

## 具有阶段结构单种群系统的诱导控制\*

<sup>1,2</sup>赵立纯 <sup>1</sup>张庆灵 <sup>2</sup>杨启昌

(<sup>1</sup>东北大学系统科学研究所 沈阳 110006; <sup>2</sup>鞍山师范学院数学系 鞍山 114005)

**摘要:**对具有阶段结构的单种群模型实施了三种诱导控制,分别找到了相应的诱导控制区域.给出了诱导控制区域与使系统永久持续生存的最终有界区域的关系,得到了使系统永久持续生存的诱导控制律.

**关键词:**诱导控制;阶段结构模型;永久持续生存;诱导控制区域;最终有界区域.

**MR(2000)主题分类:**93C10 **中图分类号:**Q811.3 **文献标识码:**A

**文章编号:**1003-3998(2005)05-710-08

对种群系统控制问题的研究已得到许多学者的重视<sup>[1-6]</sup>.但其中的控制或是状态变量的连续函数或是常值函数.从生物意义上说,只要种群不灭绝,控制就始终被实施.这可能造成人力和物力的浪费.为此,人们可以考虑用变结构控制或脉冲控制<sup>[7-10]</sup>来取代它.变结构控制在机器人控制,飞行器控制,电机控制等方面已经有了广泛的应用,但在种群生态系统的应用几乎无人问津.而脉冲控制在这方面的应用已得到了一些学者的关注,但脉冲控制可能对系统造成扰动而破坏系统的鲁棒性.由于诱导控制<sup>[11]</sup>结构的特殊性——控制从零连续地变到最大或从最大连续地变到零,减少了变结构控制及脉冲控制中控制的不连续性给研究带来的不便,但诱导控制在种群生态系统中的应用极少.

考虑具有阶段结构的单种群系统<sup>[4]</sup>

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \alpha x_2 - \gamma_1 x_1 - \beta x_1 - \eta x_1^2, & x(t_0) = x_{10} > 0, \\ \dot{x}_2 = \beta x_1 - \gamma_2 x_2, & x(t_0) = x_{20} > 0, \end{cases} \quad (1)$$

其中  $x_1(t) > 0$ ,  $x_2(t) > 0$  分别是某种群的幼年及成年在  $t$  时刻的种群密度.  $\alpha$ ,  $\gamma_1$ ,  $\beta$  分别为幼年种群出生率,死亡率和成年转换率,  $-\eta x_1^2$  表示幼年种群是密度制约的.  $\gamma_2$  为成年种群的死亡率.对其做无量纲化(令  $\tilde{x}_1(t) = \eta x_1(t)/\gamma_2$ ,  $\tilde{x}_2(t) = \eta x_2(t)/\beta$ ,  $d\tau = \gamma_2 dt$ , 仍以  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $t$  代替  $\tilde{x}_1(t)$ ,  $\tilde{x}_2(t)$ ,  $\tau$ )得

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \alpha x_2 - b x_1 - x_1^2, & x(t_1) = c x_{10} > 0, \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2 - u_1, & x(t_2) = d x_{20} > 0, \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \alpha x_2 - b x_1 - x_1^2 + u_2, & x(t_0) = c x_{10} > 0, \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2, & x(t_0) = d x_{20} > 0, \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \alpha x_2 - b x_1 - x_1^2 + u_{31}, & x(t_0) = c x_{10} > 0, \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2 - u_{32}, & x(t_0) = d x_{20} > 0, \end{cases} \quad (4)$$

式(2), 式(3), 式(4)中的  $u_i, u_{3i} (i=1, 2)$  都是非负函数,  $c=\eta/r_2, d=\eta/\beta$ .

文章在随后部分介绍了诱导控制的相关内容及其种群持续生存的概念, 并给出了它们之间的关系. 在第二、三、四部分, 对具有阶段结构的单种群模型实施了三种不同的诱导控制, 给出了相应的诱导控制区域, 得到了使系统永久持续生存的诱导控制律. 最后, 简要总结了文章的结果.

