2005,**25A**(1):21－26

Acta Mathematica Scientia
数学物理学报

具有负指数的 Furuta 型不等式的推广*

杨长森　户清文　左红亮

(河南师范大学数学与信息科学学院　河南新乡 453007)

摘要:该文首先证明了具有负指数的 Furuta 型不等式等价于 Tanahashi 的不等式,其次证明了该不等式可以推广为一个保序不等式.

关键词:正算子;Furuta 型不等式;保序不等式.

MR(2000)主题分类:47A63;47B15　　**中图分类号**:O177.1　　**文献标识码**:A

文章编号:1003-3998(2005)01-021-06

1　引言

在本文中,H 是复 Hilbert 空间,H 上的有界线性算子简称算子. H 上的算子 T 若满足对任意的 $x\in H$,有$(Tx,x)\geqslant 0$,则称 T 是正算子,记为 $T\geqslant 0$. 如果 T 是可逆正算子则称 T 是严格正算子,记为 $T>0$. Furuta 在[1]文中证明了下面的不等式

定理 F(Furuta 不等式)　如果 $A\geqslant B\geqslant 0$,那么对一切 $r\geqslant 0$

(i) $(B^{\frac{r}{2}}A^p B^{\frac{r}{2}})^{\frac{1}{q}}\geqslant(B^{\frac{r}{2}}B^p B^{\frac{r}{2}})^{\frac{1}{q}}$;(ii) $(A^{\frac{r}{2}}A^pA^{\frac{r}{2}})^{\frac{1}{q}}\geqslant(A^{\frac{r}{2}}B^pA^{\frac{r}{2}})^{\frac{1}{q}}$.

其中
$$p\geqslant 0,q\geqslant 1\text{ 且}(1+r)q\geqslant p+r.$$

如果在上述命题(i)或(ii)中取 $r=0$,那么由定理 F 我们可以得到下面著名的定理

定理 L-H(Löwner-Heinz 不等式)　若 $A\geqslant B\geqslant 0$,则对任意 $\alpha\in[0,1]$,有 $A^\alpha\geqslant B^\alpha$.

对于两个保序的正算子,有下面的具有负指数的 Furuta 型不等式

定理 A[2,3]　若 $A\geqslant B\geqslant 0$ 且 $A>0$,则

(Ⅰ) 当 $1\geqslant p>t\geqslant 0$ 且 $p\geqslant\dfrac{1}{2}$时,有 $A^{1-t}\geqslant(A^{\frac{-t}{2}}B^pA^{\frac{-t}{2}})^{\frac{1-t}{p-t}}$;

(Ⅱ) 当 $1\geqslant t>p\geqslant 0$ 且 $\dfrac{1}{2}\geqslant p$ 时,$A^{-t}\geqslant(A^{\frac{-t}{2}}B^pA^{\frac{-t}{2}})^{\frac{-t}{p-t}}$;

(Ⅲ) 当$\dfrac{1}{2}\geqslant p>t\geqslant 0$ 时,有 $A^{2p-t}\geqslant(A^{\frac{-t}{2}}B^pA^{\frac{-t}{2}})^{\frac{2p-t}{p-t}}$;

(Ⅳ) 当 $1\geqslant t>p\geqslant\dfrac{1}{2}$时,有 $A^{2p-1-t}\geqslant(A^{\frac{-t}{2}}B^pA^{\frac{-t}{2}})^{\frac{2p-1-t}{p-t}}$.

在文[6,7,8]中给出了定理 A 的一些推广. 定理 A 中的(Ⅰ),(Ⅱ),(Ⅲ)及(Ⅳ)的等价性可见文[5,4]. 在文[3]中还证明了定理 A 中(Ⅰ),(Ⅱ)及(Ⅳ)外部指数的最优性.

收稿日期:2002-11-21;修订日期:2003-03-06

E-mail:yangchangsen0991@sina.com.

