2005,**25A**(3):337－344

Acta Mathematica Scientia
数学物理学报

某些算子在局部紧的 Vilenkin 群上的 Herz 型 Hardy 空间上的有界性*

[1,2]汤灿琴 [1]李庆国 [1]马柏林

([1] 湖南大学数学与计量经济学院 长沙 410081; [2] 湖南文理学院数学系 常德 415000)

摘要: G 表示局部紧的 Vilenkin 群，在论文中作者将研究某些次线性算子和 Calderón-Zygmund 算子在 Herz 型 Hardy 空间上的有界性.

关键词: Herz 空间;Herz 型 Hardy 空间;Vilenkin 群;次线性算子.

MR(2000)主题分类: 43A70;43A75 **中图分类号:** O177.5 **文献标识码:** A

文章编号: 1003-3998(2005)03-337-08

1 引言

1997 年,胡国恩、陆善镇和杨大春在文[1]和[2]中引入了 R^n 上的弱 Herz 空间和弱 Herz 型 Hardy 空间,并给出了算子在其上有界性的应用. 在文[3]中 Kitada 和杨大春则引入了局部紧的 Vilenkin 群 G 上的加权弱 Herz 空间,并讨论了位势算子在临界指标情形下的有界性. 后来,杨大春又证明了当 Calderón-Zygmund 算子的核满足一定条件时,它将 Herz 型 Hardy 空间映入 Herz 型空间[4]. 在本篇论文中,我们将文[4]的结果进一步拓广,考虑算子在群 G 上的 Herz 型 Hardy 空间的有界性.

首先我们来回忆一些重要的记号与定义. 在整篇文章中,G 表示局部紧的 Vilenkin 群,即 G 为包含严格递增紧开子群序列 $\{G_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ 的局部紧的 Abelian 群,且

(a) $\bigcup\limits_{n=-\infty}^{\infty} G_n=G$ 和 $\bigcap\limits_{n=-\infty}^{\infty} G_n=\{0\}$;

(b) $\sup\{\mathrm{order}(G_n/G_{n+1}):n\in \mathbf{Z}\}=B<\infty$.

在 G 上选择 Haar 测度 $\mathrm{d}x$ 使得 $|G_0|=1$,其中 $|A|$ 表示 G 的可测子集 A 上的 Haar 测度. 对 $n\in \mathbf{Z}$,记 $|G_n|=(m_n)^{-1}$. 因为 $2m_n\leqslant m_{n+1}\leqslant Bm_n$,则 $\forall\, \alpha>0,k\in \mathbf{Z}$ 有

$$\sum_{n=k}^{\infty}(m_n)^{-\alpha}\leqslant C(m_k)^{-\alpha}$$

以及

$$\sum_{n=-\infty}^{k}(m_n)^{\alpha}\leqslant C(m_k)^{\alpha},$$

这里 C 是与 k 无关的常数. $\forall\, n\in \mathbf{Z}$,选取 $z_{l,n}\in G(l\in \mathbf{Z}_+)$ 使得 G 的子集 $G_{l,n}:=z_{l,n}+G_n$ 满

收稿日期:2003-11-18;修订日期:2004-10-09

E-mail:tangcq2000@sina.com

* 基金项目:国家自然科学基金(10371004)资助

足当 $k\neq l$ 时 $G_{k,n}\cap G_{l,n}=\phi$，$\bigcup\limits_{l=0}^{\infty}G_{l,n}=G$，另外选取 $z_{0,n}$ 使得 $G_{0,n}=G_n$. 在此基础上如果我们定义函数 d: $G\times G\to R$ 如下：当 $x-y=0$ 时，$d(x,y)=0$；当 $x-y\in G_n\setminus G_{n+1}$ 时，$d(x,y)=(m_n)^{-1}$，那么 d 定义了一个 G 上的度量，并且由此度量产生的拓扑就是 G 的原始拓扑. 若对于 $x\in G$，规定 $|x|=d(x,0)$，则 $|x|=(m_n)^{-1}\Leftrightarrow x\in G_n\setminus G_{n+1}$.

设 $S(G)$ 表示 G 上的检验函数空间，$S'(G)$ 为其对偶空间[5]. 函数 φ: $G\to C$ 属于 $S(G)$ 当且仅当依赖于 φ 的整数 k,l 使得 $\mathrm{supp}\,\varphi\subset G_k$ 且 φ 在 G 的子群 G_l 的陪集上恒为常数. 若对于 $S(G)$ 中函数列 $\{\varphi_n\}_1^{\infty}$，存在常数 k,l 使得 φ_n 和 φ 都支在集 G_k 上，在 G_l 的陪集上为常数，并且 $\varphi_n(x)$ 在 G 上一致收敛到 $\varphi(x)$，则称 $\{\varphi_n\}_1^{\infty}$ 收敛到 $\varphi\in S(G)$. 因此 $S'(G)$ 表示的就是 $S(G)$ 上的连续线性泛函全体. 如果对于所有 $S(G)$ 中的 φ，$\lim\limits_{n\in\infty}\langle f_n,\varphi\rangle=\langle f,\varphi\rangle$，则称 $S'(G)$ 中的序列 $\{f_n\}_1^{\infty}$ 收敛到 $f\in S'(G)$.

