结构安全系数和非概率可靠性度量研究

乔心州， 仇原鹰

（西安电子科技大学 电子装备结构教育部重点实验室，陕西 西安 710071）

摘要： 研究了用区间变量描述不确定参数时，结构安全系数和非概率可靠性度量及其相互关系.讨论了中心、非概率及区间三种安全系数的关系.对可靠性指标、集合可靠度两种非概率可靠性度量进行了对比分析.最后建立了安全系数和非概率可靠性度量的函数关系.研究结果拓展了结构非概率设计理论.

关键词： 安全系数；非概率可靠性；可靠性指标；集合可靠度；区间变量

中图分类号：TB114.3 **文献标识码：**A **文章编号：**1001-2400(2009)05-0916-05

Study of safety factors and non-probabilistic reliability measures of structures

QIAO Xin-zhou， *QIU Yuan-ying*

（Ministry of Education Key Lab. of Electronic Equipment Structure，
Xidian Univ.，Xi'an 710071，China）

Abstract： The safety factors，the non-probabilistic reliability measures and their interrelations are investigated，when interval variables are utilized to describe the uncertain parameters of structures. First，three kinds of safety factors named central，non-probabilistic and interval factors are discussed. Then a comparison between two kinds of non-probabilistic reliability measures，which are reliability index and set-theoretic reliability measure，is made. Finally，the functions of the safety factors and the non-probabilistic reliability measures are established. The results extend the non-probabilistic design theory of structures.

Key Words： safety factor；non-probabilistic reliability；reliability index；set-theoretic reliability measure；interval variables

安全系数是传统结构设计的一个重要概念.由于传统采用安全系数的结构设计方法未考虑设计参数的不确定性，因而设计结果有时不尽合理.可靠性意义下的安全系数保留了传统安全系数的特点，同时考虑了结构参数分散程度的影响及设计对可靠性的要求，成为传统结构设计向可靠性设计过渡的中介和桥梁，近年来引起研究者的关注[1-2].

概率可靠性理论是研究较多的可靠性理论[3-4]，概率可靠性理论需要大量不确定性信息来确定其概率密度函数.在实际工程中，这些不确定性信息有时难于准确获知，但其界限易于确定.基于上述思想，文献[5]提出了基于凸集合模型的非概率可靠性概念.文献[6]在非概率可靠性概念基础上，提出以系统所允许的最大不确定性程度度量可靠性，是系统对不确定性的鲁棒性度量.文献 [7-8]指出了 Ben-Haim 鲁棒可靠性准则的不足，利用凸集合的偏序关系给出了新的非概率凸模型鲁棒可靠性准则.文献[9]采用区间变量描述结构的不确定参数，提出了一种非概率可靠性度量指标，将从坐标原点到失效面的最短距离作为结构可靠程度的度量.文献[10]提出了一种新的区间模型非概率集合可靠性度量，将结构安全域的体积和基本区间变量域的总体积之比作为结构可靠性度量.

可靠性意义下的安全系数与可靠性度量两者既有区别又有联系.文献[11]探讨了概率可靠性意义下的安全系数与可靠度的关系，指出两者是可以共存的，在某些情况下结构要求的可靠性程度可直接表示为安全

收稿日期：2008-06-16

基金项目：教育部留学回国人员实验基金资助(030401)

作者简介：乔心州(1974-)，男，西安电子科技大学博士研究生，E-mail：xzqiao@mail.xidian.edu.cn.

系数. 文献[2]运用可能性理论探讨了模糊安全系数和可靠度之间的关系.

笔者首先探讨了区间模型的 3 种安全系数;其次对区间模型的非概率可靠性指标和非概率集合可靠度进行对比分析,给出其函数关系及几何解释;最后探讨了安全系数与非概率可靠性度量的关系,得出了一些有益的结论,并通过算例验证了分析结论.

