2005,**25A**(6):926－932

Acta Mathematica Scientia
数学物理学报

具周期系数的单种群模型及其最优捕获策略*

[1] 鲁红英 [2] 王克

([1] 东北财经大学数量经济系 大连 116025)

([2] 哈尔滨工业大学(威海)数学系 威海 264209)

摘要:该文用一种新的方法，讨论了单种群生物资源的捕获优化问题. 以最大的可持续单位时间捕获量为管理目标，得到一类非自治单种群捕获模型的最优捕获策略，所得结果包括了文献中研究过的几乎所有单种群捕获模型的相应研究结果.

关键词:具有周期系数的单种群捕获模型；周期解；最优捕获努力量；生产函数.

MR(2000)主题分类:32C27 **中图分类号**:O175.12 **文献标识码**:A

文章编号:1003-3998(2005)06-926-07

1 引言及主要结果简介

如何利用有限的可再生资源，实现其可持续开发和利用，已成为从经济管理学家到生态学者都在关心的问题，历来受到学术界的重视. 如文献[1－5]，描述了许多单种群捕获模型. 文献[6－8]，研究了非自治单种群生态系统的持久性和全局渐近行为. 文献[9－12],研究了一些单种群生态系统的优化管理问题. 文献[16－24]，讨论了自治单种群捕获模型，以最大可持续捕获量为管理目标，得到了最优捕获策略. 但几乎所有的最优捕获策略，都是在种群的增长方程和生产函数不随着 t 变化假定下所得到的,这与客观事实不尽相符. 在现实世界中，情况往往更加复杂，例如由于季节，食物供应，温度等原因，种群的增长方程和生产函数往往会随着 t 变化而变化. 如文献[13－15]讨论了一些具体的非自治周期系数的单种群捕获模型，以获得最大可持续捕获量,而得到最优捕获策略. 本文研究的是一般性的具有周期系数的单种群生态系统，推广了种群的增长方程，使其具有一般化，并且假定生产函数随着 t 周期变化，使得捕获方式与客观事实更好的接近. 对于这样推广后的非自治单种群捕获模型，增加了寻找最优捕获努力量的难度. 本文在适当的条件下，得到了最优捕获努力量的显式表达式，所得结果包括了文献中研究过的几乎所有单种群捕获模型的相应研究结果，使文献[13,14,15,16,19,20,22,23,24,27]所研究的一些结果成为本文的特例,并且推广了相应的结果.

2 非自治单种群捕获模型

我们考虑如下的非自治单种群捕获模型

收稿日期:2004-10-18

E-mail:hongyinglu543@163.com

* 基金项目:国家自然科学基金(10171010)和教育部重点项目(01061)资助

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=F(t,x)-Q(x,E(t)), \tag{1}$$

其中

$$Q(x,E(t))=E(t)x(t). \tag{2}$$

$x(t)$是某一具经济和资源价值的种群在时刻t时的密度，$F(t,x)$是该种群的自然增长率，$Q(x,E(t))$是生产函数,与捕获努力量$E(t)$,种群密度$x(t)$有关，$F(t,x)$，$E(t)$是关于t的周期为1的周期函数.

系统(1)满足如下基本假设

假设1：$F(t,x)$在$R^+\times R^+$上连续可微.

假设2：存在连续可微的$k(t)>0$，$F(t,0)=F(t,k(t))=0$，并且$F(t,x)>0$，对于$\forall\, 0<x<k(t)$.

假设3：存在连续可微的$\xi(t)\in(0,k(t))$,$F(t,x)$在$\xi(t)$取得最大值,且$F(t,\xi(t))>0$.

假设4：$\xi(t)$,$k(t)$是关于t的周期为1的周期函数，$E(t)$为R^+上非负有界的连续函数.

对于定义在R^+上连续有界函数$f(x)$引进记号

$$f^U=\sup\{f(x)\mid x\in R^+\},\qquad f^L=\inf\{f(x)\mid x\in R^+\}.$$

3 一致持续生存性

定义3.1[26] 系统(1)是一致持续生存的是指:如果存在正常数M和m,使得对于系统(1)的任何正解$x(t)$都存在$T>0$,当$t\geqslant T$时有$m\leqslant x(t)\leqslant M$,即

$$m\leqslant\liminf_{t\to+\infty}x(t)\leqslant\limsup_{t\to+\infty}x(t)\leqslant M.$$

引理3.1 $R_+=\{x(t)\mid x(t)>0\}$是系统(1)的正不变集.