设 $f\in S'(G)$，定义其极大函数 $f^*(x)$

$$f^*(x)=\sup_{n\in\mathbf{Z}}\Big|\,m_n\int_{x+G_n}f(y)\mathrm{d}y\,\Big|.$$

定义 1 设 $\alpha\in\boldsymbol{R}$，$0<p,q\leqslant\infty$

(a) 齐次 Herz 空间定义为

$$\dot K_q^{\alpha,p}(G)=\{f:f\text{ 为 }G\text{ 上可测函数且 }\|f\|_{\dot K_q^{\alpha,p}(G)}<\infty\},$$

其中 $\|f\|_{\dot K_q^{\alpha,p}(G)}=\Big\{\sum\limits_{l=-\infty}^{\infty}m_l^{-\alpha p}\|f\chi_{G_l\setminus G_{l+1}}\|_{L^q(G)}^p\Big\}^{1/p}$，

当 $p=\infty$ 或 $q=\infty$ 时做通常的修改.

(b) 非齐次 Herz 空间定义为

$$K_q^{\alpha,p}(G)=\{f:f\text{ 为 }G\text{ 上可测函数且 }\|f\|_{K_q^{\alpha,p}(G)}<\infty\},$$

其中 $\|f\|_{K_q^{\alpha,p}(G)}=\Big\{\|f\chi_{G_0}\|_{L^q(G)}^p+\sum\limits_{l=-\infty}^{-1}m_l^{-\alpha p}\|f\chi_{G_l\setminus G_{l+1}}\|_{L^q(G)}^p\Big\}^{1/p}$，

当 $p=\infty$ 或 $q=\infty$ 时做通常的修改.

定义 2 设 $\alpha\in\boldsymbol{R}$，$0<p,q<\infty$

(a) 齐次 Herz 型 Hardy 空间定义为

$$H\dot K_q^{\alpha,p}(G)=\{f\in S'(G):f^*\in\dot K_q^{\alpha,p}(G)\},$$

而且
$$\|f\|_{H\dot K_q^{\alpha,p}(G)}=\|f^*\|_{\dot K_q^{\alpha,p}(G)}.$$

(b) 非齐次 Herz 型 Hardy 空间定义为

$$HK_q^{\alpha,p}(G)=\{f\in S'(G):f^*\in K_q^{\alpha,p}(G)\},$$

而且
$$\|f\|_{HK_q^{\alpha,p}(G)}=\|f^*\|_{K_q^{\alpha,p}(G)}.$$

定义 3 设 $0\leqslant\alpha<\infty$，$0<p,q<\infty$

(a) 函数 $a\in L^q(G)$ 叫做中心 (α,q) 块，如果它满足

(i) $\mathrm{supp}\,a\subseteq G_n$；(ii) $\|a\|_{L^q(G)}\leqslant m_n^{\alpha}$，其中 $\mathrm{supp}a$ 表示函数 $a(x)$ 的支集.

(b) 函数 $a\in L^q(G)$ 被称做中心 (α,q) 原子，如果它不仅满足上面 (a) 中的条件 (i) 和 (ii)，而且满足 (iii) $\int_G a(x)\mathrm{d}x=0$.

与 $\boldsymbol{R}^n$ 上 Herz 空间和 Herz 型 Hardy 空间的分解类似，G 上的 Herz 型 Hardy 空间也有相应的原子分解[6-8].

定理 A 设 $0<\alpha<\infty$，$1\leqslant q<\infty$，$0<p<\infty$，那么 $f\in\dot K_q^{\alpha,p}(G)$（或 $f\in K_q^{\alpha,p}(G)$）当且仅

当 $f(x)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\lambda_k b_k(x)$ (或 $f(x)=\sum_{k=-\infty}^{0}\lambda_k b_k(x)$) 在分布意义下成立,其中 b_k 是中心 (α, q) 块,且 $\sum_{k=-\infty}^{\infty}|\lambda_k|^p<\infty$. 进一步有

$$\|f\|_{\dot{K}_q^{\alpha,p}(G)}\ \inf\left\{\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty}|\lambda_k|^p\right)^{1/p}\right\},$$

其中下确界取遍 f 的所有上述分解.

