2004,**24A**(3):299－306

Acta Mathematica Scientia
数学物理学报

关于 Banach 空间中渐近非扩张型半群的不动点的存在性*

曾六川
(上海师范大学数学系　上海 200234)

摘要:设 C 是具有弱一致正规结构的 Banach 空间 X 的非空弱紧凸子集，$T=\{T(t):t\in S\}$是渐近非扩张型半群，且每个 $T(t)$在 C 上连续．该文证明了如下结论：(i) 若 X 是一致凸的，则 $F(T)$非空；(ii) 若 $T=\{T(t):t\in S\}$满足$\liminf\limits_{S\ni t\to\infty}|\|T(t)\||<+\infty$，且在 C 上弱渐近正则，则 $F(T)$非空，其中，$|\|T(t)\||$是 $T(t)$的精确的 Lipschitz 常数,$F(T)$是 $T(t),t\in S$ 的所有公共不动点之集.

关键词:不动点；渐近非扩张型半群；弱一致正规结构；渐近正则性；渐近中心.

MR(2000)主题分类:47H09;47H10;47H20　　**中图分类号**:O177.91　　**文献标识码**:A

文章编号:1003-3998(2004)03-299-08

1　引言

设 X 是一 Banach 空间,但非 Schur 空间,即 X 中序列的强收敛与弱收敛不一致. Bynum[1]定义了如下 X 的弱收敛序列系数

$$WCS(X):=\inf\left\{\frac{A(\{x_n\})}{\inf\{\limsup\limits_{n\to\infty}\|x_n-y\|:y\in\overline{\mathrm{co}}(\{x_n\})\}}\right\},$$

其中,前一个下确界是在 X 中的全体弱(但非强)收敛序列$\{x_n\}$上取的,$\overline{\mathrm{co}}(A)$表子集 $A\subset X$ 的凸闭包，$A(\{x_n\})$是$\{x_n\}$的渐近直径,即数$\lim\limits_{n\to\infty}(\sup\{\|x_i-x_j\|:i,j\geqslant n\})$. 易见,$1\leqslant WCS(X)\leqslant 2$. 据文[2],当 $WCS(X)>1$ 时,Banach 空间 X 称为具有弱一致正规结构. 回顾到[1]，若 $WCS(X)>1$,则 X 具有弱正规结构.据此即知,X 的任何满足 $\mathrm{diam}(C)>0$ 的非空凸弱紧子集 C 必有非直径点,即,存在 $z\in C$ 使得 $\sup\{\|z-x\|:x\in C\}<\mathrm{diam}(C)$. 已熟知,系数 $WCS(X)$在不动点理论中发挥了重要作用.

设 C 是 Banach 空间 X 的非空子集,则映象 $T:C\to C$ 称为 Lipschitz 映象,若对每个自然数 $n\geqslant 1$,存在常数 $k_n>0$ 使得 $\|T^nx-T^ny\|\leqslant k_n\|x-y\|$，$\forall x,y\in C$. 当 $k_n=1$，$\forall n\geqslant 1$ 时,Lipschitz 映象 $T:C\to C$ 称为非扩张映象;当$\lim\limits_{n\to\infty}k_n=1$ 时,Lipschitz 映象 $T:C\to C$ 称为渐近非扩张映象.

设 X 是一 Banach 空间,$T:C\to C$. 用符号$|\|T\||$表 T 的精确的 Lipschitz 常数,即$|\|T\||=\sup\{\|Tx-Ty\|/\|x-y\|:x,y\in C,x\neq y\}$. 易见,对任何渐近非扩张映象 $T:C\to C$,有$\liminf\limits_{n\to\infty}|\|T^n\||\leqslant 1$.

收稿日期:2002-02-04；修订日期:2003-03-27

Email:zenglc@hotmail.com

* 基金项目:高等学校优秀青年教师教学和科研奖励基金、上海市曙光计划基金和上海市教委重点学科经费(部分)资助

设 X 是一 Banach 空间. 又回顾到[3], X 的 Maluta 常数 $D(X)$ 定义如下

$$D(X) := \sup\left\{\frac{\limsup\limits_{n\to\infty} d(x_{n+1}, \mathrm{co}(x_1, x_2, \cdots, x_n))}{\mathrm{diam}(\{x_n\})}\right\},$$

其中,上确界是在 X 中的全体有界非常数序列 $\{x_n\}$ 上取的. 当 $D(X)<1$ 时, X 是自反的 Banach 空间,且 $D(X)=\frac{1}{WCS(X)}$. 而且,已知[3],当 $D(X)<1$ 时, X 具有正规结构. 因此,据 Kirk 的经典的不动点定理[4], X 具有非扩张映象的不动点性质. 不过,还不清楚,当 $D(X)<1$ 时, X 是否具有渐近非扩张映象的不动点性质. 这是一个公开的问题. 1994 年, Lim 与 Xu[5] 对此公开问题提供了两个部分答案.