* 基金项目:河南省教育基金(2003110006)资助

最近，Tanahashi 在文[3]中给出了下列定理 B

定理 B[3] 设 $A\geqslant B>0$，$0\leqslant p\leqslant 1$，$0<q\leqslant 1$ 且 $-1\leqslant 2r\leqslant 0$. 则

$$(A^rB^pA^r)^{\frac{1}{q}}\leqslant A^{\frac{p+2r}{q}}, \tag{1.1}$$

只要实数 p，q，r 满足

$$-2r(1-q)\leqslant p\leqslant q-2r(1-q) \tag{1.2}$$

及下面的(1.3)或(1.4)式

$$\frac{1}{2}\leqslant q\leqslant 1\ , \tag{1.3}$$

$$0<q<\frac{1}{2}\quad 且\quad \frac{-2r(1-q)-q}{1-2q}\leqslant p\leqslant\frac{-2r(1-q)}{1-2q}. \tag{1.4}$$

本文将证明定理 A 与定理 B 都等价于下面的定理 1.

定理 1 如果 $A\geqslant B\geqslant 0$ 且 $A>0$，那么

$$A^{\theta-t}\geqslant(A^{\frac{-t}{2}}B^pA^{\frac{-t}{2}})^{\frac{\theta-t}{p-t}} \tag{1.5}$$

在下面任意一个条件成立时成立

T_1：$0\leqslant t<p\leqslant\theta\leqslant\min\{2p,1\}$.

T_2：$\max\{0,2p-1\}\leqslant\theta\leqslant p<t\leqslant 1$.

T_3：$0\leqslant t<p\leqslant 1$ 和 $t\leqslant\theta\leqslant\min\{2p,1\}$.

T_4：$0\leqslant p<t\leqslant 1$ 和 $\max\{0,2p-1\}\leqslant\theta\leqslant t$.

我们注意如果在(T_1)中取 $\theta=1$，或 $2p$,在(T_2)中 $\theta=0$，或 $2p-1$,则均可由定理 1 可以推出定理 A;反过来可以用一次 L-H 定理,则由定理 A 推出定理 1. 下面我们证明定理 1 等价于定理 B，而且它们可以推广为如下的保序不等式

定理 2 如果 $A_1\geqslant A_2\geqslant B>0$，那么

$$(B^rA_1^{\alpha_1}B^r)^{\frac{\theta+2r}{\alpha_1+2r}}\geqslant(B^rA_2^{\alpha_2}B^r)^{\frac{\theta+2r}{\alpha_2+2r}} \tag{1.6}$$

在下面任意一个条件成立时成立

(Ⅰ) $0\leqslant\alpha_2<-2r<\alpha_1\leqslant\min\{-4r,1\}$ 且 $-2r\leqslant\theta\leqslant\min\{-4r,1,2\alpha_1-\alpha_2\}$.

(Ⅱ) $0\leqslant\alpha_2\leqslant\alpha_1<-2r\leqslant 1$ 且 $\max\{\alpha_2,2\alpha_1-\min\{-4r,1\}\}\leqslant\theta\leqslant-2r$.

(Ⅲ) $\max\{0,-4r-1\}\leqslant\alpha_1<-2r<\alpha_2\leqslant 1$ 且 $\max\{2\alpha_1-\alpha_2,0,-4r-1\}\leqslant\theta\leqslant-2r$.

(Ⅳ) $0\leqslant-2r<\alpha_1\leqslant\alpha_2\leqslant 1$ 且 $-2r\leqslant\theta\leqslant\min\{\alpha_2,2\alpha_1-\max\{0,-4r-1\}\}$.

2 主要结果的证明

为证明上述结果,我们先引述几个引理

引理 A 若 $A>0,B>0$,则

$$(BAB^*)^s=BA^{1/2}(A^{1/2}B^*BA^{1/2})^{s-1}A^{1/2}B^*,$$

对任意实数 s 都成立 .

引理 B[7] 令 $A>0,B>0$ 而且 $\beta,r,\alpha_1,\alpha_2$ 是满足下列条件的任意实数,$\alpha_1+r\neq 0,\alpha_2+r\neq 0$. 那么

$$(B^{\frac{r}{2}}A^{\alpha_1}B^{\frac{r}{2}})^{\frac{\beta}{\alpha_1+r}}\geqslant(B^{\frac{r}{2}}A^{\alpha_2}B^{\frac{r}{2}})^{\frac{\beta}{\alpha_2+r}},$$

