2005,**25A**(3):381－385

Acta Mathematica Scientia
数学物理学报

广义测不准关系与 Reissner-Nordstrom-de Sitter 黑洞熵*

周宙安[1,3]　索标[2,3]　刘文彪[3]

([1] 湖南科技学院物理系　永州 425006；[2] 青岛大学师范学院物理系　青岛 266071；
[3] 北京师范大学物理学系,北京师范大学理论物理研究所　北京 100875)

摘要:针对 Reissner-Nordstrom-de Sitter 时空背景,利用经广义测不准关系改进的薄层 brick-wall 方法计算了黑洞熵。结果表明,由这种方法得到的黑洞熵上限与它的外视界和宇宙视界面积之和成正比,和人们预期的结果相符。从中揭示了黑洞熵与视界面积之间的内在联系,也进一步表明了黑洞熵是视界面上量子态的熵,是一种量子效应。由广义测不准关系的引入看到,brick-wall 方法与引力场量子化可能存在着一些内在的联系。

关键词:Reissner-Nordstrom-de Sitter 黑洞;视界;熵;测不准关系;薄层 brick-wall 方法.

MR(2000)主题分类:85C　　**中图分类号**:P145.8　　**文献标识码**:A

文章编号:1003-3998(2005)03-381-05

1　引言

在 20 世纪 70 年代,Bekenstein, Hawking 和 Bardeen 等人提出了黑洞熵与其视界面积成正比的一整套理论[1,2],此后对黑洞热力学的研究取得了许多成就。1985 年‘t Hooft 提出了 brick-wall 方法[3],研究了 Schwarzschild 黑洞背景下标量场的统计性质,并得出了黑洞附近标量场的统计熵与其面积成正比的结论,进而人们用 brick-wall 方法研究了各种黑洞背景的熵[4-9],均获得了预期的成功结果。事实上,把用 brick-wall 模型计算得到的结果认同于黑洞熵,主要的支持来自于纠缠熵解释[10,11]:黑洞熵自然地被认为是视界内部场量子态的贡献,并且假定内外两部分场之间形成纯态纠缠,那么,根据量子力学[12],这两部分各自的熵是彼此相等的;因此,计算外部的熵等于得到了内部的熵。据我们所知,文献[8]中已经认定这个熵就是黑洞的 Bekenstein-Hawking 熵。1999 年人们又把黑洞时空背景下的标量场的计算推广到 Dirac 场[13-15]。2000 年李翔、赵峥等提出了薄层 brick-wall 方法[16,17],2002 年李翔又把测不准关系引入黑洞熵的计算[18],均获得了成功。本文将运用经广义测不准关系改进的薄层 brick-wall 方法讨论渐近 de Sitter 时空背景下 Reissner-Nordstrom(R-N)黑洞的熵,这对于人们认识经广义测不准关系改进的薄层 brick-wall 方法以及黑洞熵的起源无疑都具有十分重要的意义。事实上,与以往讨论的时空背景不同,R-N-dS 黑洞存在着 3 个温度不同的视界,显然总体上说这是一个非热平衡的热力学系统。因为传统的

收稿日期:2004-01-11

E-mail:wenbiaoliu@yahoo.com

* 基金项目:国家自然科学基金(10373003)、国家留学基金和北京师范大学青年科学基金资助

brick-wall 方法只适用于平衡态，所以此时遇到了很大的困难。利用经广义测不准关系改进的薄层模型可以很好地克服这一困难，因为在这种方法中我们的研究对象只是视界面附近 Planck 尺度的薄层[18]，完全可以近似看作平衡态热力学系统。

2 R-N-dS 黑洞的时空线元与视界

渐近 de Sitter 时空中的 Reissner-Nordstrom 黑洞，其线元为

$$ds^2 = -f dt^2 + f^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\varphi^2, \tag{1}$$