定理 1.1[5, 定理5] 设 X 是满足 $D(X)<1$ 的各向一致凸的 Banach 空间, C 是 X 的非空有界闭凸子集,则当 $T:C\to C$ 是渐近非扩张映象时, T 在 C 中有不动点.

定理 1.2[5, 定理4] 设 X 是满足 $D(X)<1$ 的 Banach 空间, C 是 X 的非空有界闭凸子集, $T:C\to C$ 是渐近非扩张映象. 另外,还设 T 在 C 上是弱渐近正则的,即 $w-\lim\limits_{n\to\infty}(T^n x - T^{n+1}x)=0$, $\forall\, x\in C$. 则 T 在 C 中有不动点.

今回顾一下 Banach 空间 X 中自映象半群的概念. 设 C 是 Banach 空间 X 的非空子集, S 是 $[0,\infty)$ 的无界子集,满足条件:当 $t,h\in S$ 时, $t+h\in S$; 当 $t,h\in S$ 且 $t>h$ 时, $t-h\in S$. 例如, $S=[0,\infty)$ 或 $S=N$,非负整数集. 设 $T=\{T(t):t\in S\}$ 是一个单参数的 C 到自身的映象族,则 T 称为 C 上的一个(单参数)半群,如果 T 满足下列条件

(1) $T(0)x=x$, $\forall\, x\in C$;

(2) $T(t+s)x=T(t)T(s)x$, $\forall\, t,s\in S, x\in C$;

(3) 对每个 $x\in C$,当 S 被赋予 $[0,\infty)$ 的相对拓扑时,映 S 入 C 的映象 $s\to T(s)x$ 连续.

C 上半群 $T=\{T(t):t\in S\}$ 称为

(a) 非扩张的,若 $\|T(t)x-T(t)y\|\leqslant\|x-y\|$, $\forall\, x,y\in C, t\in S$;

(b) 渐近非扩张的[6](也见文[19]),若对每个 $t\in S$,存在正数 $k_t>0$ 使得

$$\|T(t)x-T(t)y\|\leqslant k_t\|x-y\|,\ \forall\, x,y\in C,\ 其中 \lim_{S\ni t\to\infty} k_t=1;$$

(c) 渐近非扩张型的[6],若对每个 $x\in C$

$$\lim_{S\ni t\to\infty}\sup\Big(\sup_{y\in C}(\|T(t)x-T(y)\|-\|x-y\|)\Big)\leqslant 0.$$

值得注意的是, C 上渐近非扩张型半群 $T=\{T(t):t\in S\}$ 的离散情形是下列情形[7]映象 $T:C\to C$ 称为渐近非扩张型的,若对每个 $x\in C$

$$\lim_{n\to\infty}\sup\{\sup_{y\in C}[\|T^n x-T^n y\|-\|x-y\|]\}\leqslant 0.$$

易见, (a)⇒(b)⇒(c),且两个蕴涵关系皆真(见[7, 第 112 页]). 还回顾到, C 上半群 $T=\{T(t):t\in S\}$ 称为在 C 上是(弱)渐近正则的(见文[8]或[11]),若

$$\Big(w-\lim_{S\ni t\to\infty}(T(t+h)x-T(t)x)=0\Big),\quad \lim_{S\ni t\to\infty}\|T(t+h)x-T(t)x\|=0,$$

对每个 $x\in C$ 及 $h\in S$. 显然,若半群 $T=\{T(t):t\in S\}$ 在 C 上是渐近正则的,则它也在 C 上是弱渐近正则的. 对每个 $t\in S$,令

$$|\|T(t)\||:=\sup\left\{\frac{\|T(t)x-T(t)y\|}{\|x-y\|}: x,y\in C, x\neq y\right\}.$$

则 $|\|T(t)\||$ 称为 $T(t)$ 的精确的 Lipschitz 常数. 我们用 $F(T)$ 表 $T(t)$, $t\in S$ 的所有公共不动点之集,即 $F(T)=\{x\in C: T(s)x=x,\ \forall\, s\in S\}$.

最近,几位作者已研究了 Banach 空间中渐近正则半群的不动点的存在性;见文[8, 11, 12, 13]. 本文致力于把定理 1.1 与定理 1.2 推广到渐近非扩张型半群情况的研究.