当且仅当 $\{(A^{\frac{\alpha_2}{2}}B^rA^{\frac{\alpha_2}{2}})^{\frac{1}{2}}A^{\alpha_1-\alpha_2}(A^{\frac{\alpha_2}{2}}B^rA^{\frac{\alpha_2}{2}})^{\frac{1}{2}}\}^{\frac{\beta}{\alpha_1+r}}\geqslant(A^{\frac{\alpha_2}{2}}B^rA^{\frac{\alpha_2}{2}})^{\frac{\beta}{\alpha_2+r}}.$

为了证明下面的定理,我们把引理 B 加强为以下的引理 C

引理 C　令 $A>0, B>0$ 而且 $\beta, r, \alpha_1, \alpha_2$ 满足下列条件的任意实数 $\alpha_1+r\neq 0, \alpha_2+r\neq 0$. 那么

$$(B^{\frac{r}{2}}A_1{}^{\alpha_1}B^{\frac{r}{2}})^{\frac{\beta}{\alpha_1+r}} \geqslant (B^{\frac{r}{2}}A_2{}^{\alpha_2}B^{\frac{r}{2}})^{\frac{\beta}{\alpha_2+r}},$$

当且仅当

$$\{(A_2{}^{\frac{\alpha_2}{2}}B^rA_2{}^{\frac{\alpha_2}{2}})^{\frac{1}{2}}A_2{}^{-\frac{\alpha_2}{2}}A_1{}^{\alpha_1}A_2{}^{-\frac{\alpha_2}{2}}(A_2{}^{\frac{\alpha_2}{2}}B^rA_2{}^{\frac{\alpha_2}{2}})^{\frac{1}{2}}\}^{\frac{\beta}{\alpha_1+r}} \geqslant (A_2{}^{\frac{\alpha_2}{2}}B^rA_2{}^{\frac{\alpha_2}{2}})^{\frac{\beta}{\alpha_2+r}}.$$

证　注意到

$$\begin{aligned}
&(B^{\frac{r}{2}}A_1{}^{\alpha_1}B^{\frac{r}{2}})^{\frac{\beta}{\alpha_1+r}}\\
&=B^{\frac{r}{2}}A_1^{\alpha_1/2}(A_1^{\alpha_1/2}B^rA_1^{\alpha_1/2})^{\frac{\beta}{\alpha_1+r}-1}A_1^{\alpha_1/2}B^{\frac{r}{2}} \quad (\text{由引理 A})\\
&=B^{\frac{r}{2}}A_1^{\alpha_1/2}\{A_1^{-\alpha_1/2}A_2^{\alpha_2/2}(A_2^{-\alpha_2/2}B^{-r}A_2^{-\alpha_2/2})A_2^{\alpha_2/2}A_1^{-\alpha_1/2}\}^{1-\frac{\beta}{\alpha_1+r}}A_1^{\alpha_1/2}B^{\frac{r}{2}}\\
&=B^{\frac{r}{2}}A_2^{\alpha_2/2}(A_2^{-\alpha_2/2}B^{-r}A_2^{-\alpha_2/2})^{1/2}\{(A_2^{-\alpha_2/2}B^{-r}A_2^{-\alpha_2/2})^{1/2}A_2^{\alpha_2/2}A_1^{-\alpha_1}A_2^{\alpha_2/2}\\
&\quad\cdot(A_2^{-\alpha_2/2}B^{-r}A_2^{-\alpha_2/2})^{1/2}\}^{-\frac{\beta}{\alpha_1+r}}(A_2^{-\alpha_2/2}B^{-r}A_2^{-\alpha_2/2})^{1/2}A_2^{\alpha_2/2}B^{\frac{r}{2}} \quad (\text{由引理 A})\\
&=B^{\frac{r}{2}}A_2^{\alpha_2/2}(A_2^{\alpha_2/2}B^rA_2^{\alpha_2/2})^{-1/2}\{(A_2^{\alpha_2/2}B^rA_2^{\alpha_2/2})^{1/2}A_2^{-\alpha_2/2}A_1^{\alpha_1}A_2^{-\alpha_2/2}\\
&\quad\cdot(A_2^{\alpha_2/2}B^rA_2^{\alpha_2/2})^{1/2}\}^{\frac{\beta}{\alpha_1+r}}(A_2^{\alpha_2/2}B^rA_2^{\alpha_2/2})^{-1/2}A_2^{\alpha_2/2}B^{\frac{r}{2}}
\end{aligned}$$

及

$$(B^{\frac{r}{2}}A_2^{\alpha_2}B^{\frac{r}{2}})^{\frac{1+r}{\alpha_2+r}} = B^{\frac{r}{2}}A_2^{\alpha_2/2}(A_2^{\alpha_2/2}B^rA_2^{\alpha_2/2})^{\frac{\beta}{\alpha_2+r}-1}A_2^{\alpha_2/2}B^{\frac{r}{2}}.$$

故引理 C 得证. ∎

下面我们证明定理 B 和定理 1 是等价的.