## 1 预备知识

考虑下面动态系统

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t), \quad (5)$$

这里  $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n, \mathbf{f}: \mathbf{R}^n \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^n, \mathbf{u} \in \mathbf{R}^m, m \leq n$ .

现在把向量  $\mathbf{x}$  分解成互相垂直的两部分  $\mathbf{x}_A$  和  $\mathbf{x}_B$ . (5)式可以写成下面几种形式

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_A = \mathbf{g}_A(\mathbf{x}_A, \mathbf{x}_B, t), \\ \dot{\mathbf{x}}_B = \mathbf{g}_B(\mathbf{x}_A, \mathbf{x}_B, \mathbf{u}, t). \end{cases} \quad (6)$$

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_A = \mathbf{g}_A(\mathbf{x}_A, \mathbf{x}_B, \mathbf{u}, t), \\ \dot{\mathbf{x}}_B = \mathbf{g}_B(\mathbf{x}_A, \mathbf{x}_B, t). \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_A = \mathbf{g}_A(\mathbf{x}_A, \mathbf{x}_B, \mathbf{u}_A, t), \\ \dot{\mathbf{x}}_B = \mathbf{g}_B(\mathbf{x}_A, \mathbf{x}_B, \mathbf{u}_A, \mathbf{u}_B, t). \end{cases} \quad (8)$$

系统(6), 在控制  $\mathbf{u}$  的作用下, 它的子系统  $B$  构成了系统(6)的内反馈环, 而且此内反馈环把一个理想的特征赋予子系统  $A$ , 同时沿着子系统  $A$  的轨迹  $\mathbf{x}_A$  形成的向量函数  $\mathbf{x}_B$  也呈现出所要求的特性. 即对子系统  $A$ , 事先规定算子  $\mathbf{v}=\mathbf{v}(\mathbf{x}_A, t)$ , 而后实施控制  $\mathbf{u}$  使子系统  $B$  的输出  $\mathbf{x}_B$  满足

$$\mathbf{x}_B = \mathbf{v}(\mathbf{x}_A, t). \quad (9)$$

但要确切地求出满足式(9)的控制  $\mathbf{u}$  是非常困难的. 为此, 把条件(9)放宽为

$$\|\mathbf{s}\| \leq \sigma(\mathbf{x}_A, t). \quad (10)$$

其中  $\mathbf{s}=\mathbf{x}_B-\mathbf{v}(\mathbf{x}_A, t)$ ,  $\|\cdot\|$  表示欧氏范数,  $\sigma(\mathbf{x}_A, t)$  为事先给定的标量函数.  $\mathbf{s}, \sigma(\mathbf{x}_A, t)$  分别叫系统(6)的诱导误差向量和诱导误差.

**定义 1**<sup>[11]</sup> 对系统(6), 如果对事先给定的  $\sigma(\mathbf{x}_A, t)$  及  $\mathbf{s}=\mathbf{x}_B-\mathbf{v}(\mathbf{x}_A, t)$ , 能找到控制  $\mathbf{u}$  使系统(6)的解在有限的时间内到达(10)式规定的区域范围内, 称此控制  $\mathbf{u}$  为系统(6)的诱导控制. 并称(10)式确定的区域为诱导控制区域.

**定义 2**<sup>[12]</sup> 紧集  $\Omega \subset \text{Int}\mathbf{R}_+^2$  被称做系统(1)的一个最终有界区域, 如果存在一个有限时间  $T_1=T_1(t_0, \mathbf{x}_0)$  使得  $\mathbf{x}(t, t_0, \mathbf{x}_0) \in \Omega, t \geq T_1$  成立. 其中  $\mathbf{x}(t, t_0, \mathbf{x}_0)$  是系统(1)的满足初始条件  $\mathbf{x}_0 \in \text{Int}\mathbf{R}_+^2$  的解.

**定义 3**<sup>[12]</sup> 称系统(1)是永久持续生存的, 如果存在一个严格远离正向坐标轴的最终有界区域.

由上述定义可以看出, 诱导控制区域与使系统永久持续生存的最终有界区域的关系.

## 2 对成年种群的诱导控制

对系统(2), 取  $L>0, M>0$  及  $\delta>0$ , 且  $L-\delta>0, M-\delta>L+\delta$ .