2　预备知识

本文始终假设$(X,\|\cdot\|)$是一 Banach 空间，但非 Schur 空间，即 X 中序列的强收敛与弱收敛不一致. 最近，Jimenez Melado[10]引入了如下 Banach 空间 X 的 GGLD 性质：X 称为具有 GGLD 性质，若当$\{x_n\}$是弱零序列且$\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n\|=1$ 时，$D[(x_n)]>1$，其中

$$D[(x_n)]=\limsup_{m\to\infty}\limsup_{n\to\infty}\|x_n-x_m\|.$$

他也定义了 X 的系数$\beta(X)$：$\beta(X)=\inf\{D[(x_n)]:w-\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0,\ \|x_n\|\to 1\}$.

后面，我们将用到下述文[14]中的结果.

引理 2.1[14, 定理1]　设 X 是一 Banach 空间，而非 Schur 空间，则

(i) X 具有 GGLD 性质，当且仅当$\limsup\limits_{n\to\infty}\|x_n-x_\infty\|<A(\{x_n\})$，其中，$\{x_n\}$是 X 中弱(非强)收敛序列，其极限为 x_∞.

(ii) $\beta(X)=WCS(X)$.

在文[14]中，Dominguez Benavides T 等人已证，每个 James 空间$(J,\|\cdot\|_j)(j=1,2,3)$都具有弱一致正规结构. 而且，$WCS(J,\|\cdot\|_j)=\sqrt{2}(j=1,2)$，$WCS(J,\|\cdot\|_3)=(3/2)^{1/2}$. 值得注意的是，不自反的 James 空间$(J,\|\cdot\|_J)$ $(J=1,2)$同 Hilbert 空间一样具有相同的 WCS 值. 今回顾一下 Edelstein[15]引入的渐近中心的概念. 设 C 是 Banach 空间 X 的非空闭凸子集，$\{x_t:t\in S\}$是 X 中的一个有界的元素族，则$\{x_t:t\in S\}$关于 C 的渐近半径与渐近中心分别是数 $r_C(\{x_t\})=\inf\limits_{y\in C}(\limsup\limits_{S\ni t\to\infty}\|x_t-y\|)$与集(可能空的)

$$A_C(\{x_t\})=\{y\in C:\limsup_{S\ni t\to\infty}\|x_t-y\|=r_C(\{x_t\})\}.$$

回顾到，X 的凸性模是定义如下的$[0,2]$上的函数 δ_X

$$\delta_X(\varepsilon):=\inf\{1-\|x+y\|/2:x,y\in B_X,\|x-y\|\geqslant\varepsilon\},$$

其中，B_X 是 X 的闭单位球. X 称为一致凸的，若 $\delta_X(\varepsilon)>0$，$\forall\varepsilon\in(0,2]$. 也回顾到，Banach 空间 X 称为各向一致凸的(简记 UCED)，若对每个 $\varepsilon>0$ 及 $z\in X$，$\|z\|=1$，有

$$\delta_X(\varepsilon,z):=\inf\{1-\|x+y\|/2:x,y\in B_X,x-y=tz,|t|\geqslant\varepsilon\}>0.$$

已熟知，当 X 是一致凸的 Banach 空间时，X 是自反且各向一致凸的 Banach 空间. 我们提醒读者注意如下事实(见[5，第 1354 页])：在各向一致凸的 Banach 空间中，任何有界序列关于非空弱紧凸子集的渐近中心仅由一点组成. 另外，已有下列结论

引理 2.2[16, P401]　设 C 是 Banach 空间 X 的非空闭凸子集，且$\{x_t:t\in S\}$是 X 的一个有界的元素族，则有

(i) 当 X 是自反的 Banach 空间时，$A_C(\{x_t\})$是 C 的非空有界闭凸子集；

(ii) 当 X 是一致凸的 Banach 空间时，$A_C(\{x_t\})$由一点组成.

通过仔细地分析[8，定理 3.2]的证明，我们有下列结论

引理 2.3　设 X 是一满足 $WCS(X)>1$ 的 Banach 空间，C 是 X 的非空凸弱紧子集，$T=\{T(t):t\in S\}$是 C 上的渐近正则半群，满足$\liminf\limits_{S\ni t\to\infty}|\|T(t)\||=k<\infty$. 则存在正序列$\{t_n\}\subset S$及非空闭凸可分子集 $C_0\subset C$，满足

(1) $\liminf\limits_{S\ni t\to\infty}|\|T(t)\||=k=\lim\limits_{n\to\infty}|\|T(t_n)\||$，其中 $t_n\to\infty(n\to\infty)$；

(2) C_0 在每个 $T(t_n)$之下是不变的，即，$T(t_n)C_0\subset C_0$，$\forall n\geqslant 1$；

(3) 对每个 $x\in C_0$，序列$\{T(t_n)x\}$弱收敛.