其中，$f=(1-\frac{2M}{r}+\frac{Q^2}{r^2}-\frac{1}{3}\Lambda r^2)$，$\Lambda(>0)$为宇宙因子. 由文献[19]，R-N-dS 黑洞视界面方程

$$1-2M/r+Q^2/r^2-\Lambda r^2/3=0. \tag{2}$$

由文献[20]，R-N-dS 黑洞 3 个视界面上的表面重力为

$$\begin{aligned}
\kappa_I &= 2\pi/\beta_i = 2\pi T_i = (\Lambda/6) r_i^{-2}(r_i-r_-)(r_e-r_i)(r_c-r_i),\\
\kappa_e &= 2\pi/\beta_e = 2\pi T_e = (\Lambda/6) r_e^{-2}(r_e-r_-)(r_e-r_i)(r_c-r_e),\\
\kappa_c &= 2\pi/\beta_c = 2\pi T_c = (\Lambda/6) r_c^{-2}(r_c-r_-)(r_c-r_i)(r_c-r_e).
\end{aligned} \tag{3}$$

式中 r_i、r_e 和 r_c 分别对应黑洞内、外视界和宇宙视界，r_- 是方程(2)的一个负根，无物理意义。由于观察者处于外视界和宇宙视界之间，他们感受到的视界只有 2 个视界面，而不会受到内视界的影响。因此，在后面的计算 R-N-dS 黑洞熵时只需考虑黑洞外视界和宇宙视界这两个视界面的贡献。即

$$S=S_e+S_c. \tag{4}$$

3 Klein-Gordon(K-G)方程

R-N-de Sitter 时空中质量为零的标量粒子 K-G 方程为

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2}+(\frac{f'}{f}+\frac{2}{r})\frac{\partial\Phi}{\partial r}+\frac{1}{f}[\frac{\omega^2}{f}+\frac{1}{r^2}(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\cot\theta\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2})]\Phi=0, \tag{5}$$

采用 WKB 近似($\Phi\sim\exp[iS(r,\theta,\varphi)]$)，不难得到

$$p_r^2=\frac{1}{f}[\frac{\omega^2}{f}-\frac{1}{r^2}p_\theta^2-\frac{1}{r^2\sin^2\theta}p_\varphi^2], \tag{6}$$

这里

$$p_r=\frac{\partial S}{\partial r},\ p_\theta=\frac{\partial S}{\partial\theta},\ p_\varphi=\frac{\partial S}{\partial\varphi}, \tag{7}$$

我们还可以得到动量的模平方

$$p^2=p_\mu p^\mu=g^{11}p_r^2+g^{22}p_\theta^2+g^{33}p_\varphi^2=\frac{\omega^2}{f}. \tag{8}$$

4 广义的测不准关系与黑洞熵

众所周知，在普通量子力学中，位置 $\hat{x}$ 和动量 $\hat{p}$ 作为一对共轭的可观测量，应满足测不准关系

$$\triangle x\triangle p\geq\frac{\hbar}{2}, \tag{9}$$

它表示随着动量不确定度的增加，位置的不确定度可以任意地小，反之亦然。

然而,在 Planck 尺度下的量子系统,如量子引力所描述的系统,如(9)式所述的测不准关系可能将不再成立,应改用广义的测不准关系[21,22]

$$\triangle x \triangle p \geq \frac{\hbar}{2}[1 + a\langle \hat{p}^2 \rangle + \beta \langle \hat{x}^2 \rangle + \cdots], \tag{10}$$

若考虑动量为主导的情况(取 $\beta=0$,$\alpha\neq0$,则(10)式简化为

$$\triangle x \triangle p \geq \frac{\hbar}{2}[1 + a\langle \hat{p}^2 \rangle] = \frac{\hbar}{2}[1 + a((\triangle p)^2 + \langle \hat{p}^2 \rangle)]. \tag{11}$$