首先, 分别过点  $(0, -M+\delta)$ ,  $(0, -M)$ ,  $(0, -M-\delta)$  作平行于  $x_2 = x_1$  的直线

$$\begin{aligned} l_{1u}: x_2 &= x_1 - M + \delta, \\ l_1: x_2 &= x_1 - M, \\ l_{1d}: x_2 &= x_1 - M - \delta. \end{aligned} \quad (11)$$

再过点  $(0, -L+\delta)$ ,  $(0, -L)$ ,  $(0, -L-\delta)$  分别做平行于  $ax_2 - bx_1 - x_1^2 = 0$  的曲线

$$\begin{aligned} h_{1u}: ay_2 - bx_1 - x_1^2 &= a(-L + \delta), \\ h_1: ay_2 - bx_1 - x_1^2 &= -aL, \\ h_{1d}: ay_2 - bx_1 - x_1^2 &= a(-L - \delta). \end{aligned} \quad (12)$$

最后, 过点  $(0, L+\delta)$ ,  $(0, L)$ ,  $(0, L-\delta)$  分别做平行于  $ax_2 - bx_1 - x_1^2 = 0$  的曲线

$$\begin{aligned} h_{2u}: ax_2 - bx_1 - x_1^2 &= a(L + \delta), \\ h_2: ax_2 - bx_1 - x_1^2 &= aL, \\ h_{2d}: ax_2 - bx_1 - x_1^2 &= a(L - \delta). \end{aligned} \quad (13)$$

从(11)式, (12)式, (13)式, 可以得到下面几个引理.

**引理 2.1** 如果  $(a-b)^2 - 4a(M-L) > 0$ , 则直线  $l_{1u}$ ,  $l_1$ ,  $l_{1d}$  分别与曲线  $h_{1u}$ ,  $h_1$ ,  $h_{1d}$  相交, 且它们的交点具有相同的横坐标  $x_1^{**} = [(a-b) + \sqrt{(a-b)^2 - 4a(M-L)}] / 2$ .

**引理 2.2** 如果  $(a-b)^2 - 4a(M+L) > 0$ , 则直线  $l_{1u}$ ,  $l_1$ ,  $l_{1d}$  分别与曲线  $h_{2u}$ ,  $h_2$ ,  $h_{2d}$  相交, 且它们的交点具有相同的横坐标  $x_1^* = [(a-b) - \sqrt{(a-b)^2 - 4a(M+L)}] / 2$ .

从引理 2.1 及引理 2.2 知道  $x_1^{**} > x_1^* > 0$ . 取算子为

$$v_1(x_1) = \begin{cases} \frac{cx_1^2 + bx_1 - aL}{a}, & x_1 > x_1^{**}, \\ x_1 - M, & x_1^* < x_1 \leq x_1^{**}, \\ \frac{cx_1^2 + bx_1 + aL}{a}, & x_1 \leq x_1^*. \end{cases} \quad (14)$$

由(14)式可看出  $v_1(x_1)$  是连续的, 针对(14)式确定的算子  $v_1(x_1)$ , 通过寻找控制  $u_1$ , 使得子系统(2)的输出  $x_2$  与算子  $v_1(x_1)$  差的范数小于事先给定的正数  $\delta$ . 通过下面两个步骤来完成此过程.

第一步: 根据系统(2)的第一个方程. 如果  $|x_2 - v_1(x_1)| \leq \delta$  成立, 则系统(2)的满足初始条件  $x_{10} \neq 0$  的解最终进入区域  $D_1 = \{(x_1, x_2) : x_1^* < x_1 < x_1^{**}, |x_2 - v_1(x_1)| \leq \delta\}$ .

第二步: 下面来寻找控制  $u_1$ , 使系统(2)的解进入区域  $|x_2 - v_1(x_1)| \leq \delta$ .