引理 2.4[14, 定理3]　设 X 是具有弱一致正规结构的 Banach 空间，C 是 X 的非空弱紧凸

子集，$T:C\to C$ 是非扩张映象，则 T 有迭代不动点.

注 2.1 在引理 2.4 中，T 有迭代不动点，是指可构造一个序列，强收敛到 T 的不动点.

最后，本节提醒读者又注意下列事实：符号 $\omega_w(x)$ 表半群 $T=\{T(t):t\in S\}$ 在点 x 的弱 ω-极限集，即，集 $\{y\in X: y=w-\lim\limits_{t_\alpha\to\infty}T(t_\alpha)x$，对某个子网 $\{t_\alpha\}\subset S\}$.

在本文的剩下部分里，总假设 X 的 $WCS(X)$ 系数大于 1.

3 没有(弱)渐近正则性的渐近非扩张型半群

定理 3.1 设 X 是一致凸的 Banach 空间，C 是 X 的非空有界闭凸子集，$T=\{T(t):t\in S\}$ 是 C 上的渐近非扩张型半群. 如果每个 $T(t)$ 在 C 上连续，则 $F(T)\neq\varnothing$.

证 由于 X 是一致凸的 Banach 空间，故 X 必是自反的. 因而，C 是 X 的非空弱紧凸子集. 下面，用 F 表 C 的所有具有下列性质的非空闭凸子集 K 之族

$$x\in K\Rightarrow\omega_w(x)\subset K,\tag{3.1}$$

其中，$\omega_w(x)$ 是 T 在点 x 的弱 ω-极限集，即，集

$$\{z\in X: z=w-\lim_{t_\alpha\to\infty}T(t_\alpha)x，对某个子网\{t_\alpha\}\subset S\}.$$

则 F 按包含关系成为一个非空序集. 于是，由 Zorn 引理得知，F 中必有极小元 K.

今证，存在某个 $r\geqslant 0$ 使得

$$r_x(y)=r,\quad \forall\, x,y\in K,\tag{3.2}$$

其中，r_x 是定义如下的泛函：$r_x(y)=\limsup\limits_{S\ni t\to\infty}\|T(t)x-y\|$，$\forall\, y\in X$.

事实上，对每个 $c\geqslant 0$，定义 $K_c(x)=\{y\in K: r_x(y)\leqslant c\}$.

先断言，$r_x(\cdot)$ 是 X 上的连续凸泛函. 事实上，易见，$r_x(\cdot)$ 在 X 上是凸的. 由于对一切 $y,z\in X$，$|\,\|T(t)x-y\|-\|T(t)x-z\|\,|\leqslant\|x-y\|$，故得

$$r_x(z)-\|y-z\|\leqslant r_x(y)\leqslant r_x(z)+\|y-z\|.$$

因此，$|r_x(y)-r_x(z)|\leqslant\|y-z\|$. 从而，推得 $r_x(\cdot)$ 在 X 上是连续的. 则 $K_c(x)$ 是闭凸的.

再断言，$r_x(\cdot)$ 在 X 上是弱下半连续的. 事实上，设 $\{x_n\}$ 弱收敛到 x_*，则可选取一序列 $\{t_{m'}\}\subset S$ 使得 $\lim\limits_{m'\to\infty}\|T(t_{m'})x-x_*\|=\limsup\limits_{S\ni t\to\infty}\|T(t)x-x_*\|=r_x(x_*)$.

由于泛函 $\limsup\limits_{m'\to\infty}\|T(t_{m'})x-y\|$ 关于 $y\in X$ 是弱下半连续的，故有

$$\begin{aligned}r_x(x_*)&=\limsup_{m'\to\infty}\|T(t_{m'})x-x_*\|\leqslant\liminf_{n\to\infty}\limsup_{m'\to\infty}\|T(t_{m'})x-x_n\|\\&\leqslant\liminf_{n\to\infty}\limsup_{S\ni t\to\infty}\|T(t)x-x_n\|=\liminf_{n\to\infty}r_x(x_n).\end{aligned}$$

设 $y\in K_c(x)$，$z\in\omega_w(y)$，则选取序列 $\{s_j\}\subset S$ 使得，$\{T(s_j)y\}$ 弱收敛到 z. 于是，由 $r_x(\cdot)$ 的弱下半连续性得知

$$\begin{aligned}r_x(z)&\leqslant\liminf_{j\to\infty}r_x(T(s_j)y)\leqslant\limsup_{S\ni s\to\infty}r_x(T(s)y)\\&=\limsup_{S\ni s\to\infty}(\limsup_{S\ni t\to\infty}\|T(t)x-T(s)y\|)\\&=\limsup_{S\ni s\to\infty}(\limsup_{S\ni t\to\infty}(\|T(s)T(t-s)x-T(s)y\|\\&\quad-\|T(t-s)x-y\|+\|T(t-s)x-y\|))\\&\leqslant\limsup_{S\ni s\to\infty}(\limsup_{S\ni t\to\infty}(\sup_{z\in C}(\|T(s)y-T(s)z\|-\|y-z\|)\end{aligned}$$

$$+ \| T(t-s)x - y \|))$$
$$\leqslant \limsup_{S \ni t \to \infty} \| T(t)x - y \| = r_x(y).$$

