2009,**29A**(6):

Mathematica Acta Scientia
数学物理学报

广义幂等算子差的可逆性 *

邓春源
(华南师范大学数学科学学院 广州 510631)

摘要: 设 P,Q 为 Hilbert 空间 H 上的幂等算子, 关于算子 P 的广义幂等算子类 $\omega(P)$ 定义为 $\omega(P)=\{A\in B(H): A^2=\alpha A+\beta P, AP=PA=A, P^2=P, \forall\alpha,\beta\in \mathbf{C}\}$. 对任意 $A\in\omega(P)$, $B\in\omega(Q)$ 使得 $A^2=\alpha A+\beta P$, $B^2=mB+nQ, \beta n\neq 0$, 我们得到了如下的结论: 值域 $R(PQ)$ 是闭的充要条件是值域 $R(AB)$ 是闭的; 如果 $P-Q$ 是可逆的, 则 $A-B$ 是可逆的.

关键词: 幂等算子; 可逆算子; 算子矩阵.

MR(2000) 主题分类: 47A05; 47L07 **中图分类号**: O177.2 **文献标识码**: A

文章编号: 1003-3998(2009)06–

1 引言

设 H 为可分的复 Hilbert 空间, $B(H)$ 表示 H 上有界线性算子全体. 如果算子 $P\in B(H)$ 满足 $P^2=P$, 则称 P 为幂等算子, 如果满足 $P^2=P=P^*$, 则称 P 为正交投影. 对算子 $T\in B(H)$ 和 H 的闭子空间 K, $R(T)$, $N(T)$, $\sigma(T)$, $T\mid_K$, I_K 分别表示算子 T 的值域, 算子 T 的核空间, 算子 T 的谱, 算子 T 在空间 K 上的限制和 K 上的恒等算子. 算子 $A\in B(H)$ 称为正算子, 如果对任意 $x\in H$, 都有 $(Ax,x)\geq 0$, 此时我们用 $A^{\frac{1}{2}}$ 表示算子 A 的正平方根. 算子 P 的广义幂等算子类 $\omega(P)$ 定义为 $\omega(P)=\{A\in B(H): A^2=\alpha A+\beta P, AP=PA=A, P^2=P, \forall\alpha,\beta\in\mathbf{C}\}$. 近年来, 人们对幂等算子和幂等算子的线性组合性质进行了广泛而深入的研究 (见 [1], [3-9]). 本文应用块算子矩阵理论和算子分块表示技巧, 来研究 Hilbert 空间上两个广义幂等算子差的可逆性. 我们证明了, 对任意两个广义幂等算子 $A^2=\alpha A+\beta P$, $B^2=mB+nQ$, 且 $\beta n\neq 0$, $A-B$ 的可逆性完全由 $P-Q$ 的可逆性决定; 算子 AB 的值域 $R(AB)$ 的闭性完全由算子 PQ 的值域 $R(PQ)$ 的闭性决定. 本文得到的主要结论如下:

定理 **1.** 设 $P,Q\in B(H)$ 是幂等算子, $A\in\omega(P)$ 满足 $A^2=\alpha A+\beta P$ 且 $\beta\neq 0$, $B\in\omega(Q)$ 满足 $B^2=mB+nQ$ 且 $n\neq 0$. 则 $R(AB)$ 是闭的充要条件是 $R(PQ)$ 是闭的.

定理 **2** 设 $P,Q\in B(H)$ 是幂等算子, $A\in\omega(P)$ 满足 $A^2=\alpha A+\beta P$ 且 $\beta\neq 0$, $B\in\omega(Q)$ 满足 $B^2=mB+nQ$ 且 $n\neq 0$. 如果 $P-Q$ 是可逆的, 那么 $A-B$ 是可逆的.

2 几个引理

为了证明主要结论, 我们先介绍几个引理.