如果初始点落在  $x_2 - v_1(x_1) < -\delta$  区域内, 则控制  $u_1 = 0$  就能使系统(2)的解通过  $|x_2 - v_1(x_1)| = \delta$  进入区域  $|x_2 - v_1(x_1)| < \delta$ , 由第一步可知, 进入  $|x_2 - v_1(x_1)| < \delta$  的解最终进入区域  $D_1$  中.

如果初始点落在  $x_2 - v_1(x_1) > \delta$  的区域内,  $s = x_2 - v_1(x_1)$  必须稳定地减少, 这样系统(2)的解才能进入区域  $D_1$  中.

当  $x_1 > x_1^{**}$  或  $x_1 < x_1^*$  时, 有

$$\dot{s} = \dot{x}_2 - \frac{dv}{dx_1} \frac{dx_1}{dt} = (1 + \frac{b^2}{a})x_1 + \frac{3b}{a}x_1^2 + \frac{2}{a}x_1^3 - (1+b)x_2 - 2x_1x_2 - u_1. \quad (15)$$

当  $x_1^* < x_1 < x_1^{**}$  时, 有

$$\dot{s} = \dot{x}_2 - \frac{dv}{dx_1} \frac{dx_1}{dt} = (1+b)x_1 + x_1^2 - u_1 - (1+a)x_2. \quad (16)$$

为了使  $\dot{s} < 0$ , 取  $k_1 \geq \max\{(1+b), 3b/a, 2/a\}$ . 借助  $u_1$  在  $|s| \leq \delta$  的中间值来规定  $u_1$

的方向

$$u_1 = k_1(x_1 + x_1^2 + x_1^3) \max\left\{0, \min\left\{1, \frac{s + \delta}{2\delta}\right\}\right\}. \quad (17)$$

综上所述, 得到下面定理.

**定理 2.1** 对于正数  $\delta$  及相应的区域  $D_1 = \{(x_1, x_2) : x_1^* < x_1 < x_1^{**}, |x_2 - v_1(x_1)| \leq \delta\}$ , 如果初始条件  $(x_{10}, x_{20}) \neq (0, 0)$ , 且  $(a-b)^2 - 4a(M+L) > 0$ , 则控制

$$u_1 = k_1(x_1 + x_1^2 + x_1^3) \max\left\{0, \min\left\{1, \frac{s + \delta}{2\delta}\right\}\right\},$$

能使系统(2)的解最终进入区域  $D_1$  中.

**注 1** 定理 2.1 中的  $D_1$  可以作为使系统(2)永久持续生存的最终有界区域. 由此得

**推论 2.1** 如果定理 2.1 中的条件成立, 则系统(2)是永久持续生存的.

由此可知: 当成年种群超过一定数量时, 人们可以捕获一些, 使之为人服务. 而且这种捕获又不能导致该种群的灭绝. 当成年种群不足某一数量时, 捕获会自然停止, 而且捕获由实施到停止或又停止到实施的过程是在带形区域  $|x_2 - v_1(x_1)| \leq \delta$  中完成的, 因此这条带被称为系统(2)的缓冲带. 正是这个缓冲带减少了脉冲控制或变结构控制的不连续性带来的不便. 图 1 是系统(2)解的行为图.

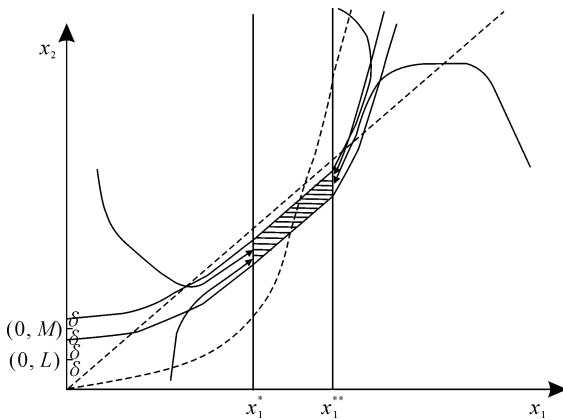


图 1 系统(2)解的行为图

### 3 对幼年种群的诱导控制

对系统(3). 取  $H > 0$ ,  $N > 0$  及  $\sigma > 0$ , 且  $N - \sigma > H + \sigma$ ,  $H - \sigma > 0$ .