据此推得，当 $K_c(x) \neq \varnothing$ 时，用 $K_c(x)$ 取代 K，则 $K_c(x)$ 具有性质(3.1). 于是，由 K 的极小性，有 $K_c(x)=K$. 由此得知，泛函 $r_x(y)$ 在每点 $y \in K$ 皆为常数 r_x. 今验证，该常数 r_x 实际上与点 $x \in K$ 无关. 此可由如下推理得知

$$r_x = r_x(z) = \limsup_{S \ni t \to \infty} \| T(t)x - z \| \leqslant \limsup_{S \ni t \to \infty} (\limsup_{S \ni s \to \infty} \| T(t)x - T(s)y \|)$$
$$\leqslant \limsup_{S \ni s \to \infty} \| T(s)y - x \| = r_y(x) = r_y,$$

其中，$x, y \in K$ 且 $z \in \omega_w(y) \subset K$.

另一方面，因 X 是一致凸的，故由引理 2.2 即知，对每个 $x \in K$，渐近中心

$$A_K(\{T(t)x\}) = \{y \in K : \limsup_{S \ni t \to \infty} \| T(t)x - y \| = r_K(\{T(t)x\})\}$$

是一单点集，其中 $r_K(\{T(t)x\}) = \inf_{y \in K} (\limsup_{S \ni t \to \infty} \| T(t)x - y \|)$. 据(3.2)即得 $A_K(\{T(t)x\}) = K$. 可见，K 仅由一点组成，记 $K = \{x_0\}$. 注意到，K 具有性质(3.1). 从而推得，网$\{T(t)x_0 : t \in S\}$弱收敛到 x_0.

下证，网$\{T(t)x_0 : t \in S\}$强收敛到 x_0. 事实上，选取一正数列$\{t_n\} \subset S$，满足条件：$\{t_n\}$单调递增到$+\infty$且 $r = \limsup_{S \ni t \to \infty} \| T(t)x_0 - x_0 \| = \lim_{S \ni n \to \infty} \| T(t_n)x_0 - x_0 \|$.

显见，序列$\{T(t_n)x_0\}$弱收敛到 x_0. 由于对一切自然数 m, n，当 $m > n$ 时，由范数 $\| \cdot \|$ 的弱下半连续性，有

$$\begin{aligned} & \| T(t_m)x_0 - T(t_n)x_0 \| \\ \leqslant & (\| T(t_n)x_0 - T(t_n)(T(t_m - t_n)x_0) \| - \| x_0 - T(t_m - t_n)x_0 \|) \\ & + \| x_0 - T(t_m - t_n)x_0 \| \\ \leqslant & \sup_{y \in C} (\| T(t_n)x_0 - T(t_n)y \| - \| x_0 - y \|) + \| x_0 - T(t_m - t_n)x_0 \|, \end{aligned} \tag{3.3}$$

所以，在(3.3)的两边取$\limsup_{S \ni m \to \infty}$，即得

$$\begin{aligned} & \limsup_{m \to \infty} \| T(t_m)x_0 - T(t_n)x_0 \| \\ \leqslant & \sup_{y \in C} (\| T(t_m)x_0 - T(t_n)y \| - \| x_0 - y \|) + \limsup_{m \to \infty} \| x_0 - T(t_m - t_n)x_0 \| \\ \leqslant & \sup_{y \in C} (\| T(t_n)x_0 - T(t_n)y \| - \| x_0 - y \|) + \limsup_{S \ni t \to \infty} \| x_0 - T(t)x_0 \| \\ = & \sup_{y \in C} (\| T(t_n)x_0 - T(t_n)y \| - \| x_0 - y \|) + \lim_{m \to \infty} \| x_0 - T(t_m)x_0 \|. \end{aligned}$$

于是，有

$$\begin{aligned} & D(\{T(t_m)x_0\}) \\ = & \limsup_{n \to \infty} (\limsup_{m \to \infty} \| T(t_m)x_0 - T(t_n)x_0 \|) \\ \leqslant & \limsup_{n \to \infty} (\sup_{y \in C} (\| T(t_n)x_0 - T(t_n)y \| - \| x_0 - y \|)) + \lim_{m \to \infty} \| x_0 - T(t_m)x_0 \| \\ \leqslant & \limsup_{S \ni t \to \infty} (\sup_{y \in C} (\| T(t)x_0 - T(t)y \| - \| x_0 - y \|)) + \lim_{m \to \infty} \| x_0 - T(t_m)x_0 \| \\ \leqslant & \lim_{m \to \infty} \| x_0 - T(t_m)x_0 \| = r. \end{aligned} \tag{3.4}$$