在坐标和动量所构成的相空间中,为了刻划相空间的量子态,可将相空间分成一个个能层 $\varepsilon\sim\varepsilon+\mathrm{d}\varepsilon$,每个能层划分为一个个相格,则每个相格作为相空间的一个代表点表示系统的一个量子态(微观态),由广义的测不准关系式(11)可知,在相空间中的每个代表点(相格)的线度为

$$2\pi\hbar(1 + ap^2), \tag{12}$$

而相空间中一个宏观上无限小的体元 $\mathrm{d}^3x\mathrm{d}^3p$ 内所包含的量子态数目则为

$$\frac{\mathrm{d}^3x\mathrm{d}^3p}{(2\pi\hbar)^3(1 + ap^2)^3}, \tag{13}$$

与之相应的量子态密度应为(以下采用自然单位制,即 $\hbar = c = 1$)

$$g(\varepsilon) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int \frac{\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}p_r\mathrm{d}p_\theta\mathrm{d}p_\varphi}{(1 + ap^2)^3}. \tag{14}$$

将(6)和(8)式代入上式得

$$\begin{aligned} g(\omega) &= \frac{1}{(2\pi)^3}\int \frac{\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}p_r\mathrm{d}p_\theta\mathrm{d}p_\varphi}{(1 + a\omega^2/f)^3} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3}\int \frac{\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi}{(1 + a\omega^2/f)^3}\int \frac{2}{f^{1/2}}[\frac{\omega^2}{f} - \frac{1}{r^2}p_\theta^2 - \frac{1}{r^2\sin^2\theta}p_\varphi^2]^{1/2}\mathrm{d}p_\theta\mathrm{d}p_\varphi \\ &= \frac{4\pi\omega^3}{3(2\pi)^3}\int \frac{r^2\mathrm{d}r}{f^2(1 + a\omega^2/f)^3}\int \sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi = \frac{2\omega^3}{3\pi}\int \frac{r^2\mathrm{d}r}{f^2(1 + a\omega^2/f)^3}. \end{aligned} \tag{15}$$

自由能为

$$\begin{aligned} F(\beta) &= \frac{1}{\beta}\int \mathrm{d}g(\omega)\ln(l - \mathrm{e}^{-\beta\omega}) = \int_0^\infty \frac{g(\omega)\mathrm{d}\omega}{\mathrm{e}^{\beta\omega} - 1} \\ &= -\frac{2}{3\pi}\int_{r_0} \frac{r^2\mathrm{d}r}{f^2}\int_0^\infty \frac{\omega^3\mathrm{d}\omega}{(\mathrm{e}^{\beta\omega} - 1)(1 + a\omega^2/f)^3}, \end{aligned} \tag{16}$$

这样,黑洞熵应为

$$\begin{aligned} S &= \beta^2\frac{\partial F}{\partial\beta} = \frac{2\beta^2}{3\pi}\int_{r_0} \frac{r^2\mathrm{d}r}{f^2}\int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{\beta\omega}\omega^4\mathrm{d}\omega}{(\mathrm{e}^{\beta\omega} - 1)^2(1 + a\omega^2/f)^3} \\ &= \frac{2\beta^{-3}}{3\pi}\int_{r_0} \frac{r^2\mathrm{d}r}{f^2}\int_0^\infty \frac{x^4\mathrm{d}x}{(1 - \mathrm{e}^{-x})(\mathrm{e}^x - 1)(1 + \frac{ax^2}{f\beta^2})^3}, \end{aligned} \tag{17}$$

其中 $x=\beta\omega$,考虑下面不等式

$$1 - \mathrm{e}^{-x} > \frac{x}{1 + x}, \mathrm{e}^x - 1 > x. \tag{18}$$

得

$$\begin{aligned} S &< \frac{2\beta^{-3}}{3\pi}\int_{r_0} \frac{r^2\mathrm{d}r}{f^2}\int_0^\infty \frac{(x^3 + x^2)\mathrm{d}x}{(1 + ax^2/f\beta^2)^3} \\ &= \frac{2\beta^{-3}}{3\pi}\int_{r_0} \frac{r^2\mathrm{d}r}{f^2}[\frac{1}{4}(\frac{a}{f\beta^2})^{-2} + \frac{\pi}{16}(\frac{a}{f\beta^2})^{-3/2}] \end{aligned}$$

$$= \frac{\beta}{6\pi A^2}\int_{r_0} r^2\,\mathrm{d}r + \frac{a^{-3/2}}{24}\int_{r_0}\frac{r^2\,\mathrm{d}r}{f^{1/2}}. \tag{19}$$