定理 B　设 $0<q<\infty$, $1-1/q\leqslant\alpha<\infty$, $0<p<\infty$. 那么 $f\in H\dot{K}_q^{\alpha,p}(G)$ (或 $f\in HK_q^{\alpha,p}(G)$) 当且仅当 $f(x)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\lambda_k a_k(x)$ (或 $f(x)=\sum_{k=-\infty}^{0}\lambda_k a_k(x)$) 在分布意义下成立,其中 a_k 是支在中心 G_k 上的 (α,q) 原子,且 $\sum_{k=-\infty}^{\infty}|\lambda_k|^p<\infty$. 进一步有

$$\|f\|_{H\dot{K}_q^{\alpha,p}(G)}\ \inf\left\{\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty}|\lambda_k|^p\right)^{1/p}\right\},$$

其中下确界取遍 f 的所有上述分解.

2　主要结果及其证明

在本节中,我们将证明 Calderón-Zygmund 算子和一些次线性算子在齐性 Herz 型 Hardy 空间上的有界性. 事实上,这些结果在非齐性 Herz 型 Hardy 空间上也同样成立,因为方法相似,所以这里略去其证明. 在下文中用 χ_l 表示 $\chi_{G_l\setminus G_{l+1}}$, C 可以代表不同的常数.

定理 1　设 $0<\delta\leqslant1$, $1<q<\infty$, $1-1/q\leqslant\alpha<1-1/q+\delta$, $0<p\leqslant\infty$, 且对于任意具有紧支集的 $L^1(G)$ 中的函数和 $x\notin\operatorname{supp}f$, 次线性算子 T 满足

$$|Tf(x)|\leqslant C\int_{\operatorname{supp}f}\frac{|f(y)|}{|x-y|^{1+\delta}}\mathrm{d}y, \tag{1}$$

其中 c 是与 f 和 x 无关的常数. 若 T 是 $L^q(G)$ 上的有界算子,则 T 是 $H\dot{K}_q^{\alpha,p}(G)$ 到 $\dot{K}_q^{\alpha,p}(G)$ 的有界算子.

证　类似于文[4]中定理 2 的证明,我们首先假设 $0<p\leqslant1$. 在这种情况下,由定理 B 知道要完成定理 1 的证明,我们仅须证明:对于任意支在 G_k 上的 (α, q) 原子 a_k, $\|Ta_k\|_{\dot{K}_q^{\alpha,p}(G)}\leqslant C$. 记

$$\begin{aligned}\|Ta_k\|_{\dot{K}_q^{\alpha,p}(G)}&\leqslant C\left\{\sum_{l=-\infty}^{k-3}|G_l|^{\alpha p}\|\chi_l Ta_k\|_{L^q(G)}^p\right\}^{1/p}+C\left\{\sum_{l=k-2}^{\infty}|G_l|^{\alpha p}\|\chi_l Ta_k\|_{L^q(G)}^p\right\}^{1/p}\\&\equiv F_1+F_2,\end{aligned}$$

对于 F_2 部分,由 T 在 $L^q(G)$ 上的有界性,容易得到

$$\begin{aligned}F_2&\leqslant C\left\{\sum_{l=k-2}^{\infty}|G_l|^{\alpha p}\|Ta_k\|_{L^q(G)}^p\right\}^{1/p}\\&\leqslant C\left\{\sum_{l=k-2}^{\infty}|G_l|^{\alpha p}\|a_k\|_{L^q(G)}^p\right\}^{1/p}\\&\leqslant Cm_k^{\alpha}\left(\sum_{l=k-2}^{\infty}m_l^{-\alpha p}\right)^{1/p}\end{aligned}$$

$$\leqslant C.$$

下面来估计 F_1. 当 $l\leqslant k-3$ 时 $G_l\supset G_{l+1}\supset G_k$. 若 $x\in G_l\backslash G_{l+1}$, $y\in G_k$, 则 $x\notin G_k$ 且 $x-y\in G_l\backslash G_{l+1}$. 根据尺寸条件(1), 由 Minkowski 不等式和 Hölder 不等式, 我们可以得到

$$\|\chi_l Ta_k\|_{L^q(G)}\leqslant C_0\left(\int_{G_l\backslash G_{l+1}}\left(\int_{G_k}\frac{|a_k(y)|}{|x-y|^{1+\delta}}\mathrm{d}y\right)^q\mathrm{d}x\right)^{1/q}$$

$$\leqslant C\Big(\frac{m_l}{m_k}\Big)^{1-1/q+\delta}m_k{}^{\alpha},$$

而 $\alpha<1-1/q+\delta$, 所以 $F_1\leqslant C\left\{\sum\limits_{l=-\infty}^{k-3}\Big(\frac{m_k}{m_l}\Big)^{[\alpha-(1-1/q)-\delta]p}\right\}^{1/p}\leqslant C.$