为了证 $r = \lim_{m \to \infty} \| x_0 - T(t_m)x_0 \| = 0$，先证

$$r \leqslant WCS(X)^{-1} D[(T(t_m)x_0)]. \tag{3.5}$$

事实上，当 $r=0$ 时，(3.5)成立. 设 $r \neq 0$，则定义序列$\{y_m\}$如下：$y_m = (T(t_m)x_0 - x_0)/r$,

$\forall m\geqslant 1$. 易见，$\|y_m\|\to 1(m\to\infty)$且 $w-\lim\limits_{m\to\infty}y_m=0$. 于是，由引理 2.1 即得

$$\begin{aligned}WCS(X)=\beta(X)&=\inf\{D[(x_n)]:w-\lim_{n\to\infty}x_n=0,\ \|x_n\|\to 1\}\\&\leqslant D[(y_m)]=\limsup_{j\to\infty}\limsup_{i\to\infty}\|y_i-y_j\|\\&=\limsup_{j\to\infty}\limsup_{i\to\infty}\left\|\frac{T(t_i)x_0-x_0}{r}-\frac{T(t_j)x_0-x_0}{r}\right\|\\&=\frac{1}{r}\limsup_{j\to\infty}\limsup_{i\to\infty}\|T(t_i)x_0-T(t_j)x_0\|\\&=\frac{1}{r}\cdot D[(T(t_m)x_0)].\end{aligned}$$

因而，$r\leqslant WCS(X)^{-1}D[(T(t_m)x_0)]$，即知，(3.5)为真.

最后，据(3.4)与(3.5)推得$(WCS(X)-1)\cdot r\leqslant 0$. 利用条件 $WCS(X)>1$，即有 $r=0$，亦即

$$\limsup_{S\ni t\to\infty}\|T(t)x_0-x_0\|=\lim_{n\to\infty}\|T(t_n)x_0-x_0\|=0.$$

可见，网$\{T(t)x_0:t\in S\}$强收敛到 x_0. 由于对每个 $s\in S$，$\{s+t:t\in S\}$是 S 的子网，故$\{T(s+t)x_0:t\in S\}$强收敛到 x_0. 注意到，对每个 $s\in S$，$T(s)$在 C 上是连续的. 因此，必有 $\lim\limits_{S\ni t\to\infty}T(s+t)x_0=T(s)x_0$，$\forall s\in S$. 从而，$T(s)x_0=x_0$，$\forall s\in S$，即知，$F(T)\neq\varnothing$. ▌

注 3.1 已熟知，当 X 是一致凸的 Banach 空间时，X 必是各向一致凸的. 当 X 是各向一致凸的 Banach 空间时，我们不知道，定理 3.1 的结论是否仍真. 因此，定理 3.1 只是部分推广了定理 1.1. 而且，只有当 X 是一致凸 Banach 空间时，定理 1.1 才是定理 3.1 的离散情形，亦即定理 3.1 的特例.

4 具有弱渐近正则性的渐近非扩张型半群

定理 4.1 设 X 是具有弱一致正规结构的 Banach 空间，C 是 X 的非空弱紧凸子集. 又设 $T=\{T(t):t\in S\}$是 C 上的渐近非扩张型半群，在 C 上是弱渐近正则的，且满足 $k=\liminf\limits_{S\ni t\to\infty}|\,\|T(t)\|\,|<+\infty$. 如果每个 $T(t)$在 C 上是连续的，则 $F(T)\neq\varnothing$.

证 首先选取一正数列$\{t_n\}\subset S$，满足条件：$\{t_n\}$单调递增到$+\infty$且

$$\liminf_{S\ni t\to\infty}|\,\|T(t)\|\,|=\lim_{n\to\infty}|\,\|T(t_n)\|\,|=k<+\infty.$$

由于据文[17]，易于构造 C 的非空凸闭可分子集 C_0，使得 C_0 在每个 $T(t_n)$之下皆是不变的，即，$T(t_n)C_0\subset C_0$，$\forall n\geqslant 1$，故可设 C 本身即是可分的. 又据引理 2.3，不妨设，对每个 $x\in C$，序列$\{T(t_n)x\}$弱收敛.