1　区间模型的安全系数及非概率可靠性度量

1.1　安全系数

设向量 $\boldsymbol{x}=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 表示与结构有关的区间不确定参数集合. 其中,$x_i\in x_i^{\mathrm{I}}=[\underline{x}_i,\bar{x}_i]$,$\underline{x}_i$,$\bar{x}_i$ 分别表示不确定结构参数的下界和上界. 设结构应力 S 和结构强度 R 分别表示为$S=S(x_1,x_2,\cdots,x_m)$,$R=R(x_{m+1},x_{m+2},\cdots,x_n)$. 当$S(\cdot)$和$R(\cdot)$均为区间参数的连续函数时,则应力$S$和强度$R$也为一区间变量,即$S\in S^{\mathrm{I}}=[\underline{S},\bar{S}]$,$R\in R^{\mathrm{I}}=[\underline{R},\bar{R}]$,$\underline{S}$,$\underline{R}$ 和$\bar{S}$,$\bar{R}$ 分别表示应力、强度的下界和上界,可通过区间分析[12]求得. 相应的应力 S 和强度R 的区间中心值和区间半径分别为

$$S^{\mathrm{c}}=(\underline{S}+\bar{S})/2 \quad , \quad R^{\mathrm{c}}=(\underline{R}+\bar{R})/2 \quad , \tag{1}$$

$$S^{\mathrm{r}}=(\bar{S}-\underline{S})/2 \quad , \quad R^{\mathrm{r}}=(\bar{R}-\underline{R})/2 \quad . \tag{2}$$

与概率可靠性安全系数类似,区间模型的安全系数主要有 3 种形式:(1)中心安全系数 n_m;(2) 非概率安全系数[1]n_{NR};(3) 区间安全系数 n. 3 种安全系数可由下式确定

$$n_m=R^{\mathrm{c}}/S^{\mathrm{c}}, \quad n_{NR}=\underline{R}/\bar{S}, \quad n=R/S \quad . \tag{3}$$

这里,$n\in[\underline{n},\bar{n}]$ 为一区间变量,当强度应力均为正值时,$\underline{n}=\underline{R}/\bar{S}$,$\bar{n}=\bar{R}/\underline{S}$.

1.2　非概率可靠性度量

设结构功能方程为

$$M(R,S)=R-S=0 \quad . \tag{4}$$

功能方程将结构参量空间分解为失效域($M(R,S)<0$)和安全域($M(R,S)>0$)两个部分. 令$R=R^{\mathrm{c}}+R^{\mathrm{r}}\delta_R$,$S=S^{\mathrm{c}}+S^{\mathrm{r}}\delta_S$,对功能方程进行标准化变换可得

$$M(\delta_R,\delta_S)=R^{\mathrm{c}}-S^{\mathrm{c}}+R^{\mathrm{r}}\delta_R-S^{\mathrm{r}}\delta_S=0 \quad , \tag{5}$$

式中 $\delta_R\in[-1,1]$,$\delta_S\in[-1,1]$ 分别为标准化强度区间变量和标准化应力区间变量. 式(5)为标准化变量空间的失效面.

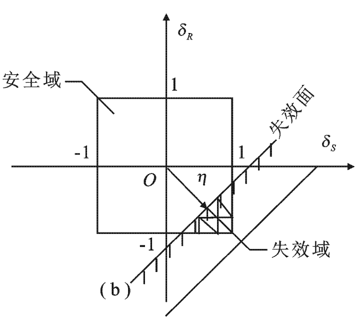

图 1　非概率可靠性指标 η 和非概率集合可靠度 R_{set}

图 1 为二维标准化区间向量空间的非概率可靠性指标 η[9] 和非概率集合可靠度 R_{set}[10] 的示意图. 非概率可靠性指标 η 用原点到失效面的最短距离(这里距离是按无穷范数$\|\cdot\|_\infty$ 度量)作为可靠性度量,非概率集合可靠度 R_{set} 用应力小于强度的可能性度量来度量可靠性,定义为安全域与基本变量区域总面积之比. 由上述定义可得