若 $1<p<\infty$, $f\in H\dot{K}_q^{\alpha,p}(G)$, 利用定理 B 有 $f=\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}\lambda_k a_k$, 其中 a_k 是支在 G_k 上的 (α,q) 原子且 $\Big(\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}|\lambda_k|^p\Big)^{1/p}\leqslant C\|f\|_{H\dot{K}_q^{\alpha,p}(G)}$. 将 $\|Tf\|_{\dot{K}_q^{\alpha,p}(G)}$ 进行分解

$$\|Tf\|_{\dot{K}_q^{\alpha,p}(G)}\leqslant\left\{\sum_{l=-\infty}^{\infty}|G_l|^{\alpha p}\Big(\sum_{k=-\infty}^{l+2}|\lambda_k|\ \|\chi_l(Ta_k)\|_{L^q(G)}\Big)^p\right\}^{1/p}$$

$$+\left\{\sum_{l=-\infty}^{\infty}|G_l|^{\alpha p}\Big(\sum_{k=l+3}^{\infty}|\lambda_k|\ \|\chi_l(Ta_k)\|_{L^q(G)}\Big)^p\right\}^{1/p}$$

$$\equiv H_1+H_2.$$

利用 T 在 $L^q(G)$ 上的有界性和 Hölder 不等式, 则

$$H_1\leqslant C\left\{\sum_{l=-\infty}^{\infty}m_l^{-\alpha p}\Big(\sum_{k=-\infty}^{l+2}|\lambda_k|\ m_k{}^{\alpha}\Big)^p\right\}^{1/p}$$

$$\leqslant C\left\{\sum_{l=-\infty}^{\infty}\left[\sum_{k=-\infty}^{l+2}|\lambda_k|^p\Big(\frac{m_k}{m_l}\Big)^{\alpha p/2}\right]\left[\sum_{k=-\infty}^{l+2}\Big(\frac{m_k}{m_l}\Big)^{\alpha p'/2}\right]^{p/p'}\right\}^{1/p}$$

$$\leqslant C\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty}|\lambda_k|^p\left[\sum_{l=k-2}^{\infty}\Big(\frac{m_k}{m_l}\Big)^{\alpha p/2}\right]\right\}^{1/p}$$

$$\leqslant C\Big(\sum_{k=-\infty}^{\infty}|\lambda_k|^p\Big)^{1/p}\leqslant C\|f\|_{H\dot{K}_q^{\alpha,p}(G)}.$$

接着来估计 H_2. 由 T 满足的尺寸条件(1), 有

$$H_2\leqslant C\left\{\sum_{l=-\infty}^{\infty}|G_l|^{\alpha p}\left[\sum_{k=l+3}^{\infty}|\lambda_k|\ m_k{}^{\alpha}\Big(\frac{m_l}{m_k}\Big)^{\delta+1-1/q}\right]^p\right\}^{1/p}$$

$$\leqslant C\left\{\sum_{l=-\infty}^{\infty}\left[\sum_{k=l+3}^{\infty}|\lambda_k|\ \Big(\frac{m_k}{m_l}\Big)^{[\alpha-\delta-(1-1/q)]}\right]^p\right\}^{1/p}$$

$$\leqslant C\left\{\sum_{l=-\infty}^{\infty}\left[\sum_{k=l+3}^{\infty}|\lambda_k|^p\Big(\frac{m_k}{m_l}\Big)^{[\alpha-\delta-(1-1/q)]p/2}\right]\left[\sum_{k=l+3}^{\infty}\Big(\frac{m_k}{m_l}\Big)^{[\alpha-\delta-(1-1/q)]p'/2}\right]^{p/p'}\right\}^{1/p}$$

$$\leqslant C\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty}|\lambda_k|^p\left[\sum_{l=-\infty}^{k-3}\Big(\frac{m_k}{m_l}\Big)^{[\alpha-\delta-(1-1/q)]p/2}\right]\right\}^{1/p}$$

$$\leqslant C\Big(\sum_{k=-\infty}^{\infty}|\lambda_k|^p\Big)^{1/p}\leqslant C\|f\|_{H\dot{K}_q^{\alpha,p}(G)}.$$

这里我们用到了 Minkowski 不等式和 Hölder 不等式. 从而完成了定理 1 的证明. ∎

定义 4 设 T 为线性算子, 若对于所有具有紧支集的有界可测函数 $a(x)$, 当 $\int_G a(x)=$

0 时有$\int_G Ta(x)=0$，我们称 T 满足 $T^*1=0$.