定理 B⇒定理 1 的证明

(i) 假设 $0\leqslant t<p\leqslant\theta\leqslant\min\{2p,1\}$. 不妨令 $r=\frac{-t}{2}, q=\frac{p-t}{\theta-t}$,则 $-1\leqslant 2r\leqslant 0, 0<q\leqslant 1$, 且由 $t\theta\leqslant p\theta\leqslant p-t+t\theta$ 可知 $t(\theta-p)\leqslant p(\theta-t)\leqslant p-t+t(\theta-p)$. 我们可得

$$t(1-\frac{p-t}{\theta-t})\leqslant p\leqslant\frac{p-t}{\theta-t}+t(1-\frac{p-t}{\theta-t}).$$

因此(1.2)式成立.

(a) 如果 $t+\theta\leqslant 2p$,那么(1.3)式成立.

(b) 如果 $t+\theta>2p$,那么 $0<q<\frac{1}{2}$,$(2p-1)(p-t)\leqslant(p-t)\theta\leqslant 2p(p-t)$. 则

$$t(\theta-p)-(p-t)\leqslant p(\theta+t-2p)\leqslant t(\theta-p).$$

因此(1.4)式成立.

(ii) 假设 $\max\{0,2p-1\}\leqslant\theta<p\leqslant t\leqslant 1$. 不妨令 $r=\frac{-t}{2}, q=\frac{p-t}{\theta-t}$, 那么 $-1\leqslant 2r<0$, $0<q\leqslant 1$,又因为 $t\theta\geqslant p\theta\geqslant p-t+t\theta$ 可以推得 $t(\theta-p)\geqslant p(\theta-t)\geqslant p-t+t(\theta-p)$. 故由 $\theta-t<0$, 可知

$$t(1-\frac{p-t}{\theta-t})\leqslant p\leqslant\frac{p-t}{\theta-t}+t(1-\frac{p-t}{\theta-t}).$$

因此(1.2)式成立.

(a) 如果 $\theta+t\geqslant 2p$, 那么 $\frac{1}{2}\leqslant q\leqslant 1$.

(b) 如果 $\theta+t<2p$, 那么 $0<q<\frac{1}{2}$,$(2p-1)(p-t)\geqslant(p-t)\theta\geqslant 2p(p-t)$,则

$$t(\theta-p)-(p-t)\geqslant p(\theta+t-2p)\geqslant t(\theta-p).$$

由 $\theta+t-2p<0$, 我们可得 $\frac{-2r(1-q)-q}{1-2q}\leqslant p\leqslant\frac{-2r(1-q)}{1-2q}$. 因此(1.4)式成立. 由定理 B, (ii)得证.

(iii) 假设 $0\leqslant t<p\leqslant 1, t\leqslant\theta\leqslant\min\{2p,1\}$. 由(i)，我们只须证明在 $t\leqslant\theta\leqslant p$ 的条件下定理成立. 取 θ_1 满足 $0\leqslant t<p\leqslant\theta_1\leqslant\min\{2p,1\}$. 由(i)，我们可得

$$A^{\theta_1-t}\geqslant(A^{\frac{-t}{2}}B^pA^{\frac{-t}{2}})^{\frac{\theta_1-t}{p-t}}.$$

因为$\dfrac{\theta-t}{\theta_1-t}\in[0,1]$，所以由 Löwner-Heinz 定理即得(1.5)式.

(iv) 仿照(iii)的证明即得(T_4). ▍

定理 1⇒定理 B 的证明

令 $r=-\dfrac{t}{2}, q=\dfrac{p-t}{\theta-t}$.