$$\eta=\begin{cases}(R^{\mathrm{c}}-S^{\mathrm{c}})/(R^{\mathrm{r}}+S^{\mathrm{r}}) \quad , & R^{\mathrm{c}}>S^{\mathrm{c}} \quad , \\ 0 \quad , & R^{\mathrm{c}}\leqslant S^{\mathrm{c}} \quad , \end{cases} \tag{6}$$

$$R_{\mathrm{set}}=\begin{cases}1 \quad , & \underline{R}>\bar{S} \quad , \\ 1-(\bar{S}-\underline{R})^2/(8R^{\mathrm{r}}S^{\mathrm{r}}) \quad , & \bar{S}>\underline{R} \quad , \\ 0 \quad , & \bar{R}<\underline{S} \quad . \end{cases} \tag{7}$$

2　区间模型的安全系数与非概率可靠性度量的关系解析

为方便讨论问题,假定强度 R 和应力 S 均为正值(若 R,S 均为负值则取其绝对值),强度的变异系数$C_R=R^{\mathrm{r}}/R^{\mathrm{c}}$,应力的变异系数$C_S=S^{\mathrm{r}}/S^{\mathrm{c}}$.

2.1　安全系数的关系解析

由式(3)推导可得

$$n_{NR}=\underline{n}=((1-C_R)/(1+C_S))n_m \quad , \quad \bar{n}=((1+C_R)/(1-C_S))n_m \quad . \tag{8}$$

$$n_{NR}=\underline{n}\leqslant n_m\leqslant\bar{n} \quad . \tag{9}$$

可见,中心安全系数 n_m 总属于区间安全系数 n,非概率安全系数 n_{NR} 等于区间安全系数 n 的下界,三者的差异由变异系数 C_R 和 C_S 决定的,当 C_R,$C_S\to 0$ 时,三者趋于一致.非概率安全系数与区间安全系数考虑了强度和应力参数的分散性,因而更客观地反映了设计要求.在基于区间模型的不确定性结构设计中,若考虑到结构在最坏情形也不失效,即绝对安全,这时把非概率安全系数(区间安全系数的下界)作为设计要求的安全系数.

2.2 非概率可靠性指标与非概率集合可靠度的关系解析

由式(6)和(7)可知,非概率可靠性指标 η 与非概率集合可靠度 R_{set} 存在如下关系:

(1) 当 $\eta\geqslant 1$,即 $\underline{R}\geqslant\bar{S}$,结构强度区间和应力区间不发生干涉时,$R_{\mathrm{set}}=1$.此时 $M(R,S)\geqslant 0$,结构可靠.

(2) 当 $0<\eta<1$,即 $\bar{R}>\bar{S}>\underline{R}>\underline{S}$,结构强度区间和应力区间发生干涉时,此时 $M(R,S)>0$ 和 $M(R,S)<0$ 均有可能.由于区间变量在区间内取任何值的可能性都存在,从严格意义上来讲,结构不可靠.此时,

$$R_{\mathrm{set}}=1-(R^{\mathrm{r}}+S^{\mathrm{r}})^2(1-\eta)^2/(8R^{\mathrm{r}}S^{\mathrm{r}}) \quad . \tag{10}$$

式(10)揭示了区间模型的非概率集合可靠度 R_{set} 与非概率可靠性指标 η 的关系.两者关系的几何解释:由图1可知,当失效面在图1(a)时,$\eta\geqslant 1$,基本变量区域均在安全域,$R_{\mathrm{set}}=1$.当失效面在图1(b)时,$0<\eta<1$,基本变量区域被失效面分成安全域和失效域两个部分,可靠度$R_{\mathrm{set}}=S_{\text{安全域}}/S_{\text{总}}=1-(R^{\mathrm{r}}+S^{\mathrm{r}})^2(1-\eta)^2/(8R^{\mathrm{r}}S^{\mathrm{r}})$.这时,可靠度与可靠性指标及强度和应力的区间半径有关.当强度和应力的区间半径一定时,基本变量区域总面积($4R^{\mathrm{r}}S^{\mathrm{r}}$)为一定值,$\eta$ 越小,则 R_{set} 越小.进一步,只要$R^{\mathrm{r}}/S^{\mathrm{r}}$ 为一定值,上述关系就成立.