今定义映象 $S:C\to C$ 如下：$Sx=w-\lim\limits_{n\to\infty}T(t_n)x$，$\forall x\in C$. 则据范数$\|\cdot\|$的弱下半连续性，对一切 $x,y\in C$，有

$$\begin{aligned}\|Sx-Sy\|&\leqslant\liminf_{n\to\infty}\|T(t_n)x-T(t_n)y\|\\&\leqslant\limsup_{n\to\infty}(\|T(t_n)x-T(t_n)y\|-\|x-y\|)+\|x-y\|\\&\leqslant\limsup_{S\ni t\to\infty}(\sup_{S\ni y\in C}(\|T(t)x-T(t)y\|-\|x-y\|))+\|x-y\|\\&\leqslant\|x-y\|.\end{aligned}$$

可见，$S:C\to C$ 是非扩张映象. 利用引理 2.4，即知 S 在 C 中有不动点 x_0，且 $w-\lim\limits_{n\to\infty}T(t_n)x_0=x_0$. 显然，由 $T=\{T(t):t\in S\}$在 C 上的弱渐近正则性可推得，对每个 $s\in S$

$$w-\lim_{n\to\infty}T(s+t_n)x_0=w-\lim_{n\to\infty}T(t_n)x_0=x_0.$$

另一方面，对一切自然数 $i,j\geqslant 1$，当 $i>j$ 时，再据范数 $\|\cdot\|$ 的弱下半连续性推得

$$\begin{aligned}
&\|T(t_i)x_0-T(t_j)x_0\|\\
\leqslant&(\|T(t_j)x_0-T(t_j)T(t_i-t_j)x_0\|-\|x_0-T(t_i-t_j)x_0\|)\\
&+\|x_0-T(t_i-t_j)x_0\|\\
\leqslant&\sup_{y\in C}(\|T(t_j)x_0-T(t_j)y\|-\|x_0-y\|)+\|x_0-T(t_i-t_j)x_0\|\\
\leqslant&\sup_{y\in C}(\|T(t_j)x_0-T(t_j)y\|-\|x_0-y\|)\\
&+\liminf_{n\to\infty}\|T(t_i-t_j+t_n)x_0-T(t_i-t_j)x_0\|\\
\leqslant&\sup_{y\in C}(\|T(t_j)x_0-T(t_j)y\|-\|x_0-y\|)\\
&+\limsup_{n\to\infty}(\|T(t_i-t_j)x_0-T(t_i-t_j)T(t_n)x_0\|-\|x_0-T(t_n)x_0\|)\\
&+\limsup_{n\to\infty}\|T(t_n)x_0-x_0\|\\
\leqslant&\sup_{y\in C}(\|T(t_j)x_0-T(t_j)y\|-\|x_0-y\|)\\
&+\sup_{y\in C}(\|T(t_i-t_j)x_0-T(t_i-t_j)y\|-\|x_0-y\|)\\
&+\limsup_{n\to\infty}\|T(t_n)x_0-x_0\|.
\end{aligned}$$

在上式两边先取 $\limsup_{i\to\infty}$，再取 $\limsup_{j\to\infty}$，即有

$$\begin{aligned}
D(\{T(t_n)x_0\})&=\limsup_{j\to\infty}(\limsup_{i\to\infty}\|T(t_i)x_0-T(t_j)x_0\|)\\
&\leqslant\limsup_{n\to\infty}\|T(t_n)x_0-x_0\|.
\end{aligned}\tag{4.1}$$

采用如同定理 3.1 的证明中的相同方法，可证

$$\limsup_{n\to\infty}\|T(t_n)x_0-x_0\|\leqslant WCS(X)^{-1}D(\{T(t_n)x_0\}).$$

因而，据此及(4.1)即得

$$(WCS(X)-1)\limsup_{n\to\infty}\|T(t_n)x_0-x_0\|\leqslant 0.$$

可见，$x_0=\lim_{n\to\infty}T(t_n)x_0$. 又据每个 $T(s)$ 的连续性及 $T=\{T(s):s\in S\}$ 的弱渐近正则性，即得，对每个 $s\in S$

$$\begin{aligned}
T(s)x_0&=\lim_{n\to\infty}T(s+t_n)x_0=w-\lim_{n\to\infty}T(s+t_n)x_0\\
&=w-\lim_{n\to\infty}T(t_n)x_0=\lim_{n\to\infty}T(t_n)x_0=x_0.
\end{aligned}$$

所以，$F(T)\neq\varnothing$. ▌

注 4.1 与定理 4.1 比较，定理 1.2 是定理 4.1 的离散情形，亦即定理 4.1 的特例. 而且，定理 4.1 在下列方面改进与推广了 Kuczumow 的定理 3.2[8]

(i) 由于 $1+r_X(1)\leqslant WCS(X)$[18]，故条件 $\liminf_{S\ni t\to\infty}|\,\|T(t)\|\,|<1+r_X(1)$ 被拓宽到了 $\liminf_{S\ni t\to\infty}|\,\|T(t)\|\,|<+\infty$；

(ii) 满足 $r_X(1)>0$ 且具有非严格 Opial 性质的 Banach 空间 X 被推广到了具有弱一致正规结构的 Banach 空间；

(iii) 半群的渐近正则性被推广到了半群的弱渐近正则性. 注意到，在定理 4.1 中，考虑与讨论了渐近非扩张型半群. 因此，定理 4.1 是定理 3.2[8] 的部分推广.