(Ⅰ) 假设 $\theta>t$. 由 (1.2)式，我们可得

$$t(\frac{\theta-p}{\theta-t})\leqslant p\leqslant\frac{p-t+t(\theta-p)}{\theta-t}.$$

则得 $t\theta\leqslant p\theta\leqslant p-t+t\theta$. 因此，$t\leqslant p, \theta\leqslant 1$.

(a) 如果(1.3)式成立，我们可得 $\dfrac{\theta+t}{2}\leqslant p\leqslant\theta$. 由于 $t=p$ 可以推出 $t=\theta$. 所以，$0\leqslant t<p\leqslant\theta\leqslant 1, \theta\leqslant 2p-t\leqslant 2p$. 由定理 1 的($T_1$)，(1.1)式得证.

(b) 如果(1.4)式成立，我们可得 $t<p\leqslant\dfrac{\theta+t}{2}, \dfrac{t(\theta-p)-(p-t)}{\theta+t-2p}\leqslant p\leqslant\dfrac{t(\theta-p)}{\theta+t-2p}$. 又 $\theta+t-2p>0$，$p-t>0$，则 $2p-t\leqslant\theta\leqslant 2p$.

因此，$0\leqslant t<p\leqslant 1$，$t\leqslant 2p-t\leqslant\theta\leqslant\min\{1,2p\}$. 由定理 1 的($T_3$)，(1.1)式得证.

(Ⅱ) 假设 $\theta<t$. 由(1.2)式，我们知 $t\theta\geqslant p\theta\geqslant p-t+t\theta$.

(a) 如果(1.3)式成立，则 $\dfrac{\theta+t}{2}\geqslant p\geqslant\theta$. 所以，$\theta\leqslant p<t\leqslant 1$，$0\leqslant\theta$，且 $t\geqslant 2p-t\geqslant 2p-1$. 由定理 1 的($T_2$) (1.1)式得证.

(b) 如果(1.4)式成立，我们可得 $t>p>\dfrac{\theta+t}{2}$，$\dfrac{t(\theta-p)-(p-t)}{\theta+t-2p}\leqslant p\leqslant\dfrac{t(\theta-p)}{\theta+t-2p}$.

由 $\theta+t-2p<0$，$p-t<0$，则 $2p-1\leqslant\theta\leqslant 2p$. 所以，$0\leqslant p<t\leqslant 1, \max\{0,2p-1\}\leqslant\theta<t$. 又由定理 1 的($T_4$)，(1.1)式得证. ▍

定理 2 的证明 (Ⅰ) 不妨设 $\theta_1=\min\{-4r,1\}$，则 $0\leqslant\alpha_2<-2r\leqslant\theta_1$. 由定理 1 的($T_1$)，可得

$$(A_2^{-\frac{\alpha_2}{2}}B^{-2r}A_2^{-\frac{\alpha_2}{2}})^{\frac{\theta_1-\alpha_2}{-2r-\alpha_2}}\leqslant A_2^{\theta_1-\alpha_2}. \tag{2.1}$$

记
$$X=(A_2^{\frac{\alpha_2}{2}}B^{2r}A_2^{\frac{\alpha_2}{2}})^{\frac{\alpha_2-\theta_1}{2r+\alpha_2}}.$$

又由 $0\leqslant\alpha_2<\alpha_1<\theta_1\leqslant\min\{2\alpha_1,1\}$ 和定理 1 的(T_1)对 $A_2^{-1}\geqslant A_1^{-1}$，可得

$$A_2^{\theta_1-\alpha_2}\leqslant(A_2^{\frac{-\alpha_2}{2}}A_1^{\alpha_1}A_2^{\frac{-\alpha_2}{2}})^{\frac{\theta_1-\alpha_2}{\alpha_1-\alpha_2}}.$$

记 $Y=(A_2^{\frac{-\alpha_2}{2}}A_1^{\alpha_1}A_2^{\frac{-\alpha_2}{2}})^{\frac{\alpha_2-\theta_1}{\alpha_1-\alpha_2}}$，则 $Y\leqslant X$. 令 $R=\dfrac{\alpha_2+2r}{\alpha_2-\theta_1}$，$P=\dfrac{\alpha_2-\alpha_1}{\alpha_2-\theta_1}$，$\theta_2=\dfrac{\alpha_2-\theta}{\alpha_2-\theta_1}$. 那么由 $\alpha_2<-2r<\alpha_1\leqslant\theta_1$ 可得 $0<R<P\leqslant 1$，又由 $-2r\leqslant\theta\leqslant\min\{2\alpha_1-\alpha_2,\theta_1\}$ 可得 $R\leqslant\theta_2\leqslant\min\{2P,1\}$. 由(Ⅰ)，可得 $0<R<P\leqslant 1, R\leqslant\theta_2\leqslant\min\{2P,1\}$. 由定理 1 的($T_3$)，可知

$$(X^{\frac{-R}{2}}Y^PX^{\frac{-R}{2}})^{\frac{\theta_2-R}{P-R}}\leqslant X^{\theta_2-R}.$$