若 T 满足消失矩条件 $T^*1=0$，下列定理将给出局部 Calderón-Zygmund 算子的有界性.

定理 2　设 $0<\delta\leqslant 1$，$1<q<\infty$，$1-1/q\leqslant\alpha<1-1/q+\delta$，$0<p\leqslant\infty$，$T$：$S(G)\to S'(G)$ 是连续的算子，且 $\forall k\neq l$，它的局部可积的核函数 $k(x,y)$ 满足

$$\sup_{y\in G_k}\Big(\int_{G_l\setminus G_{l+1}}|k(x,y)-k(x,0)|^q\mathrm{d}x\Big)^{1/q}\leqslant Cm_l^{\,1-1/q}\Big(\frac{m_l}{m_k}\Big)^{\delta}. \tag{2}$$

若 T 是 $L^q(G)$ 上的连续算子且 $T^*1=0$，那么 T 是 $H\dot{K}_q^{\alpha,p}(G)$ 上的有界算子.

证　设 $f\in H\dot{K}_q^{\alpha,p}(G)$ 且 $0<p\leqslant\infty$，由定理 B 有 $f=\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}\lambda_k a_k$，其中 a_k 是支在 G_k 上的 (α,q) 原子且$\big(\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}|\lambda_k|^p\big)^{1/p}\leqslant C\|f\|_{H\dot{K}_q^{\alpha,p}(G)}$. 记

$$\begin{aligned}\|Tf\|_{H\dot{K}_q^{\alpha,p}(G)}&=C\Big\{\sum_{j=-\infty}^{\infty}|G_j|^{\alpha p}\Big(\sum_{k=-\infty}^{j+2}|\lambda_k|\,\|\chi_j(Ta_k)^*\|_{L^q(G)}\Big)^p\Big\}^{1/p}\\&\quad+C\Big\{\sum_{j=-\infty}^{\infty}|G_j|^{\alpha p}\Big(\sum_{k=j+3}^{\infty}|\lambda_k|\,\|\chi_j(Ta_k)^*\|_{L^q(G)}\Big)^p\Big\}^{1/p}\\&=Q_1+Q_2,\end{aligned}$$

其中 Q_1 的估计由极大算子和 T 在 $L^q(G)$ 上的有界性可以顺利得到.

为估计 Q_2，当 $x\in G_j\setminus G_{j+1}$ 且 $j\leqslant k-3$ 时，我们分两种情况来考虑

情况 1　$l\leqslant j<k$. 这时 $G_l\subseteq G_j\subset G_k$，于是 $x\in G_l$. 而 $T^*1=0$，所以

$$\begin{aligned}&\frac{1}{|G_l|}\Big|\int_{x+G_l}Ta_k(y)\mathrm{d}y\Big|\\&=\Big|m_l\int_{G_l}\int_{G_k}(k(y,z)-k(y,0))a_k(z)\mathrm{d}z\mathrm{d}y\Big|\\&=\Big|m_l\int_{G\setminus G_l}\int_{G_k}(k(y,z)-k(y,0))a_k(z)\mathrm{d}z\mathrm{d}y\Big|.\end{aligned}$$

再利用 Minkowski 和 Hölder 不等式以及条件(2)，有

$$\begin{aligned}&\|\chi_j(Ta_k)^*\|_{L^q(G)}\\&\leqslant m_l\Big\{\int_{G_j\setminus G_{j+1}}\Big(\int_{G\setminus G_l}\int_{G_k}|k(y,z)-k(y,0)||a_k(z)|\mathrm{d}z\mathrm{d}y\Big)^q\mathrm{d}x\Big\}^{1/q}\\&\leqslant m_lm_j^{-1/q}\int_{G_k}\sum_{i=-\infty}^{l-1}\int_{G_i\setminus G_{i+1}}|k(y,z)-k(y,0)|\mathrm{d}y\,|a_k(z)|\mathrm{d}z\\&\leqslant m_lm_j^{-1/q}\sum_{i=-\infty}^{l-1}m_i^{-(1-1/q)}\int_{G_k}\Big(\int_{G_i\setminus G_{i+1}}|k(y,z)-k(y,0)|^q\mathrm{d}y\Big)^{1/q}|a_k(z)|\mathrm{d}z\\&\leqslant Cm_k^{\alpha}\Big(\frac{m_j}{m_k}\Big)^{1-1/q+\delta}.\end{aligned}$$