首先, 分别过点  $(0, H + \sigma)$ ,  $(0, H)$ ,  $(0, H - \sigma)$  做平行于  $x_2 = x_1$  的直线

$$\begin{aligned} l_{2u}: x_2 &= x_1 + H + \sigma, \\ l_2: x_2 &= x_1 + H, \\ l_{2d}: x_2 &= x_1 + H - \sigma. \end{aligned} \quad (18)$$

其次, 分别过点  $(0, -H + \sigma)$ ,  $(0, -H)$ ,  $(0, -H - \sigma)$  做平行于  $x_2 = x_1$  的一组直线

$$\begin{aligned} l_{3u}: x_2 &= x_1 - H + \sigma, \\ l_3: x_2 &= x_1 - H, \\ l_{3d}: x_2 &= x_1 - H - \sigma. \end{aligned} \quad (19)$$

最后, 分别过点  $(N-\sigma, 0)$ ,  $(N, 0)$ ,  $(N+\sigma, 0)$  做平行于  $ax_2 - bx_1 - x_1^2 = 0$  的一组曲线

$$\begin{aligned} h_{3u}: ax_2 - bx_1 - x_1^2 &= -b(N-\sigma) - (N-\sigma)^2, \\ h_3: ax_2 - bx_1 - x_1^2 &= -bN - N^2, \\ h_{3d}: ax_2 - bx_1 - x_1^2 &= -b(N+\sigma) - (N+\sigma)^2. \end{aligned} \quad (20)$$

对于上面假设, 可以得到下面引理.

**引理 3.1** 如果  $l_{2u}$  与  $h_{3u}$ ,  $l_2$  与  $h_3$ ,  $l_{2d}$  与  $h_{3d}$  在第一象限内分别只有一个交点, 而且这些交点具有相同的纵坐标  $x_2^{**} = H + N \Leftrightarrow a = 0$ .

**引理 3.2** 如果  $l_{3u}$  与  $h_{3u}$ ,  $l_3$  与  $h_3$ ,  $l_{3d}$  与  $h_{3d}$  在第一象限内分别只有一个交点, 而且这些交点具有相同的纵坐标  $x_2^* = N - H \Leftrightarrow a = 0$ .

对于上述  $N > H > 0$ , 取算子

$$v_2(x_2) = \begin{cases} x_2 - H, & x_2 \geq x_2^{**}, \\ N, & x_2^* \leq x_2 < x_2^{**}, \\ x_2 + H, & x_2 < x_2^*. \end{cases} \quad (21)$$

由(21)式可知算子  $v_2(x_2)$  是连续的. 事先规定诱导误差  $\sigma > 0$ . 对于(21)式中的算子, 根据图 2 得定理 3.1.

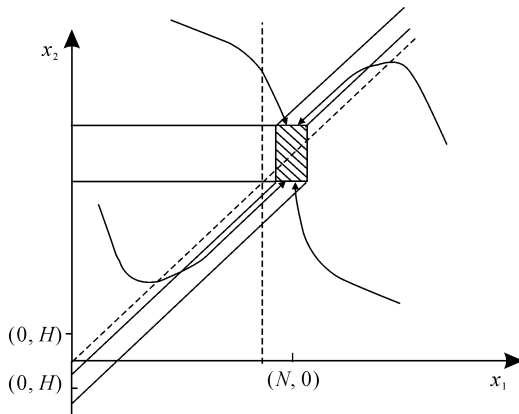


图 2 系统(3)解的行为图

**定理 3.1** 事先给定算子  $v_2(x_2)$  及诱导误差  $\sigma > 0$ . 如果  $N > H > 0$  成立, 且  $a = 0$ , 则控制

$$u_2 = k_2(x_1 + x_1^2) \max \left\{ 0, \min \left\{ 1, \frac{-s_1 + \sigma}{2\sigma} \right\} \right\}.$$

能使系统(3)的解进入区域  $D_2$  中.