所以

$$\{(A_2^{\frac{\alpha_2}{2}}B^{2r}A_2^{\frac{\alpha_2}{2}})^{\frac{1}{2}}A_2^{\frac{-\alpha_2}{2}}A_1^{\alpha_1}A_2^{\frac{-\alpha_2}{2}}(A_2^{\frac{\alpha_2}{2}}B^{2r}A_2^{\frac{\alpha_2}{2}})^{\frac{1}{2}}\}^{\frac{\theta+2r}{\alpha_1+2r}} \geqslant (A_2^{\frac{\alpha_2}{2}}B^{2r}A_2^{\frac{\alpha_2}{2}})^{\frac{\theta+2r}{\alpha_2+2r}}. \quad (2.2)$$

由(2.2)式和引理 C,即得(1.6)式.

(Ⅱ) 令 $\theta_1=\min\{-4r,1\}$,则 $0\leqslant\alpha_2<-2r\leqslant\theta_1$. 由定理 1 的($T_1$),可得

$$(A_1^{-\frac{\alpha_2}{2}}B^{-2r}A_1^{-\frac{\alpha_2}{2}})^{\frac{\theta_1-\alpha_2}{-2r-\alpha_2}} \leqslant A_1^{\theta_1-\alpha_2}.$$

记
$$X=(A_1^{\frac{\alpha_2}{2}}B^{2r}A_1^{\frac{\alpha_2}{2}})^{\frac{\alpha_2-\theta_1}{2r+\alpha_2}} \geqslant A_1^{\alpha_2-\theta_1}=Y. \quad (2.3)$$

记 $R=\dfrac{\alpha_2+2r}{\alpha_2-\theta_1}$, $P=\dfrac{\alpha_2-\alpha_1}{\alpha_2-\theta_1}$,$\theta_2=\dfrac{\alpha_2-\theta}{\alpha_2-\theta_1}$. 则 $\alpha_2<\alpha_1<-2r\leqslant\theta_1$ 可得 $0\leqslant P<R\leqslant1$,$\max\{\alpha_2,2\alpha_1-\theta_1\}\leqslant\theta\leqslant-2r$ 可得 $\max\{0,2P-1\}\leqslant\theta_2\leqslant R$. 因此定理 1 的 ($T_4$) 的条件得以满足,则

$$(X^{\frac{-R}{2}}Y^PX^{\frac{-R}{2}})^{\frac{\theta_2-R}{P-R}} \leqslant X^{\theta_2-R}.$$

所以

$$\{(A_1^{\frac{\alpha_2}{2}}B^{2r}A_1^{\frac{\alpha_2}{2}})^{\frac{1}{2}}A_1^{\alpha_1-\alpha_2}(A_1^{\frac{\alpha_2}{2}}B^{2r}A_1^{\frac{\alpha_2}{2}})^{\frac{1}{2}}\}^{\frac{\theta+2r}{\alpha_1+2r}} \geqslant (A_1^{\frac{\alpha_2}{2}}B^{2r}A_1^{\frac{\alpha_2}{2}})^{\frac{\theta+2r}{\alpha_2+2r}}. \quad (2.4)$$

由(2.4)式和引理 B, 可得

$$(B^rA_1^{\alpha_1}B^r)^{\frac{\theta+2r}{\alpha_1+2r}} \geqslant (B^rA_1^{\alpha_2}B^r)^{\frac{\theta+2r}{\alpha_2+2r}}. \quad (2.5)$$

因为 $0\leqslant\dfrac{\theta+2r}{\alpha_2+2r}\leqslant1$,$0\leqslant\alpha_2\leqslant1$, 由 L-H 定理和(2.5)式可得(1.6)式.

