text{h.o.t.}>0$；而当 $M_1(T,\alpha)>0$ 时，$G_1=0$ 无满足 $s>0$ 的解. 此时重复上面的讨论，同样可得到轨道 $\widetilde{\Gamma}_\varepsilon$ 的存在性. 因此我们得到下述结果

**定理 4.2** 若假设$(H_1)-(H_4)$成立，$\lambda_1\neq\lambda_2$，则下述结论成立

(1) 当 $\lambda_2>\lambda_1$，$u_{11}M_1(T,\alpha)<0$ 或 $\lambda_2<\lambda_1$，$M_1(T,\alpha)>0$ 时，系统(2.1)在 $\widetilde{\Gamma}_0$ 邻近无1-同宿轨道和1-周期轨道；

(2) 若存在 $\alpha=\alpha_0=(\theta_0,\lambda_0)$，使得 $M_7(T,\alpha_0)=0$，$\mathrm{Rank}\, M_{7\lambda}(T,\alpha_0)=l$，则存在一个$(k-l)$维参数曲面 $\lambda=\lambda(\theta_0,\varepsilon)$，使当 $\lambda=\lambda(\theta_0,\varepsilon)$，$0<\varepsilon\ll 1$，且满足 $\lambda_2>\lambda_1$，$u_{11}M_1(T,\alpha)>0$ 或 $\lambda_2<\lambda_1$，$M_1(T,\alpha)<0$ 时，系统(2.1)在 $\widetilde{\Gamma}_0$ 邻近有唯一的一条1-周期轨道.

## 参 考 文 献


[1] Wiggins S. Global Bifurcation and Chaos. New York: Springer-Verlag, 1988

[2] Wiggins S, Holmes P. Homoclinic orbits in slowly varying oscillators. SIAM J Math Anal, 1987, **18**(3): 612－629

[3] Yagasaki K. The method of Melnikov for perturbations of multi-degree-of-freedom Hamiltionian systems. Nonlinearity, 1999, **12**: 799－822

[4] Huang D, Liu Z, Cheng Z. Global dynamics near the resonance in the Sine\|Gordon equation. J Shanghai Univ, 1998, **2**: 259－261

[5] Zhu D M. Problems in homoclinic bifrucations with higher dimensions. Acta Math Sinica, Wew ser, 1998, **14**(3): 341－352

[6] Zhu D M, Xia Z H. Bifurcations of heteroclinic loops. Science in China, 1998, **41**(8):837－848

[7] 朱德明，韩茂安. 快变量空间的同宿轨道分支. 数学年刊，2002，**23**(4):429－438

[8] Wiggin S. Introduction to applied ninlinear dynamical systems and chaos. New York: Springer-verlag, 1991


# Bifurcation of Homoclinic Orbit in Fast Oscillation


Liu Xingbo Zhu Deming

(*Department of Mathematics, East China Normal University, Shanghai* 200062)



**Abstract**: This paper considers homoclinic bifurcation of the systems with angular variable in fast oscillation. By establishing the whole Poincaré map, the authors discuss the persistence of homoclinic orbits and the existence of periodic orbit bifurcated from it. Some known results are extended.



**Key words**: Fast oscillated system; Local coordinate system; Homoclinic orbit; Poincaré map; Bifurcation.

**MR(2000) Subject Classification**: 34C23; 34C37; 37C29