证 对于任意$t\in[t_0,+\infty)$和$x(t_0)\in R_+$,由系统(1)有

$$x(t)=x(t_0)\exp\left\{\int_{t_0}^{t}\left(\frac{F(s,x(s))}{x(s)}-E(s)\right)\mathrm{d}s\right\}$$

当$x(t_0)>0$时，必有$x(t)>0$. 因此系统(1)满足正初值条件的解在有限时间内将保持恒正，故集合R_+关于系统(1)是正不变集,证毕. ▌

根据系统(1)的生态学的意义，本文考虑它的所有正解，此文限于在R_+中讨论系统(1),这样要求任意初始值$x_0>0$.

设集合$K_0=\{x\in R_+\mid 0<m\leqslant x\leqslant M\}$,其中

$$\begin{cases} M>\dfrac{F^U}{E^L}=:M^*, \\ 0<m<\dfrac{F^L}{E^U}=:m^*. \end{cases} \tag{3}$$

引理3.2 若系统(1)满足假设1－4，则如上定义的集合K_0是正不变集且是解的最终有界区域.

证 设$x(t)$是系统(1)满足正初值条件的一个解,由系统(1)得

$$\dot{x}\leqslant F^U-E^Lx=E^L\left(\frac{F^U}{E^L}-x\right)=E^L(M^*-x),$$

由条件(3)得$\dot{x}|_{x=M}<0$,所以$x(t_0)\leqslant M\Rightarrow x(t)\leqslant M$，$t\geqslant t_0$。

另一方面,若 $x(t_0)>M$, 则当 $t>t_0$ 充分大时,也可证明 $x(t)\leqslant M$. 事实上,若 $x(t)>M$,由已知条件有 $F^U-E^Lx<F^U-E^LM$,可选取 $a>0$,使得对 $x(t)>M$,有

$$F^U-E^LM=E^L(M^*-M)=-E^L(M-M^*)=-a<0.$$

对于 $x(t_0)>M$,则存在 $\varepsilon>0$,当 $t\in(t_0,\varepsilon)$时有

$$\dot{x}\leqslant F^U-E^Lx<-a<0.$$

即只要 $x(t)>M$,就有 $\dot{x}(t)<-a<0$,表明 $x(t)$以速度 a 严格递减,因此存在 $\bar{T}>t_0\geqslant 0$,当 $t\geqslant\bar{T}$ 时,有 $x(\bar{T})<x(t_0)-a(\bar{T}-t_0)\leqslant M$,只需 $\bar{T}\geqslant\dfrac{x(t_0)-M}{a}+t_0$ 即可,即 $t>t_0$ 充分大($t\geqslant\bar{T}$)时,有 $x(t)\leqslant M$. 总之无论 $x(t_0)\leqslant M$ 还是 $x(t_0)>M$,都存在某一个 T(当 $x(t_0)\leqslant M$ 时 $T\geqslant t_0$;当 $x(t_0)>M$ 时 $T\geqslant\bar{T}>t_0$),使得当 $t\geqslant T$ 时,有 $x(t)\leqslant M$.

用类似的方法,若 $x(t_0)\geqslant m$,则 $t\geqslant T\geqslant t_0$ 时,$x(t)\geqslant m$;

若 $x(t_0)<m$,则当 $t>t_0$ 充分大时也可证明:存在 $T'\geqslant T>t_0$,当 $t\geqslant T'$时,有 $x(t)\geqslant m$.

定理 3.1 若系统(1)满足假设 1-4,且满足条件(3),则系统(1)是一致持续生存的.

4 全局渐近稳定性

定义 4.1[25] 称系统(1)是全局渐近稳定的,如果对于它的某个正解 $x(t)$有:a) $x(t)$在 Liapunov 意义下是稳定;b) 对于系统(1)的任何其它正解 $x^*(t)$,有 $\lim\limits_{t\to+\infty}|x(t)-x^*(t)|=0$。

对系统(1)假设下列条件成立。

存在 $\eta(t)\in(0,k(t))$,有

$$F(t,u)>u(t)F_x'(t,\ \eta(t)),\tag{4}$$

其中 $u(t)$为系统(1)的任意正解.