情况 2　$j<l$. 这时 $G_l\subseteq G_{j+1}\subset G_j$. 因为 $x\notin G_k$，所以$(x+G_l)\cap G_k\neq\phi$，从而 $G_k\subset x+G_l$，也就有 $G_k\subset x+G_{j+1}$. 而 $G_k\subset G_{j+1}$ 就意味着 $x\in G_{j+1}$，这就产生了矛盾. 因此我们得到$(x+G_l)\cap G_k=\phi$ 且 $x+G_l\subset G\setminus G_k$. 又 $T^*1=0$，根据核函数满足的条件(2)及 $G_k\subset G_j$，容易证明

$$\frac{1}{|G_l|}\left|\int_{x+G_l} Ta_k(y)\mathrm{d}y\right| \leqslant m_l \int_{G\backslash G_k}\int_{G_k} |k(y,z)-k(y,0)||a_k(z)|\mathrm{d}z\mathrm{d}y.$$

于是

$$\begin{aligned} &\|\chi_j(Ta_k)^*\|_{L^q(G)}\\ \leqslant& m_l\left\{\int_{G_j\backslash G_{j+1}}\left(\int_{G\backslash G_k}\int_{G_k}|k(y,z)-k(y,0)||a_k(z)|\mathrm{d}z\mathrm{d}y\right)^q\mathrm{d}x\right\}^{1/q}\\ \leqslant& Cm_k^{\alpha}\left(\frac{m_j}{m_k}\right)^{1-1/q+\delta}.\end{aligned}$$

因为 $\alpha<1-1/q+\delta$,那么类似于文[4]中定理 5 的证明,可以推出

$$\begin{aligned} Q_2 &\leqslant C\left\{\sum_{j=-\infty}^{\infty}\left(\sum_{k=j+3}^{\infty}|\lambda_k|\left(\frac{m_j}{m_k}\right)^{1-1/q+\delta-\alpha}\right)^p\right\}^{1/p}\\ &\leqslant C\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty}|\lambda_k|^p\right\}^{1/p}\\ &\leqslant C\|f\|_{H\dot{K}_q^{\alpha,p}(G)}. \end{aligned}$$

▌

刘和陆在文[9]中给出了次线性算子在 $H\dot{K}_q^{\alpha,p}(G)$上的有界性. 受他们工作的启发,我们可以将定理 1 进行改进.

定理 3 设 $1<q\leqslant\infty$,$0<p\leqslant\infty$. 若 T 是 $L^q(G)$上的有界次线性算子,且对于某个 $0<\delta\leqslant1$, 和任意具有紧支集 G_j 的 $L^1(G)$函数 f,当 $x\notin G_j$ 时

$$|Tf(x)|\leqslant C|G_j|^{\delta}\int_{G_j}\frac{|f(y)|}{|x-y|^{1+\delta}}\mathrm{d}y. \tag{3}$$

如果 $T^*1=0$, 那么 T 是 $H\dot{K}_q^{\alpha,p}(G)$上的有界算子.

证 设 $a_j(x)$是 $H\dot{K}_q^{\alpha,p}(G)$的(α,q)原子,选择适当的 ε 使得 $\alpha+1/q-1<\varepsilon<\delta$,根据 $H\dot{K}_q^{\alpha,p}(G)$的原子和分子理论,只须证明 Ta_j 将(α,q)原子映成(α, q,ε)分子[7],也就是说 Ta_j 满足下面的条件:(i) $\int_G Ta_j(x)\mathrm{d}x=0$; (ii) $\|Ta_j\|_{L^q(G)}\leqslant Cm_j^{\alpha}$; (iii)$\mathscr{R}_q(Ta_j)=\|Ta_j\|_{L^q(G)}^{a/b}\||x|^bTa_j\|_{L^q(G)}^{1-a/b}\leqslant C<\infty$,其中 $a=1-1/q-\alpha+\varepsilon$,$b=1-1/q+\varepsilon$.

由于 $T^*1=0$,即$\int_G Ta_j(x)\mathrm{d}x=0$, 自然条件(i)就得到满足. 再利用 T 在 $L^q(G)$上的有界性,(ii)也是明显的.

这样我们仅须证明(iii)是正确的.(iii)中的积分可以分解为

$$\||x|^bTa_j\|_{L^q(G)}^q=\int_G|x|^{bq}|Ta_j|^q\mathrm{d}x=\int_{G_j}+\int_{G\backslash G_j}=I_1+I_2.$$

于是

$$\begin{aligned} I_1&\leqslant\sum_{k=j}^{\infty}\int_{G_k\backslash G_{k+1}}|x|^{bq}|Ta_j|^q\mathrm{d}x\\ &\leqslant m_j^{-bq}\int_G|Ta_j(x)|^q\mathrm{d}x\\ &\leqslant Cm_j^{-bq+\alpha q}. \end{aligned}$$