收稿日期: 2007-12-08; 修订日期: 2008-10-06
E-mail: cydeng@scnu.edu.cn
* 基金项目: 国家自然科学基金 (10571113)

引理 2.1[2] 设 $A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$ 为 $H\oplus K$ 上的有界线性算子. $A\geq 0$ 的充要条件是 $A_{11}\geq 0$, $A_{22}\geq 0$, $A_{12}=A_{21}^*$, 并且存在从 K 到 H 的压缩算子 D 使得

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{11}^{\frac{1}{2}}DA_{22}^{\frac{1}{2}} \\ A_{22}^{\frac{1}{2}}D^*A_{11}^{\frac{1}{2}} & A_{22} \end{pmatrix}.$$

引理 2.2 设 $P,Q\in B(H)$ 满足 $P=P^2$ 和 $Q=Q^2=Q^*$. 如果 $P-Q$ 是可逆的，那么

$$N(I_{R(P)}-Q\mid_{R(P)})=\{0\},\quad N(Q\mid_{R(P)^\perp})=\{0\}.$$

证 如果 $P-Q$ 可逆，那么 $N(P-Q)=\{0\}$, $N(P^*-Q^*)=\{0\}$. 对任意 $x\in N(I_{R(P)}-Q\mid_{R(P)})$, 我们有 $Px=x,Qx=x$. 于是 $x\in N(P-Q)=\{0\}$. 如果 $x\in N(Q\mid_{R(P)^\perp})$, 那么 $P^*x=0$, $Q^*x=Qx=0$. 从而 $x\in N(P^*-Q^*)=\{0\}$.

引理 2.3[3] 如果 $\widetilde{A}=\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\in B(H\oplus K)$, $D\in B(K)$ 可逆，那么 $\widetilde{A}$ 可逆的充要条件是 $A-BD^{-1}C$ 可逆.

引理 2.4 设 $A\in B(H)$ 是正算子，则有下列结论成立：

(1) $R(A)\subseteq R(A^{\frac{1}{2}})$, $\overline{R(A)}=\overline{R(A^{\frac{1}{2}})}$, 其中 $\overline{K}$ 表示 K 的闭包;

(2) $R(A)$ 是闭的充要条件是 $R(A)=R(A^{\frac{1}{2}})$;

(3) $R(A)=H$ 的充要条件是 A 可逆.

引理 2.5 如果 $A\in\omega(P)$ 满足 $A^2=\alpha A+\beta P$ 且 $\beta\neq 0$, 那么 $R(A)=R(P)$, 并且在空间分解 $H=R(P)\oplus R(P)^\perp$ 的条件下，存在可逆算子 $A_1\in B(R(P))$ 使得

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & A_1P_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\quad P=\begin{pmatrix} I & P_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\quad A_1^{-1}=\frac{1}{\beta}(A_1-\alpha I). \tag{1}$$

证 如果 $\beta\neq 0$, 由 $A^2=\alpha A+\beta P$ 可得 $\beta P=A(A-\alpha I)$, 从而 $R(P)\subset R(A)$. 由于 P 是满足 $A=PA$ 的幂等算子，所以 $R(P)$ 是闭的，并且 $R(A)\subset R(P)$. 这说明 $R(A)=R(P)$ 是闭的，则在空间分解 $H=R(P)\oplus R(P)^\perp$ 的条件下， A 和 P 具有下列算子矩阵表示

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\quad P=\begin{pmatrix} I & P_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

在这种情形下，由 $AP=PA=A$ 可推导出 $A_2=A_1P_1$. 由于 $A^2=\alpha A+\beta P$, 所以 $A_1^2=\alpha A_1+\beta I_{R(P)}$. 于是 A_1 是可逆的，并且 $A_1^{-1}=\frac{1}{\beta}(A_1-\alpha I)$.

引理 2.6 设 $P=P^2$, $Q=Q^2=Q^*$, $R(P)=R(Q)$. 则 $P+P^*-I$ 总是可逆的，且满足

$$Q=P(P+P^*-I)^{-1}=(P+P^*-I)^{-1}P^*.$$

引理 2.7 对于幂等算子 P, 总存在可逆算子 $S\in B(H)$ 使得 $S^{-1}PS$ 是正交投影.

证 设 P 具有等式 (1) 中的形式，则有

$$\begin{pmatrix} I & P_1 \\ 0 & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & P_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & -P_1 \\ 0 & I \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

取 $S=\begin{pmatrix} I & -P_1 \\ 0 & I \end{pmatrix}$, 则 $S^{-1}=\begin{pmatrix} I & P_1 \\ 0 & I \end{pmatrix}$, 并且 $S^{-1}PS=\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 是 $R(P)$ 上的正交投影.