参 考 文 献

[1] Bynum W L. Normal structure coefficients for Banach spaces. Pacific J Math, 1980, **86**: 427－436

[2] Dominguez Benavides T. Weak uniform normal structure in direct-sum spaces. Studia Math, 1992, **103**: 283—290
[3] Maluta E. Uniform normal structure and related coefficients. Pacific J Math, 1984, **111**: 357—369
[4] Kirk W A. A fixed point theorem for mappings which do not increase distances. Amer Math Monthly, 1965, **72**: 1004—1006
[5] Lim T C, Xu H K. Fixed point theorems for asymptotically nonexpansive mappings. Nonlinear Analysis, 1994, **22**: 1345—1355
[6] Kirk W A, Torrejon R. Asymptotically nonexpansive semigroups in Banach spaces. Nonlinear Analysis, 1979, **3**: 111—121
[7] Kirk W A. Fixed point theorems for non-Lipschitzian mappings of asymptotically nonexpansive type. Israel J Math, 1974, **17**: 339—346
[8] Kuczumow T. Opial's modulus and fixed points of semigroups of mappings. Proc Amer Math Soc, 1999, **127**: 2671—2678
[9] Dominguez Benavides T. Fixed point theorems for uniformly Lipschitzian mappings and asymptotically regular mappings. Nonlinear Analysis, 1998, **32**: 15—27
[10] Jimenez Melado A. Stability of weak normal structure in James quasi reflexive space. Bull Austral Math Soc, 1992, **46**: 367—372
[11] 曾六川. Banach 空间中渐近正则的 Lipschitz 半群的不动点定理. 数学年刊, 1995, **16**A(6): 744—751
[12] Zeng L C, Yang Y L. On the existence of fixed points for Lipschitzian semigroups in Banach spaces. Chin Ann Math, 2001, **22**B(3): 397—404
[13] Gornicki J. Fixed points of asymptotically regular semigroups in Banach spaces. Rend Circ Mat Palermo, 1997, **46**: 89—118
[14] Dominguez Benavides T, Lopez Acedo G, Xu H K. Weak uniform normal structure and iterative fixed points of nonexpansive mappings. Colloq Math, 1995, **68**: 17—23
[15] Edelstein M. The construction of an asymptotic center with a fixed-point property. Bull Amer Math Soc, 1972, **78**: 206—208
[16] Tan K K, Xu H K. Fixed point theorems for Lipschitzian semigroups in Banach spaces. Nonlinear Analysis, 1993, **20**: 395—404
[17] Soardi P M. Schauder bases and fixed points of nonexpansive mappings. Pacific J Math, 1982, **101**: 193—198
[18] Lin P K, Tan K K, Xu H K. Demiclosedness principle and asymptotic behavior for asymptotically nonexpansive mappings. Nonlinear Analysis, 1995, **24**: 929—946
[19] 曾六川. 一致凸 Banach 空间中渐近非扩张族的几乎轨道的弱收敛性. 数学物理学报, 1996, **16**(4): 435—439

On the Existence of Fixed Points for Asymptotically Nonexpansive Type Semigroups in Banach Spaces

Zeng Liuchuan
(*Department of Mathematics, Shanghai Normal University, Shanghai* 200234)

Abstract: Let C be a nonempty weakly compact convex subset of a Banach space X with weak uniform normal structure. Let $T=\{T(t): t\in S\}$ be an asymptotically nonexpansive type semigroup for which each $T(t)$ is continuous on C. It is shown that the following conclusions hold: (i) if X is uniformly convex then $F(T)$ is nonempty; (ii) if $T=\{T(t): t\in S\}$ with $\liminf_{S\ni t\to\infty}|\,\|T(t)\|\,|<+\infty$ is weakly asymptotically regular on C then $F(T)$ is nonempty, where $|\,\|T(t)\|\,|$ is the exact Lipschitzian constant of $T(t)$, and $F(T)$ is the set of all common fixed points of $T(t), t\in S$.

Key words: Fixed point; Asymptotically nonexpansive type semigroup; Weak uniform normal structure; Asymptotic regularity; Asymptotic center.
MR(2000) Subject Classification: 47H09; 47H10; 47H20