定理 4.1 若系统(1)满足假设 1-4,且满足条件(3)和(4),则系统(1)是全局渐近稳定的.

证 设 $u(t)$是系统(1)的某个正解,$x(t)$是系统(1)的任意一个满足正初值条件 $x(t_0)>0$ 的解,则可令

$$\tilde{u}(t)=\ln u(t),\quad \tilde{x}(t)=\ln x(t).\tag{5}$$

根据定理 3.1,我们可知系统(1)的每一个满足正初值条件的解在 K_0 中是最终有界的,即系统(1)是一致持续生存的. 不失一般性,我们可假设

$$x(t)\in K_0,\quad u(t)\in K_0,\text{对 } t\geqslant t_0.$$

构造 Liapunov 函数

$$V(t)=V(\tilde{x}(t),\ \tilde{u}(t))=|\ \tilde{x}(t)-\tilde{u}(t)\ |.\tag{6}$$

沿系统(1)的正解,计算 $V(t)$上右导数,得到

$$\begin{aligned}D^+V(t)&=\left(\frac{\dot{x}(t)}{x(t)}-\frac{\dot{u}(t)}{u(t)}\right)\mathrm{sign}(x(t)-u(t))\\&=\frac{u(t)F(t,x(t))-u(t)F(t,u(t))+u(t)F(t,u(t))-x(t)F(t,u(t))}{x(t)u(t)}\cdot\\&\quad\ \mathrm{sign}(x(t)-u(t))\\&=\frac{u(t)F'_x(t,x(t))(x(t)-u(t))-F(t,u(t))(x(t)-u(t))}{x(t)u(t)}\mathrm{sign}(x(t)-u(t))\end{aligned}$$

$$=-\frac{F(t,u(t))-u(t)F'_x(t,\eta(t))}{x(t)u(t)}\mid x(t)-u(t)\mid$$
$$=-a\mid x(t)-u(t)\mid,$$

其中,$\eta(t)$在 $x(t)$与 $u(t)$之间

$$a=\min_{t\in(t_0,+\infty)}\left(\frac{F(t,\ u(t))-u(t)F'_x(t,\eta(t))}{x(t)u(t)}\right)>0,$$

故
$$D^+V(t)<0.$$

由此可知,$u(t)$在 Liapunov 意义下是稳定的. $V(t)$是在$(t_0,+\infty)$上单调递减的,$0\leqslant V(t)\leqslant V(t_0)$,并且有 $\lim\limits_{t\to+\infty}V(t)=V^*$.

因为 $x(t)$,$u(t)$在 K_0 中有界,所以 $\tilde{x}(t)$, $\tilde{u}(t)$有界.不失一般性可假设存在 $M_0>0$,有
$$M_0\geqslant\max\{\mid\tilde{x}(t)\mid,\mid\tilde{u}(t)\mid\}.$$

因为
$$\mid x(t)-u(t)\mid=\mid\exp\{\tilde{x}(t)\}-\exp\{\tilde{u}(t)\}\mid=e^{\gamma(t)}\mid\tilde{x}(t)-\tilde{u}(t)\mid$$

所以
$$\tilde{m}\mid\tilde{x}(t)-\tilde{u}(t)\mid\leqslant\mid x(t)-u(t)\mid\leqslant\tilde{m}\mid\tilde{x}(t)-\tilde{u}(t)\mid.$$

其中 $\tilde{m}=\exp\{-M_0\}$,$\widetilde{M}=\exp\{M_0\}$,则有
$$D^+V(t)\leqslant-\alpha\tilde{m}V(t)$$

我们可断言 $V^*=0$,否则 $V^*>0$, $V(t)\geqslant V^*>0$, $t\geqslant t_0$,所以
$$D^+V(t)\leqslant-\alpha\tilde{m}V^*$$

那么
$$V(t)\leqslant V(t_0)-\alpha\tilde{m}V^*t,\quad t\geqslant t_0$$

当 $t>\dfrac{V(t_0)}{a\tilde{m}V^*}$,有
$$V(t)<0,$$

这是与 $V(t)\geqslant0$ 矛盾,所以. 有
$$\lim_{t\to+\infty}\mid x(t)-u(t)\mid=0.$$

因此,最终证明了正解 $u(t)$是全局渐近稳定的. 证毕. ∎

5　以最大可持续单位时间捕获量为管理目标

在这里,我们不妨假设单位时间捕获量为一年.