而对 I_2 部分来说,注意到如果 $j\geqslant k+1$,$x\in G_k\backslash G_{k+1}$,$y\in G_j$,则 $x\notin G_j$ 且$|x-y|=(m_k)^{-1}$. 根据 a_j 的尺寸大小和 Hölder 不等式,当 $\delta>\varepsilon$ 时,可以得出

$$I_2\leqslant Cm_j^{-q\delta}\sum_{k=-\infty}^{j-1}\int_{G_k\backslash G_{k+1}}|x|^{bq}\left(\int_{G_j}\frac{|a_j(y)|}{|x-y|^{1+\delta}}\mathrm{d}y\right)^q\mathrm{d}x$$

$$\leqslant Cm_j^{-q\delta}\sum_{k=-\infty}^{j-1}\int_{G_k\backslash G_{k+1}} m_k^{-bq}m_k^{q(1+\delta)}\left(\int_{G_j}|a_j(y)|\,\mathrm{d}y\right)^q\mathrm{d}x$$

$$\leqslant C\sum_{k=-\infty}^{j-1} m_j^{\alpha q+q-1-q\delta}m_k^{-bq+1-q+q\delta}\leqslant Cm_j^{-bq+\alpha q}.$$

综合两部分的估计,有

$$\|\,|x|^bTa_j\|_{L^q(G)}\leqslant Cm_j^{-b+\alpha},$$

从而

$$\begin{aligned}\mathscr{R}_q(Ta_j)&=\|Ta_j\|_{L^q(G)}^{a/b}\|\,|x|^bTa_j\|_{L^q(G)}^{1-a/b}\\&\leqslant Cm_j^{a\alpha/b}m_j^{(-b+\alpha)(1-a/b)}\\&\leqslant C.\end{aligned}$$

因此 Ta_j 是$(\alpha,\ q,\ \varepsilon)$分子. 从而定理 3 成立. ▌

我们还可以进一步推广定理 3 到次线性分数次积分算子. 标准的分数次积分算子的有界性已在文[10]中由蓝证明.

定理 4 设 $0<l<1,1<q_1<1/l,1/q_2=1/q_1-l,0<p_1\leqslant p_2<\infty,1-1/q_1<1-1/q_2\leqslant\alpha<\infty$. 如果 T_l 是 $L^{q_1}(G)$到 $L^{q_2}(G)$的有界次线性算子,$T_l{}^*1=0$,而且对于某个 $0<\delta\leqslant1$ 和任意具有紧支集 G_j 的 $L^1(G)$函数 f,当 $x\notin G_j$ 时

$$|T_lf(x)|\leqslant C|G_j|^\delta\int_{G_j}\frac{|f(y)|}{|x-y|^{1-l+\delta}}\mathrm{d}y,\tag{4}$$

T_l 是 $H\dot{K}_{q_1}^{\alpha,p_1}(G)$到 $H\dot{K}_{q_2}^{\alpha,p_2}(G)$的有界算子.

证 此定理的证明思想与定理 3 相似. 令 $a_j(x)$是一(α,q_1)原子,选取合适的 ε 使得 $\alpha+1/q_2-1<\varepsilon<\delta-l$. 只须证明 T_la_j 是$(\alpha,\ q_2,\ \varepsilon)$分子即可[7],即(i) $\int_G T_la_j(x)\mathrm{d}x=0$,(ii) $\|T_la_j\|_{L^q(G)}\leqslant Cm_j^\alpha$,(iii) $\mathscr{R}_{q_2}(T_la_j)=\|T_la_j\|_{L^{q_2}(G)}^{a/b}\|\,|x|^bT_la_j\|_{L^{q_2}(G)}^{1-a/b}\leqslant C<\infty$,其中 $a=1-1/q_2-\alpha+\varepsilon,b=1-1/q_2+\varepsilon$.

因为 $T_l^*1=0$,即$\int_G T_la_j(x)\mathrm{d}x=0$,故条件(i)是满足的. 而(ii)可由 T_l 从 $L^{q_1}(G)$到 $L^{q_2}(G)$的有界性.