**注 2**  $a = 0$  表示成年种群失去了生育能力, 此时投放一定数量的幼年种群可以使系统永久持续生存下去, 这一点在实际问题中是可以得到理解的. 同时有

**推论 3.1** 如果定理 3.1 的所有条件成立, 系统(3)是永久持续生存的.

当然, 也可以采用同样的方法在  $a \neq 0$  的情况下对系统(3)进行控制, 但寻找诱导控制区域的过程会更复杂些, 而且找出的诱导控制区域更难表示. 有时为了平衡成、幼年种群的数量, 投入幼年种群和获取成年种群的两过程是同时进行的, 处理这一问题虽然采用了诱导控制的思想, 但方法上不尽相同. 在第四部分将给出其做法.

#### 4 对幼年及成年种群的诱导控制

对系统(4), 取  $L_1 > 0, \rho > 0$  且  $-L_1 + \rho < 0$ .

首先, 分别过  $(0, -L_1 + \rho)$  和  $(0, -L_1 - \rho)$  做平行于  $x_1 - x_2 = 0$  的直线

$$\begin{aligned} l_{4u}: x_2 &= x_1 - L_1 + \rho, \\ l_4: x_2 &= x_1 - L_1, \\ l_{4d}: x_2 &= x_1 - L_1 - \rho. \end{aligned} \quad (22)$$

这样  $l_{4u}$  与  $l_{4d}$  两直线组成的直线带在第一象限的部分表示为

$$D_3 = \{(x_1, x_2) \mid x_1 > 0, x_2 > 0 \text{ 且 } x_1 - L_1 - \rho \leq x_2 \leq x_1 - L_1 + \rho\}. \quad (23)$$

再分别过  $(0, -L_1 + \rho)$  和  $(0, -L_1 - \rho)$  做平行于  $ax_2 - bx_1 - x_1^2 = 0$  的曲线

$$\begin{aligned} h_{4u}: ax_2 - bx_1 - x_1^2 &= -a(L_1 - \rho), \\ h_4: ax_2 - bx_1 - x_1^2 &= -aL_1, \\ h_{4d}: ax_2 - bx_1 - x_1^2 &= -a(L_1 + \rho). \end{aligned} \quad (24)$$

$h_{4u}$  与  $h_{4d}$  两曲线组成的曲线带在第一象限的部分表示为

$$D_4 = \{(x_1, x_2) \mid x_2 > 0, x_1 > 0 \text{ 且 } c \leq x_1 \leq d\}. \quad (25)$$

其中  $c = \frac{-b + \sqrt{b^2 + 4a(x_2 + L_1 - \rho)}}{2}$ ,  $d = \frac{-b + \sqrt{b^2 + 4a(x_2 + L_1 + \rho)}}{2}$ .

$D_3$  与  $D_4$  相交的部分由  $D$  来表示, 即  $D = D_3 \cap D_4$  (图 3 中的阴影部分).

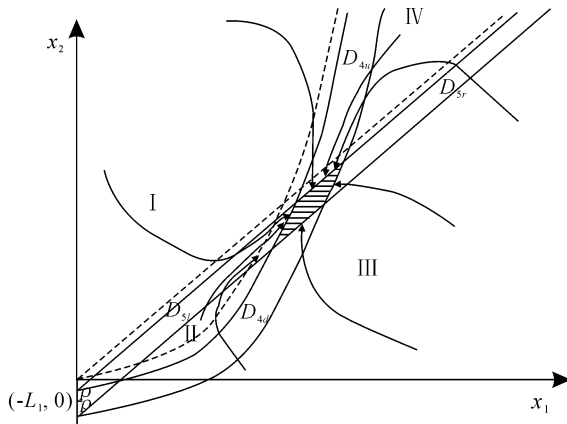


图 3 系统(4)解的行为图

令算子  $v_3(x_1) = x_1 - L$ ,  $v_4(x_2) = [-b + \sqrt{b^2 + 4a(L + x_2^2)}]/2$ . 并令  $s_3 = x_2 - v_3(x_1)$ ,  $s_4 = x_1 - v_4(x_2)$ .