定理 5.1　设系统(1)满足假设 1—4,且满足条件(3)和(4),则系统(1)存在最优捕获努力量 $E^*(t)$,使其能够达到最大可持续年捕获量.

证　设系统(1)的捕获量为 $Y(E)$,相应的周期解为
$$x(t)\equiv x_E^p(t),\tag{7}$$

则有 $\int_0^1F(t,\ x_E^p(t))\mathrm{d}t-\int_0^1E(t)x_E^p(t)\mathrm{d}t=0$,即为
$$\int_0^1F(t,\ x_E^p(t))\mathrm{d}t=\int_0^1E(t)x_E^p(t)\mathrm{d}t.\tag{8}$$

以获得最大可持续年捕获量 $Y^*(E^*)$为管理目标,则有
$$Y^*(E^*)=\max\int_0^1E(t)x_E^p(t)\mathrm{d}t=\max\int_0^1F(t,\ x_E^p(t))\mathrm{d}t.\tag{9}$$

由假设 3 可知，$F(t, x)$在 $\xi(t)$可以取得最大值，于是

$$Y^*(E^*) = \int_0^1 F(t, \xi(t))\mathrm{d}t = \int_0^1 E^*(t)\xi(t)\mathrm{d}t. \tag{10}$$

由假设 3 及(10)式知，$\xi(t)$为系统(1)的严格正周期解. 再由定理 4.1 知，系统(1)是全局渐近稳定的. 故 $\xi(t)$是全局渐近稳定的正周期解，而正周期解的全局渐近稳定性蕴含着周期正解的唯一性，所以 $\xi(t)$是系统(1)的唯一全局渐近稳定的正周期解，此即为最优种群水平. 把 $\xi(t)$代入系统(1)，得

$$\xi'(t) = F(t,\xi(t)) - E^*(t)\xi(t),$$

所以

$$E^*(t) = \frac{F(t,\xi(t)) - \xi(t)}{\xi(t)}. \tag{11}$$

当由(11)式定义的 $E^*(t)$非负时，就是系统(1)的最优捕获努力量. 最优的年捕获为

$$\int_0^1 F(t,\xi(t))\mathrm{d}t.$$

▌

6 应用举例

例 1 对于 Gilpin 和 Aynala 的自治系统 $\dot{x}(t) = rx(1-(\frac{x}{k})^\theta) - Ex$(其中 $r,k,)\theta$ 均为正常数)所对应的具有周期系数的非自治单种群捕获模型

$$\dot{x}(t) = r(t)x(1-(\frac{x}{k(t)})^\theta) - E(t)x. \tag{12}$$

其中 $r(t)$，$k(t)$为连续可微的 1-周期函数，θ 为正常数，$E(t)$在 R^+ 为非负连续有界的 1-周期函数. 显然，$F(t, x)$在 $\xi(t) = (\frac{1}{1+\theta})^{\frac{1}{\theta}}k(t)$取得最大值. 故系统(12)满足假设条件 1—4 和(3)、(4)式. 根据定理 4.1 可知，$\xi(t)$是唯一的全局渐近稳定的正周期解. 由定理 5.1 可知系统(12)存在最优捕获努力量 $E^*(t)$，使其能够达到最大可持续年捕获量.