3 主要定理的证明

定理 1 的证明 首先我们证明 $N(A)=N(P)$. 由引理 2.5 可知, 在空间分解 $H=R(P)\oplus R(P)^{\perp}$ 的条件下, A 和 P 可以被表示为

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & A_1P_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\quad P=\begin{pmatrix} I & P_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

其中 $A_1\in B(R(P))$ 是可逆的, P_1 是从 $R(P)^{\perp}$ 到 $R(P)$ 的有界算子. 如果存在向量 $x=x_1+x_2$, $x_1\in R(P)$, $x_2\in R(P)^{\perp}$ 满足 $x\in N(A)$, 那么 $A_1x_1+A_1P_1x_2=0$. 由于 A_1 可逆, $x_1+P_1x_2=0$, i.e., $x\in N(P)$. 另一方面, 由 $A=AP$ 可知 $N(P)\subset N(A)$. 从而 $N(P)=N(A)$.

又由引理 2.5 可知, $R(A)$ 和 $R(B)$ 是闭的, 且满足 $R(A)=R(P)$, $R(B)=R(Q)$. 于是 $R(A^*)$ 是闭的, 且满足 $R(A^*)=N(A)^{\perp}=N(P)^{\perp}=R(P^*)$. 设 P_K 为闭子空间 K 上的正交投影, 那么

$$\begin{aligned} R(AB)\text{ 是闭的} &\iff R(AP_{R(B)})\text{ 是闭的}\\ &\iff R(P_{R(B)}A^*)\text{ 是闭的}\\ &\iff R(P_{R(B)}P_{R(A^*)})\text{ 是闭的}\\ &\iff R(P_{R(Q)}P_{R(P^*)})\text{ 是闭的}\quad(\text{用引理 2.6})\\ &\iff R((Q+Q^*-I)^{-1}Q^*P^*(P+P^*-I)^{-1})\text{ 是闭的}\\ &\iff R(Q^*P^*)\text{ 是闭的}\\ &\iff R(PQ)\text{ 是闭的}. \end{aligned}$$

定理 2 的证明 证明分四步:

第一步：设 P 和 Q 是两个幂等算子满足 $A^2=\alpha A+\beta P$, $B^2=mB+nQ$. 由引理 2.7 知, 存在可逆算子 S 使得 $S^{-1}QS$ 是一正交投影. 由于 $P-Q$ 和 $A-B$ 是可逆的充要条件是 $S^{-1}PS-S^{-1}QS$ 和 $S^{-1}AS-S^{-1}BS$ 是可逆的, 为了证明定理 2, 不失一般性, 我们可以假设 P 和 Q 有一个为正交投影. 不妨设 Q 是正交投影, 自然 Q 也为正算子. 在空间分解

$$H=N(Q\mid_{R(P)})\oplus(R(P)\ominus N(Q\mid_{R(P)}))\oplus(R(P)^{\perp}\ominus N(I_{R(P)^{\perp}}-Q\mid_{R(P)^{\perp}}))\oplus N(I_{R(P)^{\perp}}-Q\mid_{R(P)^{\perp}})$$

的条件下, 由引理 2.1 和引理 2.2 知, 如果 $P-Q$ 是可逆的, P 和 Q 有如下的算子矩阵表示:

$$P=\begin{pmatrix} I & & P_{13} & P_{14} \\ & I & P_{23} & P_{24} \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix},\quad Q=\begin{pmatrix} 0 & & & \\ & Q_{11} & Q_{11}^{\frac{1}{2}}DQ_{22}^{\frac{1}{2}} & \\ & Q_{22}^{\frac{1}{2}}D^*Q_{11}^{\frac{1}{2}} & Q_{22} & \\ & & & I \end{pmatrix},\tag{2}$$

其中表达式 (2) 中省略的元素为 0. 记 $H_1=N(Q\mid_{R(P)})$, $H_2=R(P)\ominus N(Q\mid_{R(P)})$, $H_3=R(P)^{\perp}\ominus N(I_{R(P)^{\perp}}-Q\mid_{R(P)^{\perp}})$, $H_4=N(I_{R(P)^{\perp}}-Q\mid_{R(P)^{\perp}})$, 则 P_{ij} 为从 H_j 到 H_i 的算子,

$1 \leq i \leq 2$, $3 \leq j \leq 4$, 由引理 2.2 知， H_2 上的算子 Q_{11} 和 $I-Q_{11}$, H_3 上的算子 Q_{22} 和 $I-Q_{22}$ 都是单射正压缩算子，由引理 2.1 知，从 H_3 到 H_2 的算子 D 是压缩的．由于 Q 为正交投影，

$$\begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{11}^{\frac{1}{2}}DQ_{22}^{\frac{1}{2}} \\ Q_{22}^{\frac{1}{2}}D^*Q_{11}^{\frac{1}{2}} & Q_{22} \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{11}^{\frac{1}{2}}DQ_{22}^{\frac{1}{2}} \\ Q_{22}^{\frac{1}{2}}D^*Q_{11}^{\frac{1}{2}} & Q_{22} \end{pmatrix},$$