接着我们来证明(iii). 分解 $\|\,|x|^bT_la_j\|_{L^{q_2}(G)}^{q_2}$ 如下

$$\|\,|x|^bT_la_j\|_{L^{q_2}(G)}^{q_2}=\int_G|x|^{bq_2}|T_la_j|^{q_2}\mathrm{d}x=\int_{G_j}+\int_{G\backslash G_j}=I_1+I_2.$$

又

$$\begin{aligned}I_1&\leqslant\sum_{k=j}^{\infty}\int_{G_k\backslash G_{k+1}}|x|^{bq_2}|T_la_j|^{q_2}\mathrm{d}x\\&\leqslant m_j^{-bq_2}\int_G|T_la_j(x)|^{q_2}\mathrm{d}x\\&\leqslant m_j^{-bq_2}\|a_j\|_{q_1}^{q_2}\leqslant Cm_j^{-bq_2+\alpha q_2}.\end{aligned}$$

下面对 I_2 进行估计. 如果 $j\geqslant k+1,x\in G_k\backslash G_{k+1},y\in G_j$,那么 $x\notin G_j$ 并且$|x-y|=(m_k)^{-1}$. 利用 a_j 的尺寸大小和 Hölder 不等式,可以得到

$$I_2\leqslant Cm_j^{-q_2\delta}\sum_{k=-\infty}^{j-1}\int_{G_k\backslash G_{k+1}}|x|^{bq_2}\left(\int_{G_j}\frac{|a_j(y)|}{|x-y|^{1-l+\delta}}\mathrm{d}y\right)^{q_2}\mathrm{d}x$$

$$\leqslant Cm_j^{-q_2\delta}\sum_{k=-\infty}^{j-1}\int_{G_k\backslash G_{k+1}}m_k^{-bq_2}m_k^{q_2(1-l+\delta)}\left(\int_{G_j}|a_j(y)|\,\mathrm{d}y\right)^{q_2}\mathrm{d}x$$

$$\leqslant Cm_j^{-q_2\delta}\sum_{k=-\infty}^{j-1} m_k^{-bq_2} m_k^{q_2(1-l+\delta)} m_j^{\alpha q_2} m_j^{q_2(\frac{1}{q_1}-1)} m_k^{-1} \leqslant Cm_j^{-bq_2+\alpha q_2},$$

其中 $l=\frac{1}{q_1}-\frac{1}{q_2}$ 且 $\delta-l>\varepsilon$.

因此

$$\| \, |x|^b T_l a_j \|_{L^{q_2}(G)} \leqslant Cm_j^{-b+\alpha},$$

进一步有

$$\mathscr{R}_q(T_l a_j) = \| T_l a_j \|_{L^{q_2}(G)}^{a/b} \| \, |x|^b T_l a_j \|_{L^{q_2}(G)}^{1-a/b}$$
$$\leqslant Cm_j^{\alpha a/b} m_j^{(-b+\alpha)(1-a/b)} \leqslant C.$$

所以我们证明了 $T_l a_j$ 是$(\alpha, q_2, \varepsilon)$分子,从而完成了整个定理 4 的证明. ▌

参 考 文 献

[1] Hu G, Lu S, Yang D. The applications of weak Herz space. Adv in Math(China), 1997, **26**: 417—428

[2] Hu G, Lu S, Yang D. The weak Herz space. J of Beijing Normal Univ(Natur Sci), 1997, **33**:27—34

[3] Kitada T, Yang D. Potential operators in weighted Herz-type spaces on Vilenkin groups and its application. Math Nachr, 1998, **191**: 229—246

[4] Yang D C. Applications of the weighted weak Herz-type spaces over Vilenkin groups. Indian J of Math, 1999, **41**: 455—479

[5] Taibleson M H. Fourier Analysis on Local Fields. Princeton: Princeton University Press, 1975

[6] Fan D S, Yang D C. Herz-type Hardy spaces on Vilenkin groups and their application. Science in China, 2000, **43**A: 484—494

[7] Lu S Z, Yang D C. The decomposition of Herz space on local fields and its applications. J of Math Anal and Appl, 1995, **196**: 296—313

[8] Lu S Z, Yang D C. Some new Hardy spaces on locally compact Vilenkin group. Colloq Math, 1993, **65**: 117—138

[9] Liu L Z, Lu S Z. The boundedness of sublinear operator in Herz-type Hardy space. Acta Math Sinica, 2002, **45**: 832—840

[10] Lan S H. Boundedness of fractional integral operators in Herz-type spaces on locally compact Vilenkin groups. Approx Theory and its Appl, 2002, **18**: 15—28

Boundedness of Certain Operators on Herz-type Hardy Spaces on Locally Compact Vilenkin Groups

[1,2]Tang Canqin [1]Li Qingguo [1]Ma Bolin

([1]*Department of Mathematics, Hunan University, Changsha* 410081)

([2]*Department of Mathematics, Hunan University of Arts and Science, Changde* 415000)

Abstract: Let G be a locally compact Vilenkin group. In this paper the authors study the boundedness of some kinds of sublinear operators and Calderón-Zygmund operator on Herz-type Hardy space on G.

Key words: Herz space; Herz-type Hardy space; Vilenkin Group; Sublinear operator.

MR(2000) Subject Classification: 43A70;43A75