当由(11)式定义的

$$E^*(t) = \frac{\theta}{1+\theta}r(t) - \frac{k'(t)}{k(t)}$$

非负时，就是系统(12)的最优捕获策略，且最优年捕获量为

$$Y^*(E^*(t)) = \frac{\theta}{(1+\theta)^{1+1/\theta}}\int_0^1 r(t)k(t)\mathrm{d}t.$$

当 $\theta=1$ 时，即是文献[17]中所研究的捕获模型，由定理 5.1 得

$$\xi(t) = \frac{k(t)}{2}, E^*(t) = \frac{1}{2}r(t) - \frac{k'(t)}{k(t)}.$$

当 $\theta=1$ 时，$r(t)=r, k(t)=k, r, k$ 是正常数，即是文献[16]中所研究的捕获模型，由定理 5.1 得，$\xi = \frac{k}{2}, E^* = \frac{1}{2}r$.

显然，定理 5.1 推广了文献[14][16]中所研究的相应结果.

例 2 对于 Gompertz 自治系统 $\dot{x}(t) = rx\ln\frac{k}{x} - Ex$(其中 r,k 均为正常数)所对应的具有周期系数的非自治单种群捕获模型

$$\dot{x}(t) = r(t)x\ln\frac{k(t)}{x} - E(t)x. \tag{13}$$

其中 $r(t)$, $k(t)$为连续可微的 1-周期函数,$E(t)$在 R^+ 上为非负连续有界的 1-周期函数. 显然,$F(t, x)$在 $\xi(t)=\dfrac{k(t)}{e}$取得最大值. 故系统(13)满足假设条件 1—4 和(3)、(4)式. 根据定理 4.1 可知,$\xi(t)$是唯一的全局渐近稳定的正周期解. 由定理 5.1 可知系统(13)存在最优捕获努力量 $E^*(t)$,使其能够达到最大可持续年捕获量.

当由(11)式定义的 $E^*(t)=r(t)-\dfrac{k'(t)}{k(t)}$非负时,就是系统(13)的最优捕获策略,且最优年捕获量为 $Y^*(E^*(t)) = \dfrac{1}{e}\int_0^1 r(t)k(t)$。

例 3 对于退偿自治系统 $\dot{x}(t)=rx^a(1-\dfrac{x}{k})-Ex$(其中 r,k,a 均为正常数)所对应的具有周期系数的非自治单种群捕获模型

$$\dot{x}(t) = r(t)x^a(1-\frac{x}{k(t)}) - E(t)x. \tag{14}$$

其中 $r(t)$, $k(t)$为连续可微的 1-周期函数,$a\geqslant 2$ 为正常数,$E(t)$在 R^+ 为非负连续有界的 1-周期函数. 显然,$F(t, x)$在 $\xi(t)=\dfrac{a}{1+a}k(t)$取得最大值. 故系统(14)满足假设条件 1—4 和(3)、(4)式. 根据定理 4.1 可知,$\xi(t)$是唯一的全局渐近稳定的正周期解. 由定理 5.1 可知系统(14)存在最优捕获努力量 $E^*(t)$,使其能够达到最大可持续年捕获量.

当由(11)式定义的

$$E^*(t) = r(t)\frac{\alpha^{\alpha-1}}{(1+a)^a}(k(t))^{a-1} - \frac{k'(t)}{k(t)}$$

非负时,就是系统(14)的最优捕获策略,且最优年捕获量为

$$Y^*(E^*(t)) = \frac{a^a}{(1+a)^{1+a}}\int_0^1 r(t)k(t)\mathrm{d}t.$$

当 $r(t)=r$, $k(t)=k$, r, k 是正常数,即是文献[20][24]中所研究的捕获模型,由定理 5.1 得,$\xi = \dfrac{a}{1+a}k$, $E^* = r\dfrac{(k\alpha)^{\alpha-1}}{(1+a)^a}$.

显然,定理 5.1 推广了文献[20][24]中所研究的相应结果.

注 本文所得结果,推广了文献中研究过的几乎所有单种群生态系统的相应研究结果,并且得到了新结果.