即

$$\begin{pmatrix} Q_{11}^2 + Q_{11}^{\frac{1}{2}}DQ_{22}D^*Q_{11}^{\frac{1}{2}} & Q_{11}^{\frac{3}{2}}DQ_{22}^{\frac{1}{2}} + Q_{11}^{\frac{1}{2}}DQ_{22}^{\frac{3}{2}} \\ Q_{22}^{\frac{1}{2}}D^*Q_{11}^{\frac{3}{2}} + Q_{22}^{\frac{3}{2}}D^*Q_{11}^{\frac{1}{2}} & Q_{22}^2 + Q_{22}^{\frac{1}{2}}D^*Q_{11}DQ_{22}^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{11}^{\frac{1}{2}}DQ_{22}^{\frac{1}{2}} \\ Q_{22}^{\frac{1}{2}}D^*Q_{11}^{\frac{1}{2}} & Q_{22} \end{pmatrix}.$$

比较上述方程的两端，我们得到下列算子方程组：

$$\begin{cases} Q_{11}^2 + Q_{11}^{\frac{1}{2}}DQ_{22}D^*Q_{11}^{\frac{1}{2}} = Q_{11}, \\ Q_{11}^{\frac{3}{2}}DQ_{22}^{\frac{1}{2}} + Q_{11}^{\frac{1}{2}}DQ_{22}^{\frac{3}{2}} = Q_{11}^{\frac{1}{2}}DQ_{22}^{\frac{1}{2}}, \\ Q_{22}^{\frac{1}{2}}D^*Q_{11}^{\frac{3}{2}} + Q_{22}^{\frac{3}{2}}D^*Q_{11}^{\frac{1}{2}} = Q_{22}^{\frac{1}{2}}D^*Q_{11}^{\frac{1}{2}}, \\ Q_{22}^2 + Q_{22}^{\frac{1}{2}}D^*Q_{11}DQ_{22}^{\frac{1}{2}} = Q_{22}. \end{cases} \tag{3}$$

注意到 Q_{11} 和 Q_{22} 是单射正算子，解方程组 (3) 可得

$$\begin{cases} Q_{22} = D^*(I-Q_{11})D, \\ DD^* = I, \\ D^*D = I. \end{cases} \tag{4}$$

从而 $0, 1 \notin \sigma_p(Q_{11}) \cup \sigma_p(Q_{22})$, D 为从 H_3 到 H_2 的酉算子．这时

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & Q_{11} & Q_{11}^{\frac{1}{2}}(I-Q_{11})^{\frac{1}{2}}D & \\ & D^*Q_{11}^{\frac{1}{2}}(I-Q_{11})^{\frac{1}{2}} & D^*(I-Q_{11})D & \\ & & & I \end{pmatrix}, \tag{5}$$

$P-Q$ 可以表示为

$$P-Q = \begin{pmatrix} I & & P_{13} & P_{14} \\ & I-Q_{11} & P_{23} - Q_{11}^{\frac{1}{2}}(I-Q_{11})^{\frac{1}{2}}D & P_{24} \\ & -D^*Q_{11}^{\frac{1}{2}}(I-Q_{11})^{\frac{1}{2}} & -D^*(I-Q_{11})D & \\ & & & -I \end{pmatrix}. \tag{6}$$

如果 $P-Q$ 可逆，那么 $R(D^*Q_{11}^{\frac{1}{2}}(I-Q_{11})^{\frac{1}{2}}, D^*(I-Q_{11})D) = H_3$. 由引理 2.4 知 $R(D^*Q_{11}^{\frac{1}{2}}(I-Q_{11})^{\frac{1}{2}}, D^*(I-Q_{11})D) = R([D^*(I-Q_{11})^{\frac{1}{2}}D][D^*Q_{11}^{\frac{1}{2}}, D^*(I-Q_{11})^{\frac{1}{2}}D]) \subseteq R(D^*(I-Q_{11})^{\frac{1}{2}}D)$,