2.3 安全系数与非概率可靠性指标的关系

由式(3)和式(6),可得安全系数与非概率可靠性指标存在如下关系:

$$\eta=(n_m-1)/(n_mC_R+C_S) \quad , \quad n_m=(1+\eta C_S)/(1-\eta C_R) \quad , \tag{11}$$

$$\begin{aligned} n_{NR}&=\underline{n}=(1+\eta C_S)(1-C_R)/((1-\eta C_R)(1+C_S)) \quad , \\ \bar{n}&=(1+\eta C_S)(1+C_R)/((1-\eta C_R)(1-C_S)) \quad . \end{aligned} \tag{12}$$

式(11)给出了中心安全系数和非概率可靠性指标的关系,这与文献[13]给出的概率可靠性意义下的中心安全系数与可靠性指标的关系是相似的.由式(12)可以看出,非概率安全系数与非概率可靠性指标具有等价性,即 $\eta>1$,$n_{NR}>1$;$0<\eta<1$,$0<n_{NR}<1$,反之亦然.上述关系也可由式(4)和(5)的等价性来确定.区间安全系数与非概率可靠性指标及强度、应力的变异系数有关.

2.4 安全系数与非概率集合可靠度的关系

文献[10]给出了区间安全系数 n 与非概率集合可靠度 R_{set} 的关系.笔者由式(3)和式(7)进一步推导出中心安全系数 n_m 和非概率安全系数 n_{NR} 与非概率集合可靠度 R_{set} 的如下关系:

$$R_{\mathrm{set}}=1-\frac{(1+C_S+C_Rn_m-n_m)^2}{8C_RC_Sn_m} \quad , \quad (\bar{R}>\bar{S}>\underline{R}>\underline{S}) \quad , \tag{13}$$

$$R_{\mathrm{set}}=1-\frac{(S^{\mathrm{c}}+S^{\mathrm{r}})^2(1-n_{NR})^2}{8R^{\mathrm{r}}S^{\mathrm{r}}}=1-\frac{(R^{\mathrm{c}}-R^{\mathrm{r}})^2(1/n_{NR}-1)^2}{8R^{\mathrm{r}}S^{\mathrm{r}}} \quad , \quad (\bar{R}>\bar{S}>\underline{R}>\underline{S}) \quad . \tag{14}$$

与 Elishakoff 给出的概率可靠度与中心安全系数的关系[11]相似,式(13)给出了非概率集合可靠度与中心安全系数及强度、应力的变异系数的关系.式(14)给出了非概率集合可靠度与非概率安全系数及结构强度、应力参数的关系.当强度和应力的区间半径一定时,基本变量区域总面积($4R^{\mathrm{r}}S^{\mathrm{r}}$)为一定值,$n_{NR}$ 越大,失效域面积($(\bar{S}-\underline{R})^2/2$)越小,则 R_{set} 越大.

上述讨论是针对功能函数为含两个区间变量的函数进行的.对于含多个区间变量的功能函数,当其解析式可以明确表达时,仍可按相同方法确定上述4种关系.

3 算 例

下面给出一个三元线性算例和一个二元非线性算例,来验证本文中的分析结论.

3.1 三元线性算例

设某结构体系破坏模式的功能方程为

$$R_1 + R_2/2^{1/2} - S = 0 \quad , \tag{15}$$

式中 $R_1 \in [200(1-C_{R_1}),200(1+C_{R_1})]$ MPa，$R_2 \in [300(1-C_{R_2}),300(1+C_{R_2})]$ MPa 为元件 1 和 2 的强度，$S \in [400(1-C_S),400(1+C_S)]$ MPa 为结构体系的应力.

用定义求解安全系数和非概率可靠性度量. 图 2 给出了安全系数及非概率可靠性度量随区间变量的变异系数 $C_{R_1} = C_{R_2} = C_S = \beta$ 的变化规律.