5 R-N-dS 黑洞的熵

采用薄层 brick-wall 模型，R-N-dS 黑洞系统的总熵应该主要来自黑洞外视界和宇宙视界附近两个薄层的贡献。即

$$S = S_e + S_c, \tag{20}$$

将(19)式代入(20)式，并注意到 R-N-dS 黑洞的外视界和宇宙视界分别为 r_e 和 r_c 可得

$$S < \frac{\beta}{6\pi a^2}\int_{r_e} r^2\,\mathrm{d}r + \frac{a^{-3/2}}{24}\int_{r_e}\frac{r^2\,\mathrm{d}r}{f^{1/2}} + \frac{\beta}{6\pi a^2}\int_{r_e} r^2\,\mathrm{d}r + \frac{a^{-3/2}}{24}\int_{r_c}\frac{r^2\,\mathrm{d}r}{f^{1/2}}, \tag{21}$$

如前面所述，我们感兴趣的是视界面附近$[r_e, r_e+\varepsilon_e]$和$[r_c-\varepsilon_c, r_c]$对黑洞熵的贡献。由广义的测不准关系式(10)不难得到在 Plank 尺度下位置的最小不确定度为 2α，以此作为纯空间线元的最小长度，则有

$$\sqrt[2]{\alpha} = \int_{r_0}^{r_0+\varepsilon}\sqrt{\gamma_{11}}\,\mathrm{d}r = \int_{r_0}^{r_0+\varepsilon}\frac{1}{\sqrt{f}}\mathrm{d}r \approx \int_{r_0}^{r_0+\varepsilon}\frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{2\kappa(r-r_0)}} = \sqrt{\frac{2\varepsilon}{\kappa}}, \tag{22}$$

$$\int_{r_0}^{r_0+\varepsilon} r^2\,\mathrm{d}r \approx r_0^2\varepsilon. \tag{23}$$

考虑(2)式，将(22)、(23)式代入(21)式得

$$S < \frac{\beta_e}{6\pi\alpha^2}r_e^2\varepsilon_e + \frac{\alpha^{-3/2}}{24}2r_e^2\sqrt{\alpha} + \frac{\beta_c}{6\pi\alpha^2}r_c^2\varepsilon_c + \frac{\alpha^{-3/2}}{24}2r_c^2\sqrt{\alpha} = \frac{3}{16\pi\alpha}(A_e + A_c), \tag{24}$$

其中 A_e 和 A_c 分别为黑洞外视界和宇宙视界的面积，这个结果表明，经广义测不准关系改进的薄层 brick-wall 方法计算所得到的 R-N-dS 黑洞熵与黑洞外视界和宇宙视界面积之和成正比，这正是我们所期望的结果。

6 结果和讨论

从 Reissner-Nordstrom-de Sitter 时空背景下的 Klein-Gordon 方程出发，利用经广义测不准关系改进的薄层 brick-wall 方法计算了黑洞熵。结果发现，这种时空背景下的黑洞熵与黑洞外视界和宇宙视界面积之和成正比，与人们预期的结果相符。由于 R-N-dS 时空并不是 Reissner-Nordstrom 黑洞和 de Sitter 时空 2 个系统的简单叠加，因此这一结论并不应是想当然的熵可加性的推论。虽然我们利用经广义测不准关系改进的薄层 brick-wall 方法给出的只是黑洞熵的上限，但从中仍可以看到黑洞熵与视界面积之间的内在联系，也进一步表明了黑洞熵是视界面上量子态的熵，是一种量子效应。

参考文献

[1] Bekenstein J D. Black hole and entropy. Phys Rev, 1973, **7**D(8): 2333－2346

[2] Hawking S W. Particle creation by black holes. Commun Math Phys, 1975, **43**(3): 199－220

[3] G't Hooft. On the quantum structure of a black hole. Nuclear Physics, 1985, **256**B: 727－745