$$R(D^*(I-Q_{11})^{\frac{1}{2}}D) = H_3.$$

再利用引理 2.4 可得

$$R(D^*(I-Q_{11})D)=H_3.$$

由于 D 是从 H_3 到 H_2 的酉算子，所以 $D^*(I-Q_{11})D$ 可逆，由引理 2.3 可得 $P-Q$ 可逆的充要条件是

$$\begin{aligned}&I-Q_{11}-(P_{23}-Q_{11}^{\frac{1}{2}}(I-Q_{11})^{\frac{1}{2}}D)D^*(I-Q_{11})^{-1}DD^*Q_{11}^{\frac{1}{2}}(I-Q_{11})^{\frac{1}{2}}\\=&I-P_{23}D^*(I-Q_{11})^{-\frac{1}{2}}Q_{11}^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

可逆.

第二步：如果 P 具有形式 (2), 由引理 2.5 知，在空间分解 $H=\sum\limits_{i=1}^{4}H_i$ 的条件下， A 可以被表示为

$$A=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12} & A_{11}P_{13}+A_{12}P_{23} & A_{11}P_{14}+A_{12}P_{24}\\ A_{21} & A_{22} & A_{21}P_{13}+A_{22}P_{23} & A_{21}P_{14}+A_{22}P_{24}\\ & & 0 & \\ & & & 0\end{pmatrix}, \tag{7}$$

这里

$$A_1=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{pmatrix}\text{是可逆算子.}$$

第三步：在空间分解 $H=\sum\limits_{i=1}^{4}H_i$ 的条件下，设 $B=(B_{ij})_{1\le i,j\le 4}$, Q 具有形式 (5). 记 $M_0=Q_{11}^{\frac{1}{2}}(I-Q_{11})^{\frac{1}{2}}D, N=D^*(I-Q_{11})D,$ 则有 $M_0^*=D^*Q_{11}^{\frac{1}{2}}(I-Q_{11})^{\frac{1}{2}}$. 由于 $B=BQ=QB$, 可得

$$\begin{aligned}(B_{ij})_{1\le i,j\le 4}&=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & B_{22}Q_{11}+B_{23}M_0^* & B_{22}M_0+B_{23}N & B_{24}\\ 0 & B_{32}Q_{11}+B_{33}M_0^* & B_{32}M_0+B_{33}N & B_{34}\\ 0 & B_{42}Q_{11}+B_{43}M_0^* & B_{42}M_0+B_{43}N & B_{44}\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & Q_{11}B_{22}+M_0B_{32} & Q_{11}B_{23}+M_0B_{33} & Q_{11}B_{24}+M_0B_{34}\\ 0 & M_0^*B_{22}+NB_{32} & M_0^*B_{23}+NB_{33} & M_0^*B_{24}+NB_{34}\\ 0 & B_{42} & B_{43} & B_{44}\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

比较上式两端可得

$$\begin{cases}B_{22}=B_{22}Q_{11}+B_{23}M_0^*,\\ B_{23}=Q_{11}B_{23}+M_0B_{33},\\ B_{24}=Q_{11}B_{24}+M_0B_{34},\\ B_{32}=B_{32}Q_{11}+B_{33}M_0^*,\\ B_{42}=B_{42}Q_{11}+B_{43}M_0^*.\end{cases}$$

由第一步的证明知 $I-Q_{11}$ 可逆．取 $M=Q_{11}^{\frac{1}{2}}(I-Q_{11})^{-\frac{1}{2}}D$, 可得

$$\begin{cases} B_{23}=Q_{11}^{\frac{1}{2}}(I-Q_{11})^{-\frac{1}{2}}DB_{33}=MB_{33}, \\ B_{22}=B_{23}D^*Q_{11}^{\frac{1}{2}}(I-Q_{11})^{-\frac{1}{2}}=MB_{33}M^*, \\ B_{24}=Q_{11}^{\frac{1}{2}}(I-Q_{11})^{-\frac{1}{2}}DB_{34}=MB_{34}, \\ B_{32}=B_{33}D^*Q_{11}^{\frac{1}{2}}(I-Q_{11})^{-\frac{1}{2}}=B_{33}M^*, \\ B_{42}=B_{43}D^*Q_{11}^{\frac{1}{2}}(I-Q_{11})^{-\frac{1}{2}}=B_{43}M^*. \end{cases}$$