**定理 4.1** 对事先给定的  $L_1 > 0, \rho > 0$ , 且满足  $L_1 - \rho > 0$ . 如果施加控制

$$u_{31} = k_{31}(x_1 + x_1^2) \max\left\{0, \min\left\{1, \frac{-s_4 + \rho}{2\rho}\right\}\right\}, \quad u_{32} = k_{32}x_1 \max\left\{0, \min\left\{1, \frac{s_3 + \rho}{2\rho}\right\}\right\}, \quad (26)$$

则通过调节  $k_{31}, k_{32}$ , 使系统(4)的满足初始条件  $x_0 \in \text{Int}\mathbf{R}_+^2$  的解最终进入区域  $D$  (其中  $k_{31} \geq \max\{b, 1\}, k_{32} \geq 1$ ).

证 从图 3, 可以看出第一象限被带  $D_3$  和  $D_4$  分成四个部分: 部分 I, 部分 II, 部分 III, 部分 IV, 且在这四部分分别有

$$\begin{cases} u_{31} = k_{31}(x_1 + x_1^2), & \dot{x}_1 > ax_2 > 0, \\ u_{32} = k_{32}x_1, & \dot{x}_2 < -x_2 < 0. \end{cases} \quad (27)$$

$$\begin{cases} u_{31} = k_{31}(x_1 + x_1^2), & \dot{x}_1 > ax_2 > 0, \\ u_{32} = 0, & \dot{x}_2 = x_1 - x_2 > 0. \end{cases} \quad (28)$$

$$\begin{cases} u_{31} = 0, & \dot{x}_1 = ax_2 - bx_1 - x_1^2 < 0, \\ u_{32} = 0, & \dot{x}_2 = x_1 - x_2 > 0. \end{cases} \quad (29)$$

$$\begin{cases} u_{31} = 0, & \dot{x}_1 = ax_2 - bx_1 - x_1^2 < 0, \\ u_{32} = k_{32}x_1, & \dot{x}_2 = -x_2 < 0. \end{cases} \quad (30)$$

取控制  $u_{31}$ ,  $u_{32}$  分别在  $|s_3| \leq \rho$ ,  $|s_4| \leq \rho$  的中间值来规定  $u_{31}$ ,  $u_{32}$  的方向.

$$u_{31} = k_{31}(x_1 + x_1^2) \max\left\{0, \min\left\{1, \frac{-s_4 + \rho}{2\rho}\right\}\right\}, \quad u_{32} = k_{32}x_1 \max\left\{0, \min\left\{1, \frac{s_3 + \rho}{2\rho}\right\}\right\},$$

经过这两个带, 控制会从零连续变到最大或从最大连续变到零. 由此可知,  $D_3$ ,  $D_4$  为控制系统(4)的缓冲带, 而它们的交集  $D$  是控制系统(4)的诱导控制区域.

由  $u_{31}$  和  $u_{32}$  的表达式知道,  $u_{31}$  和  $u_{32}$  是连续的. 又由于它们由  $x_1$  和  $x_2$  的多项式组成, 这样施加控制后的闭环系统在每个区域的内部满足解的存在唯一性定理的条件. 由此得

(i) 对于初始点在第 I 部分的解曲线, 或者进入  $D_3$  在  $D$  左半部分  $D_{3l}$  或者进入  $D_4$  在  $D$  的上半部分  $D_{4u}$ . 用反证法证明系统(4)的解不离开它们. 如果解从第 I 部分进入  $D_{3l}$  后, 再从下部走出  $D_{3l}$  进入第 II 部分, 这样必与起始于第 II 部分的某一解曲线相交, 于是破坏了解的存在唯一性. 同样可以证明: 起始于第 I 部分的解曲线进入  $D_{4u}$  后, 也不离开  $D_{4u}$ .

(ii) 对于初始点在第 II 部分的解曲线, 只能进入  $D_{3l}$ , 同样可以证明, 这些解曲线不离开  $D_{3l}$ .

(iii) 对于初始点在第 IV 部分的解曲线, 只能进入  $D_{4u}$ , 同理可证, 这些解曲线不离开  $D_{4u}$ .