[4] Ghosh A, Mitra P. Entropy in dilatonic black hole background. Phys Rev Lett, 1994, **73**(19): 2521－2523

[5] Lee M H, Kim J K. Entropy of a quantum field in rotating black hole. Phys Rev, 1996, **54**D(6): 3904－3914

[6] Cai R G, Zhu L B. Entropy of scalar fields and its duality invariance in three-dimensional spacetimes. Phys Lett, 1996, **219**A(3—4): 191—198

[7] Lee H, Kim S W, Kim W T. Nonvanishing entropy of extremal charged black holes. Phys Rev, 1996, **54**D(10): 6559—6562

[8] Ho J, Kim W T, Park Y J. Entropy in the Kerr-Newman black hole. Class Quantum Grav, 1997, **14**(9): 2617—2626

[9] 刘文虎,赵峥。非热平衡 Schwarzz schide-de Sitter 黑洞的熵。数学物理学报,2003,**23**A(2):169—174

[10] Bombelli L, Koul R K, Lee J, et al. Quantum source of entropy for black holes. Phys Rev, 1986, **34**D(2): 373—383

[11] Srednicki M. Entropy and area. Phys Rev Lett, 1993, **71**(5): 666—669

[12] 曾谨言,裴寿镛. 量子力学新进展(第一辑). 北京:北京大学出版社,2000

[13] 罗智坚,朱建阳. Schwarzschild 黑洞背景下 Dirac 场的熵. 物理学报,1999, **48**(3): 395—401

[14] 刘文彪,朱建阳,赵峥. Nernst 定理与 R-N 黑洞 Dirac 场的熵. 物理学报,2000,**49**(3): 581—585

[15] Liu Wenbiao, Zhao Zheng. Entropy of the Dirac field in a Kerr-Newman black hole. Phys Rev, 2000, **61**D(6): 63—69

[16] Li X, Zhao Z. Entropy of Vaidya-de Sitter spacetime. Chin Phys Lett, 2001, **18**(3): 463—465

[17] Liu W B, Zhao Z. An improved thin film brick-wall model of black hole entropy. Chin Phys Lett, 2001, **18**(2): 310—312

[18] Li Xiang. Black hole entropy without brick walls. Physics Letter, 2002, **540**B(1—2): 9—13

[19] 赵峥,刘辽. 一般稳态时空视界的确定. 物理学报,1991, **40**(10): 1564—1567

[20] 赵峥. 黑洞温度、熵变化率和时间尺度的压缩. 北京师范大学学报(自然科学版),1995, **31**(4): 476—480

[21] Kempf A, Mangano G, Mann R B. Hilbert space representation of the minimal length uncertainty relation. Phys Rev, 1995, **52**D(2): 1108—1118

[22] Chang L N, Minic D, Okamura N, et al. The effect of the minimal length uncertainty relation on the density of states and cosmological constant. Phys Rev, 2002, **65**D(12): 125—153

The Generalized Uncertainty Relation and the Entropy of Reissner-nordstrom-de Sitter Spacetime

[1,3] Zhou Zhou′an　[2,3] Suo Biao　[3] Liu Wenbiao

([1] *Department of Physics, Hunan Science and Technology College, Yongzhou* 425006)

([2] *Department of Physics, Teachers' College, Qingdao University, Qingdao* 266071)

([3] *Department of Physics, Institute of Theoretical Physics, Beijing Normal University, Beijing* 100875)

Abstract: Thinking of Klein-Gorden equation in Reissner-Nordstrom-de Sitter spacetime, the entropy is calculated by the improved brick-wall method due to the generalized uncertainty relation. The entropy bound of this system not only includes the contribution of the black hole horizon, but also includes the contribution of the cosmological horizon. It is found that there is an internal relation between the event horizon and the entropy. It is also apparent that the cut-off in brick-wall model is something related to the quantum theory of gravity.

Key words: Reissner-Nordstrom-de Sitter spacetime; Event horizon; Entropy; Generalized uncertainty relation; Thin film brick-wall method.

MR(2000) Subject Classification: 85C