从而

$$B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & MB_{33}M^* & MB_{33} & MB_{34} \\ 0 & B_{33}M^* & B_{33} & B_{34} \\ 0 & B_{43}M^* & B_{43} & B_{44} \end{pmatrix}. \tag{8}$$

令 $T=I\oplus M\oplus I\oplus I$. 由于 Q_{11} 为单射， D 是酉算子，并且 $M=Q_{11}^{\frac{1}{2}}(I-Q_{11})^{-\frac{1}{2}}D$, 推知 T 是单射．这时

$$Q=T\left(0\oplus\begin{pmatrix} D^*(I-Q_{11})D & D^*(I-Q_{11})D \\ D^*(I-Q_{11})D & D^*(I-Q_{11})D \end{pmatrix}\oplus I\right)T^*,$$

$$B=T\left(0\oplus\begin{pmatrix} B_{33} & B_{33} & B_{34} \\ B_{33} & B_{33} & B_{34} \\ B_{43} & B_{43} & B_{44} \end{pmatrix}\right)T^*.$$

由 $B^2=mB+nQ$ 可得

$$\begin{aligned} &T\begin{pmatrix} 0 & & & \\ & B_{33} & B_{33} & B_{34} \\ & B_{33} & B_{33} & B_{34} \\ & B_{43} & B_{43} & B_{44} \end{pmatrix}T^*T\begin{pmatrix} 0 & & & \\ & B_{33} & B_{33} & B_{34} \\ & B_{33} & B_{33} & B_{34} \\ & B_{43} & B_{43} & B_{44} \end{pmatrix}T^* \\ =\ & mT\begin{pmatrix} 0 & & & \\ & B_{33} & B_{33} & B_{34} \\ & B_{33} & B_{33} & B_{34} \\ & B_{43} & B_{43} & B_{44} \end{pmatrix}T^*+nT\begin{pmatrix} 0 & & & \\ & D^*(I-Q_{11})D & D^*(I-Q_{11})D & \\ & D^*(I-Q_{11})D & D^*(I-Q_{11})D & \\ & & & I \end{pmatrix}T^*. \end{aligned}$$

化简得

$$\begin{pmatrix} 0 & & & \\ & B_{33} & B_{33} & B_{34} \\ & B_{33} & B_{33} & B_{34} \\ & B_{43} & B_{43} & B_{44} \end{pmatrix}T^*T\begin{pmatrix} 0 & & & \\ & B_{33} & B_{33} & B_{34} \\ & B_{33} & B_{33} & B_{34} \\ & B_{43} & B_{43} & B_{44} \end{pmatrix}$$

$$= m\begin{pmatrix} 0 & & & \\ & B_{33} & B_{33} & B_{34} \\ & B_{33} & B_{33} & B_{34} \\ & B_{43} & B_{43} & B_{44} \end{pmatrix} + n\begin{pmatrix} 0 & & & \\ & D^*(I-Q_{11})D & D^*(I-Q_{11})D & \\ & D^*(I-Q_{11})D & D^*(I-Q_{11})D & \\ & & & I \end{pmatrix}.$$

上述方程左乘 $I \oplus \begin{pmatrix} -I & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \oplus I$, 右乘 $I \oplus \begin{pmatrix} I & 0 \\ -I & I \end{pmatrix} \oplus I$ 可得

$$\begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & B_{33} & B_{33} & B_{34} \\ & B_{43} & B_{43} & B_{44} \end{pmatrix} T^*T \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & B_{33} & B_{34} \\ & & B_{33} & B_{34} \\ & & B_{43} & B_{44} \end{pmatrix} = m\begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & B_{33} & B_{34} \\ & & B_{43} & B_{44} \end{pmatrix} + n\begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & D^*(I-Q_{11})D & \\ & & & I \end{pmatrix}.$$