参 考 文 献

[1] Clark C W. Mathematical Bioeconomics: The Optimal Management of Renewable Resources, 2nd ed. New York: Wiley, 1976

[2] Murry J D. Mathematical Biology. Berlin: Springer Verlay, 1989

[3] Trowtman L. John, Variational Calculus and Optimal Control. New York: Springer, 1996

[4] 马知恩. 种群生态学的数学建模与研究. 合肥:安徽教育出版社,1996

[5] 陈兰荪. 数学生态模型与研究方法. 北京:科学出版社,1988

[6] Takeuchi Y. Cooperative systems theory and global stability of diffusion models. Aacta Appl Math, 1989, **14**(1—2): 49—57

[7] Lu Z, Takeuchi Y. Global asymptotic behavior in single-species discrete diffusion systems. J Math Biol, 1993, **32**

(1)：67－77

[8] Cui J，Chen L. The effect of diffusion on the time varying Logistic population growth. Computers Math Applic，1998，**36**(3)：1－9

[9] Eio Lko，Marjusz，Kozlowski. Some Optimization models of growth in biology. IEEE Trans. Automat cont，1995，**40**(10)：1779

[10] Angelova J，Disshliev A. Optimization problems for one-impulsive models from population dynamics. Nonlinear Analysis，2000，**39**(4)：483－497

[11] Luis H R，Alvarez Larry A. Optimal harvesting of stochastically fluctuating populations. Journal of mathematical Biology，1998，**37**(2)：155－177

[12] 李海龙. 带扩散的 Logistic 单种群模型及其最优收获策略. 生物数学学报，1999，**14**(3)：293－300

[13] 李海龙. 一类具周期系数的单种群模型及其最优收获策略. 生物数学学报，1999，**14**(4)：479－483

[14] Meng Fan，Ke Wang. Optimal harvesting policy for single population with periodic coefficients. Mathematical Biosciences，1998，**152**：165－177

[15] Glipin M E，Aynala F J. Global models of growth in biology and competion. Proc Nat Acad Sci，1973，**70**(12)：3590－3593

[16] Schaefer M B. Some aspects of the dynamics of populations important to the management of commercial ficheries Bull. Inter-Amer，Trop，Tuna Comm. I. 1954，**1**(2)：25－56

[17] 王克，苗春梅. 一类单种群生物资源的最优开发策略. 吉林省教育学院学报，2002，**1**(2)：20－23

[18] 张晓颖. 单种群生物资源的最优开发. 长春大学学报，2001，**11**(6)：6－10

[19] 高海音，翁世有，王克，朱天晓. Compertz 系统的捕获问题. 生物数学学报，1998，**13**(5)：481－483

[20] 范猛，王克，张树文，刘会民，张玉娟. 具有退偿增长曲线生物种群之研究. 生物数学学报，1998，**21**(6)：913－915

[21] 刘会民，张树文，张玉娟，范猛，王克. 临界退偿系统的捕获优化问题. 生物数学学报，1998，**13**(4)：497－483

[22] 李清，王克，范猛. 广义 Logistic 模型捕获优化问题. 生物数学学报，2000，**15**(4)：408－412

[23] 范猛，王克，周毅. 具有临界退偿的生物种群的开发. 丹东师专学报，1999，**21**(4)：3－5

[24] 范猛，王克，刘会民，张玉娟，张树文. 一类具有退偿增长曲线生物种群的捕获优化问题. 生物数学学报，1997，**1**(4)：38－42

[25] 秦元勋，王慕秋，王联. 运动稳定性理论与应用. 北京：科学出版社，1981. 106－130

[26] 腾志东，陈兰荪. 高维时滞周期系统的正周期解. 应用数学学报，1999，**22**(3)：140－145

[27] 鲁红英，王克. 自治单种群模型及其最优捕获策略. 系统科学与数学，2004，**24**(2)：200－205

Nonautonomous Single Population Models with Periodoc Coefficients and Their Optimal Harvesting Policies

[1]Lu Hongying [2]Wang Ke

([1]*Department of Quantitative Economics*，*Dong Bei University of Finance and Economics*，*Dalian* 116025)

([2]*Department of Mathematics*，*Harbin Institute of Technology At*，*Weihai* 264209)

Abstract：In this paper，using a new method，the authors discuss the optimal harvesting problems of nonautonomous single population biological resource. The authors choose the maximum annual-sustainable yield as the management objective and investigate the optimal harvesting policies for a class of nonautonomous single population models. The results include almost all nonautonomous single populatiom models researched in literature.

Key words：Single population model with periodic coefficients；Periodic solution；Optimal harvesting effort；Production function.

MR(2000) Subject Classification：32C27