由图 2 可以看出：随着变异系数 β 的增大，中心安全系数 n_m 与区间安全系数 n 的界限的差异（上界逐渐增大，而下界逐渐减小）也逐渐增大；非概率可靠性指标 η 则逐渐减小；当 $0.01 \leqslant \beta \leqslant 0.0149$ 时，非概率集合可靠度 $R_{set} = 1$；当 $\beta > 0.0149$ 时，R_{set} 逐渐减小. 此时由于强度和应力比值为一定值，η 越小，则 R_{set} 越小，这与理论分析结果一致. $\beta = 0.0149$（图 2 中的 A 点）是结构绝对可靠的临界点，不难看出非概率可靠性指标 η 与非概率安全系数 n_{NR} 在判断结构是否绝对可靠上具有一致性.

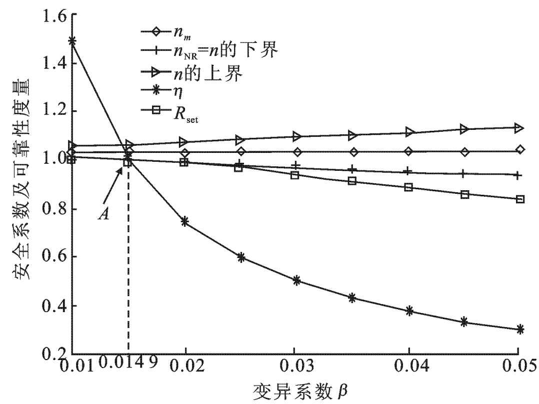

图 2　安全系数及非概率可靠性度量随变异系数 β 的变化曲线

3.2 二元非线性算例

已知某构件[10]的材料强度和工作应力区间分别为 $[100-\alpha, 100+\alpha]$ MPa，$[84,96]$ MPa. 其中 α 为描述材料强度分散程度的参数. 建立非线性功能函数

$$M(R,S) = R^2 - S^2 \quad . \tag{16}$$

令材料强度的变异系数 $\beta = \alpha/100$，用定义求解安全系数和非概率可靠性度量. 表 1 列出了不同变异系数时的安全系数和非概率可靠性度量. 图 3 给出了安全系数及非概率可靠性度量随变异系数 β 的变化规律.

表 1　不同变异系数时的安全系数和非概率可靠性度量

β	n_m	$n_{NR} = \underline{n}$	$\overline{n}$	η	R_{set}
0.02	1.2296	1.0421	1.4745	1.2622	1.0000
0.03	1.2302	1.0209	1.5303	1.1149	1.0000
0.04	1.2311	1.0000	1.5329	1.0000	1.0000
0.05	1.2322	0.9793	1.5625	0.9082	0.9958
0.06	1.2335	0.9588	1.5924	0.8333	0.9861
0.07	1.2351	0.9385	1.6226	0.7714	0.9732
0.08	1.2370	0.9184	1.6531	0.7194	0.9583

由表 1 和图 3 可知，随着构件材料强度变异系数的增大，3 种安全系数的差异逐渐变大；非概率可靠性指标逐渐减小；当 $\beta > 0.04$（应力区间和强度区间发生干涉）时，非概率安全系数、非概率可靠性指标和非概率集合可靠度均逐渐减小，具有一致性. 这与理论分析结果是吻合的.

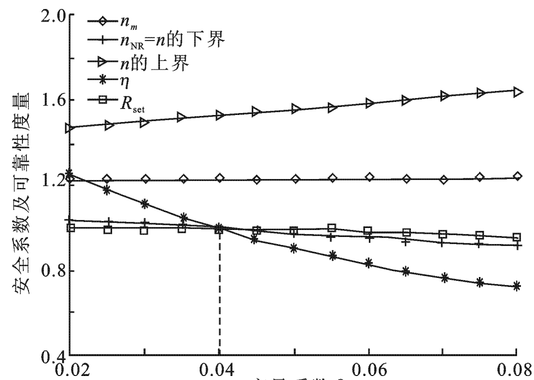

图 3　安全系数及非概率可靠性度量随变异系数 β 的变化曲线

4 结　　论

研究了区间模型的结构安全系数和非概率可靠性度量. 主要结论如下：

(1) 导出了中心安全系数、非概率安全系数及区间安全系数的函数关系. 3 种安全系数差异是由变异系数确定的，变异系数越大，差异越大.