由于 $T^*T = I \oplus D^*Q_{11}(I-Q_{11})^{-1}D \oplus I \oplus I$,

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & B_{33} & B_{33} & B_{34} \\ & B_{43} & B_{43} & B_{44} \end{pmatrix} T^*T \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & B_{33} & B_{34} \\ & & B_{33} & B_{34} \\ & & B_{43} & B_{44} \end{pmatrix} \\ =& \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & B_{33}D^*(I-Q_{11})^{-1}DB_{33} + B_{34}B_{43} & B_{33}D^*(I-Q_{11})^{-1}DB_{34} + B_{34}B_{44} \\ & & B_{43}D^*(I-Q_{11})^{-1}DB_{33} + B_{44}B_{43} & B_{43}D^*(I-Q_{11})^{-1}DB_{34} + B_{44}^2 \end{pmatrix} \\ =& \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & B_{33} & B_{34} \\ & & B_{43} & B_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & D^*(I-Q_{11})^{-1}D & \\ & & & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & B_{33} & B_{34} \\ & & B_{43} & B_{44} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & B_{33} & B_{34} \\ & & B_{43} & B_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & D^*(I-Q_{11})^{-1}D & \\ & & & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & B_{33} & B_{34} \\ & & B_{43} & B_{44} \end{pmatrix} \\ =& m\begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & B_{33} & B_{34} \\ & & B_{43} & B_{44} \end{pmatrix} + n\begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & D^*(I-Q_{11})D & \\ & & & I \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

令 $B_1=\begin{pmatrix} B_{33} & B_{34} \\ B_{43} & B_{44} \end{pmatrix}$, $Q_1=\begin{pmatrix} D^*(I-Q_{11})D & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$. 则有

$$B_1Q_1^{-1}B_1=mB_1+nQ_1.$$

由 Q_1 可逆并满足 $n\neq 0$, 可知 B_1 是可逆的且

$$B_1^{-1}=\frac{1}{n}(Q_1^{-1}B_1Q_1^{-1}-mQ_1^{-1}).$$

第四步：由等式 (7) 和等式 (8) 知,

$$A-B=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{11}P_{13}+A_{12}P_{23} & A_{11}P_{14}+A_{12}P_{24} \\ A_{21} & A_{22}-MB_{33}M^* & A_{21}P_{13}+A_{22}P_{23}-MB_{33} & A_{21}P_{14}+A_{22}P_{24}-MB_{34} \\ 0 & -B_{33}M^* & -B_{33} & -B_{34} \\ 0 & -B_{43}M^* & -B_{43} & -B_{44} \end{pmatrix}. \tag{9}$$

由第一步的证明可知 $I-P_{23}M^*$ 可逆，则存在可逆算子 G 和 S:

$$G=\begin{pmatrix} I & & & \\ & I & -M & \\ & & I & \\ & & & I \end{pmatrix},\quad S=\begin{pmatrix} I & P_{13}M^*(I-P_{23}M^*)^{-1} & & \\ & (I-P_{23}M^*)^{-1} & & \\ & -M^*(I-P_{23}M^*)^{-1} & -I & \\ & & & -I \end{pmatrix}.$$

这样 $A-B$ 可逆就等价于 $G(A-B)S$ 可逆．直接计算可得

$$G(A-B)S=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & -(A_{11}P_{13}+A_{12}P_{23}) & -(A_{11}P_{14}+A_{12}P_{24}) \\ A_{21} & A_{22} & -(A_{21}P_{13}+A_{22}P_{23}) & -(A_{21}P_{14}+A_{22}P_{24}) \\ 0 & & B_{33} & B_{34} \\ 0 & & B_{43} & B_{44} \end{pmatrix}.$$

由第二步证明知

$$A_1=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

可逆．由第三步的证明知，如果 $P-Q$ 可逆，那么

$$B_1=\begin{pmatrix} B_{33} & B_{34} \\ B_{43} & B_{44} \end{pmatrix}$$

可逆．这样就证明了如果 $P-Q$ 可逆，那么 $A-B$ 也可逆．证毕.

设 $A\in\omega(P)$ 满足 $A^2=\alpha A+\beta P,\beta\neq 0$, $B\in\omega(Q)$ 满足 $B^2=mB+nQ,n\neq 0$. 应当注意到，$P-Q$ 可逆仅为 $A-B$ 可逆的一个充分条件，而不是必要条件，下面的例子可以说明这一点.

例 1 分别取幂等算子 P,Q 和广义幂等算子 A,B 为

$$P=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\quad Q=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\quad A=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&1&0\\0&2&2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0&0&0\\2&2&2\\0&0&3\end{pmatrix}.$$

则有 $A\in\omega(P)$, $B\in\omega(Q)$, $A^2=3A-2P$, $B^2=5B-6Q$, 显然

$$A-B=\begin{pmatrix}0&1&0\\-2&-1&-2\\0&2&-1\end{pmatrix}\text{可逆}.$$

但是

$$P-Q=\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\text{不可逆}.$$

如果 P 和 Q 为两个正交投影. 在文献 [3] 中，杜鸿科证明了，如果 $R(P)\cap R(Q)=\{0\}$, 那么 $P+Q$ 可逆的充要条件是 $P-Q$ 可逆. 据此我们可以得到定理 2 的一个推论.