(iv) 对于初始点在第 III 部分的解曲线, 要么进入  $D_4$  在  $D$  的下部  $D_{4d}$  直接进入诱导控制区域  $D$ . 要么穿过  $D_4$ , 进入第 II 部分而后, 按(ii)进行. 另外, 此部分出发的解曲线还可能进入  $D_3$  在  $D$  的右侧  $D_{3r}$  而直接进入第 IV 部分, 而后再按(iii)进行.

从上面讨论可知: 无论哪种情况发生, 系统的解最后都进入诱导控制区域  $D$ . 证毕. ■

**引理 4.1** 如果定理 4.1 中条件得到满足, 实施控制  $u_{31}$  和  $u_{32}$ , 则系统(4)是永久持续生存的.

## 5 结论

综上所述, 对系统(1)实施三种情况的诱导控制后, 都可以达到使系统永久持续生存的目的. 由此可见, 诱导控制与系统永久持续生存有着密切的关系. 如果诱导控制中的诱导控制区域远离坐标轴就会使系统永久持续生存下去, 也就是说, 此时的诱导控制区域可以作为使系统永久持续生存的最终有界区域. 但值得注意的是诱导控制并非是使系统永久持续生存的唯一手段. 根据系统永久持续生存的不同定义方式, 会有相应的证明方法. 对于上述诱导控制问题, 人们可以把它推广到三维空间上去, 但问题会变得更复杂些. 尽管如此, 这也是今后要做的工作之一.

## 参 考 文 献

- [1] 陈兰荪. 数学生态学模型与研究方法. 北京:科学出版社, 1988. 199—231
- [2] 陈兰荪, 陈健. 非线性生物动力系统. 北京:科学出版社, 1993. 215—226
- [3] Clark C W. *Mathematical Bioeconomics; The Optimal Management of Renewable Resource*. New York: John Wiley & Sons, Inc. 1990. 245—343
- [4] Zhang X A, Chen L S, Neumann A. The stage-structured predator-prey model and optimal harvesting policy. *Mathematical biosciences*, 2000, **168**: 201—210
- [5] Song X Y, Chen L S. Optimal harvesting and stability for a two-species competitive system with stage structure. *Mathematical biosciences*, 2001, **179**: 173—186
- [6] Fan M, Wang K. Optimal harvesting policy for population with periodic coefficients. *mathematical biosciences*, 1998, **152**: 165—177
- [7] Lakshmikantham V, Bainov D D, Simeonov P S. *Theory of Impulsive Differential Equations*. New York: World Scientific, 1989. 57—149
- [8] Blaquiere A. *Differential Games with Piece-wise Continuous Trajectories*. Lecture Notes in Control and Information (3). Berlin: Springer Verlag, 1977. 34—70
- [9] Cohen Y. *Applications of Optimal Control to Optimal Foraging Problem*. Lecture Notes in Biomathematics(73). Berlin: Springer Verlag, 1987. 39—56
- [10] Li Z G, Wen C Y, Soh Y C. Analysis and design of impulsive control systems. *IEEE Transactions Automatic Control*, 2001, **46**: 894—897
- [11] M Thome. *Lecture Notes in Control and Information Science(231)*. London: Springer Verlag, 1998. 1—153
- [12] Yang X, Chen J F. Permanence and existence of positive periodic solution for diffusive Lotka-Volterra model. *生物数学学报*, 1997, **12**(1): 1—7

## The Induction Control of a Single-Species Model with Stage Structure

<sup>1,2</sup>Zhao Lichun   <sup>1</sup>Zhang Qingling   <sup>2</sup>Yang Qichang

(<sup>1</sup>*Institute of Systems Science, Northeastern University, Shenyang 110006*)

(<sup>2</sup>*Department of Mathematics, Anshan Teachers College, Anshan 114005*)

**Abstract:** Three different induction control are exerted on a single-species model with stage structure. The corresponding induction control domains are got. The relation between induction control domain and ultimately bounded domain which makes the system persist is given. Some induction control laws which make the system permanent are obtained.

**Key words:** Induction control; Stage Structure; Permanence; Induction control domain; Ultimately bounded domain.

**MR(2000) Subject Classification:** 93C10