(2) 建立了非概率可靠性指标和非概率集合可靠度之间的函数关系. 当结构强度区间和应力区间发生干涉时,若强度和应力的区间半径一定,非概率可靠性指标越大,非概率集合可靠度越大.

(3) 非概率集合可靠度和非概率可靠性指标均与中心安全系数及强度、应力的变异系数有关. 非概率安全系数与非概率可靠性指标在判断结构是否绝对可靠时是等价的.

参考文献:

[1] Ayyub B M, Gupta M M. Uncertainty Modeling and Analysis: Theory and Applications[M]. Amsterdam: North-Holland, 1994, 145-171.

[2] Elishakoff I, Rerracuti B. Fuzzy Sets Based Interpretation of the Safety Factor[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2006, 157(18): 2495-2512.

[3] 马洪波, 陈建军, 崔明涛. 随机参数桁架结构的有限元与可靠性分析[J]. 西安电子科技大学学报, 2003, 30(1): 103-107.
Ma Hongbo, Chen Jianjun, Cui Mingtao, et al. Analysis of the Finite Element and Reliability for Stochastic Truss Structures[J]. Journal of Xidian University, 2003, 30(1): 103-107.

[4] 吕震宙, 冯蕴雯. 结构可靠性问题的若干进展[J]. 力学进展, 2000, 30(1): 21-28.
Lu Zhenzhou, Feng Yunwen. Advances in Structural Reliability Studies[J]. Advances in Mechanics, 2000, 30(1): 21-28.

[5] Ben-Haim Y. A Non-probabilistic Concept of Reliability[J]. Structural Safety, 1994, 14(4): 227-245.

[6] Ben-Haim Y. A Non-probabilistic Measure of Reliability of Linear Systems Based on Expansion of Convex Model[J]. Structural Safety, 1995, 17(2): 91-109.

[7] Qiu Z P, Mueller P C, Frommer A. The New Non-probabilistic Criterion of Failure for Dynamical Systems Based on Convex Models[J]. Mathematical and Computer Modelling, 2004, 40(1-2): 201-215.

[8] 邱志平, 陈山奇, 王晓军. 结构非概率鲁棒可靠性准则[J]. 计算力学学报, 2004, 21(1):1-6.
Qiu Zhiping, Chen Shanqi, Wang Xiaojun. Criterion of the Nnon-probabilistic Rrobust Rreliability for Structures[J]. Journal of Computational Mechanics, 2004, 21(1): 1-6.

[9] 郭书祥, 吕震宙, 冯元生. 基于区间分析的结构非概率可靠性模型[J]. 计算力学学报, 2001, 18(1): 56-60.
Guo Shuxiang, Lu Zhenzhou, Feng Yuanshen. A Non-probabilistic Model of Structural Reliability Based on Interval Analysis[J]. Journal of Computational Mechanics, 2001, 18(1): 56-60.

[10] Wang X J, Qiu Z P, Elishakoff I. Non-probabilistic Set-theoretic Model for Structural Safety Measure[J]. Acta Mechanica, 2008, 198(1-2): 51-64.

[11] Elishakoff I. Interrelation Between Safety Factors and Reliability[R]. NASA/CR-2001-211309.

[12] Moore R E. Methods and Applications Systems of Interval Analysis[M]. Philadelphia: SIAM, 1979.

[13] 赵国藩, 金伟良, 贡金鑫. 结构可靠度理论[M]. 北京: 中国建筑工业出版社, 2000.

(编辑: 高西全)