(Ⅲ) 若 $\theta_1=\max\{-4r-1,0\}$,则 $\theta_1\leqslant\theta\leqslant-2r<\alpha_2\leqslant1$. 由定理 1 的($T_2$), 即得(2.1)式. 又由 $\max\{0,2\alpha_1-1\}\leqslant\theta_1\leqslant\alpha_1<\alpha_2\leqslant1$ 和定理 1 的(T_2)对 $A_2^{-1}\geqslant A_1^{-1}$,可得

$$A_2^{\theta_1-\alpha_2} \leqslant (A_2^{\frac{-\alpha_2}{2}}A_1^{\alpha_1}A_2^{\frac{-\alpha_2}{2}})^{\frac{\theta_1-\alpha_2}{\alpha_1-\alpha_2}}.$$

此处若 X,Y 的记法和(Ⅰ)一样,则 $Y\leqslant X$. 令 R,P 和 θ_2 的记法也和(Ⅰ)一样,则由 $\alpha_2>-2r>\alpha_1\geqslant\theta_1$ 可以推得 $0<R<P\leqslant1$,$-2r\geqslant\theta\geqslant\max\{2\alpha_1-\alpha_2,\theta_1\}$ 可以推得 $R\leqslant\theta_2\leqslant\min\{2P,1\}$. 由定理 2 的条件(Ⅲ)得,$0<R<P\leqslant1$, 且 $R\leqslant\theta_2\leqslant\min\{2P,1\}$. 由定理 1 的($T_3$), (2.2)式得证, 由(2.2)式和引理 C,又可得 (1.6)式.

(Ⅳ) 不妨设 $\theta_1=\max\{-4r-1,0\}$, 则 $\max\{-4r-1,0\}=\theta_1\leqslant\theta\leqslant-2r<\alpha_2\leqslant1$. 由定理 1 的($T_2$), 得(2.3)式. 同上此处 X ,Y 的记法和(Ⅱ)一样,则 $Y\leqslant X$. 令 R,P 和 θ_2 的记法同(Ⅱ), 则由 $\theta_1\leqslant-2r<\alpha_1\leqslant\alpha_2$ 可以推得 $0\leqslant P<R\leqslant1$, $-2r\leqslant\theta\leqslant\min\{\alpha_2,2\alpha_1-\theta_1\}$ 可以推得 $\max\{0,2P-1\}\leqslant\theta_2\leqslant R$. 由定理 1 的($T_4$),又可推出(2.4)式, 由(2.4)式和引理 B, 可得(2.5)式. 又因 $0\leqslant\dfrac{\theta+2r}{\alpha_2+2r}\leqslant1$,$0\leqslant\alpha_2\leqslant1$, 由 L-H 定理和(2.5)式,得(1.6)式. ▌

注 我们说定理 2 是定理 1 的推广. 若在定理 2 中取 $A_1=A_2=A$. 如果在(Ⅰ)(或(Ⅲ))中令 $\alpha_1=\theta$, $r=\dfrac{-p}{2}$,$\alpha_2=t$. 则由(Ⅰ)(或(Ⅲ))可得(T_1)(或(T_2)),(1.6)式可以推出

$$B^{\frac{-p}{2}}A^{\theta}B^{\frac{-p}{2}} \geqslant (B^{\frac{-p}{2}}A^tB^{\frac{-p}{2}})^{\frac{\theta-p}{t-p}},$$

再由引理 A, 得 (1.5)式.

如果在(Ⅱ)中取 $\alpha_2=0$,$\alpha_1=p$, $r=\dfrac{-t}{2}$. 则(Ⅱ) 变为 $0\leqslant p<t\leqslant1$ 且 $\max\{0,2p-\min\{2t,1\}\}\leqslant\theta\leqslant t$. 而由 $0\leqslant p<t\leqslant1$ 得,$\max\{0,2p-\min\{2t,1\}\}=\max\{0,2p-1\}$. 所以我们说, (Ⅱ)等价于($T_4$),且(1.6)式等价于

$$(B^{\frac{-t}{2}}A^pB^{\frac{-t}{2}})^{\frac{\theta-t}{p-t}} \geqslant B^{\theta-t}, \quad (2.6)$$

因此,由 $B^{-1}\geqslant A^{-1}>0$ 和(2.6)式可得(1.5)式.