推论 1 设 $P,Q\in B(H)$ 为两个正交投影且满足 $R(P)\cap R(Q)=\{0\}$, $A\in\omega(P)$ 满足 $A^2=\alpha A+\beta P,\beta\neq 0$, $B\in\omega(Q)$ 满足 $B^2=mB+nQ,n\neq 0$. 如果 $P\pm Q$, $I-PQ$ 和 $P+Q-PQ$ 中有一个是可逆的，那么 $A-B$ 也是可逆的.

证 由等式 (2) 可知，如果 $P,Q\in B(H)$ 为两个正交投影且满足 $R(P)\cap R(Q)=\{0\}$, 那么 $P+Q$ 有如下算子矩阵表示

$$\begin{aligned}P+Q&=\begin{pmatrix}I&0&0&0\\0&I&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&Q_{11}&Q_{11}^{\frac12}D_1Q_{22}^{\frac12}&0\\0&Q_{22}^{\frac12}D_1^*Q_{11}^{\frac12}&Q_{22}&0\\0&0&0&I\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}I&0&0&0\\0&I+Q_{11}&Q_{11}^{\frac12}(I-Q_{11})^{\frac12}D_1&0\\0&D_1^*Q_{11}^{\frac12}(I-Q_{11})^{\frac12}&D_1^*(I-Q_{11})^{\frac12}D_1&0\\0&0&0&I\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

由 $P+Q$ 的可逆性可知 $I-Q_{11}$ 可逆. 直接计算可得 $I-PQ$ 和 $P+Q-PQ$ 都可逆. 于是, 由定理 2 可得 $A-B$ 可逆.

参 考 文 献

[1] Benitez J, Thome N. Idempotency of linear combinations of an idempotent matrix and a t-potent matrix that commute. Linear Algebra and its Applications, 2005, **403**: 414–418

[2] Du Hongke, Yao Xiyan, Deng Chunyuan. Invertibility of linear combinations of two idempotents. Proceedings of the American Mathematical Society, 2005, **134**: 1451–1457

[3] Du Hongke. Operator matrix forms of positive operator matrices. Chinese Quart J Math, 1992, **7**: 9–11

[4] Choi Man-Duen, Wu Pei Yuan. Convex combinations of projections. Linear Algebra and its Applications, 1990, **136**: 25–42

[5] Fang Li, Ji Guoxing, Pang Yongfeng. Maps preserving the idempotency of products of operators. Linear Algebra and its Applications, 2007, **426**(1): 40–52

[6] Halim Özdemir, Ahmet Yasar Özban. On idempotency of linear combinations of idempotent matrices. Applied Mathematics and Computation, 2004, **159**(2): 439–448

[7] Zhou Jinhua, Wang Guorong. Block idempotent matrices and generalized Schur complement. Applied Mathematics and Computation, 2007, 188: 246–256

[8] 姚喜妍，杜鸿科. Hilbert 空间上两个正交射影的乘积. 数学物理学报， 2007, **27**(4): 696–701

[9] Chunyuan Deng. A new characterization of the closedness of the sum of two subspaces. Acta Mathematica Scientia, 2008, **28B**: 17–23

Invertibility of Differences of Two Generalized Idempotent Operators

Deng Chunyuan

(*School of Mathematics Science, South China Normal University, Guangzhou 510631*)

Abstract: Let P and Q be two idempotents on a Hilbert space H. The set $\omega(P)$ of generalized idempotent operators with respect to P was defined by $\omega(P) = \{A \in B(H) : A^2 = \alpha A + \beta P, AP = PA = A, P^2 = P, \text{ for some } \alpha, \beta \in \mathbf{C}\}$. In this note, we prove that the invertibility of $A-B$ is completely determined by the invertibility of $P-Q$, and $R(AB)$ is closed if and only if $R(PQ)$ is closed for arbitrary $A \in \omega(P)$ and $B \in \omega(Q)$ such that $A^2 = \alpha A+\beta P, B^2 = mB+nQ$, where $\beta n \neq 0$, α and m are arbitrary.

Key words: Idempotent; Invertibility; Operator matrix.

MR(2000) Subject Classification: 47A05; 47L07