如果在(Ⅳ)中取 $\alpha_2=1, r=-\frac{t}{2}$, $\alpha_1=p$. 则得 $0\leqslant t<p\leqslant 1$ 和 $t\leqslant\theta\leqslant\min\{1,2p-\max\{0,2t-1\}\}$. 而由 $0\leqslant t<p\leqslant 1$ 得, $\min\{1,2p-\max\{0,2t-1\}\}=\min\{2p,1\}$. 所以我们说,(Ⅳ)等价于($T_3$),(1.6)式可以推出

$$(B^{\frac{-t}{2}}A^pB^{\frac{-t}{2}})^{\frac{\theta-t}{p-t}}\geqslant(B^{\frac{-t}{2}}AB^{\frac{-t}{2}})^{\frac{\theta-t}{1-t}}\geqslant B^{\theta-t}. \tag{2.7}$$

因此,由 $B^{-1}\geqslant A^{-1}>0$ 和(2.7)式可得(1.5)式.

推论 如果 $A_1\geqslant A_2\geqslant B>0$,那么(1.6)式在下面任一条件成立时成立

(1) $-\frac{1}{2}\leqslant r\leqslant-\frac{1}{4}$, $0\leqslant\alpha_2<-2r<\alpha_1\leqslant 1$ 且 $-2r\leqslant\theta\leqslant\min\{1,2\alpha_1-\alpha_2\}$.

(2) $-\frac{1}{2}\leqslant r\leqslant-\frac{1}{4}$, $0\leqslant\alpha_2\leqslant\alpha_1<-2r\leqslant 1$ 且 $\max\{\alpha_2,2\alpha_1-1\}\leqslant\theta\leqslant-2r$.

(3) $-\frac{1}{4}\leqslant r\leqslant 0$, $0\leqslant\alpha_1<-2r<\alpha_2\leqslant 1$ 且 $\max\{2\alpha_1-\alpha_2,0\}\leqslant\theta\leqslant-2r$.

(4) $-\frac{1}{4}\leqslant r\leqslant 0$, $0\leqslant-2r<\alpha_1\leqslant\alpha_2\leqslant 1$ 且 $-2r\leqslant\theta\leqslant\min\{\alpha_2,2\alpha_1\}$.

参 考 文 献

[1] Furuta T. $A\geqslant B\geqslant 0$ assures $(B^rA^pB^r)^{1/q}\geqslant B^{\frac{p+2r}{q}}$ for $r\geqslant 0, p\geqslant 0, q\geqslant 1$ with $(1+2r)q\geqslant p+2r$. Proc Amer Math Soc, 1987, **101**: 85-88

[2] Fujii M, Furuta T, Kamei E. Complements to the Furuta inequality. Proc Japan Acad, 1994, **70**A: 239-242

[3] Tanahashi K. The Furuta inequality in case of negative power. Proc Amer Math Soc, 1999, **127**: 1683-1692

[4] Furuta T, Yamazaki T, Yanagida M. Equivalence relations among Furuta-type inequalities with negative powers. Sci Math, 1998, **1**: 223-229

[5] Furuta T, Yamazaki T, Yanagida M. On a conjecture related Furuta-type inequalities with negative powers. Nihonkai Math J, 1998, **9**: 213-218

[6] Furuta T. Extension of the Furuta inequality and Ando-Hiai log-majorization. Linear Algebra Apple, 1995, **219**: 139-155

[7] Yang Changsen. An order preserving inequality Via Furuta inequality Ⅱ. Linear Algebra Apple, 2001, **331**: 89-100

[8] Fujii M, Furuta T, Kamei E. Complements to the Furuta inequality Ⅲ. Math Japon, 1997, **45**: 25-32

Generalization of Furuta-type Inequalities with Negative Powers

Yang Changsen　Hu Qingwen　Zuo Hongliang

(*College of Mathematics and Information Science*, *Henan Normal University*, *Xinxiang* 453007)

Abstract: First, the authors show that Furuta-type inequalities with negative powers are equivalent to Tanahashi's inequality. Next, the authors point out these inequalities can be generalized to an order preserving inequality.

Key words: Positive operator; Furuta-type inequality; Order preserving inequality.

MR(2000) Subject Classification: 47A63; 47B15