2005,**25A**(5):685－693

Acta Mathematica Scientia
数学物理学报

间断系数的二阶椭圆型方程解的正则性*

兴梅

(复旦大学数学研究所　上海 200433)

摘要:该文研究的问题源自于生物学与物理学中具有间断介电系数的静电场. 作者以拟微分算子为主要工具讨论具间断系数的半线性二阶椭圆型方程解的存在性和正则性.

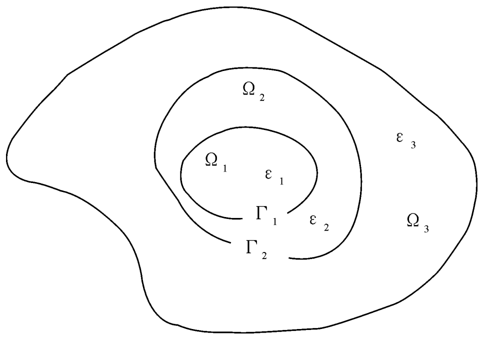
关键词:正则性；拟微分算子；间断系数.

MR(2000)主题分类:35R05;35J60;35S05　　**中图分类号**:O175.23;O175.25　　**文献标识码**:A

文章编号:1003-3998(2005)05-685-09

1　引言

1923 年,Debye 和 Hückel 已给出带电溶液中球型带电微粒的自由电能[1]. 并由高斯定理和 Boltzmann 散度法则得出电势所满足的的微分方程. Debye-Hückel 模型如下图所示.



在原始模型中,区域 Ω_1 中介电系数为 ε_1,而区域 Ω_3 中包含介电系数为 ε_3 的溶液,设其中含有自由电荷. Ω_2 为区域 Ω_1 周围一隔离层,在 Ω_2 中无自由电荷,但 $\varepsilon_2=\varepsilon_3\neq\varepsilon_1$. 且三个区域内电荷体密度函数分别为

$$\begin{cases}\rho_1=\rho_1(x)\ \text{in}\ \Omega_1,\\ \rho_2=0\ \text{in}\ \Omega_2,\\ \rho_3=-2C\sin h(ku)\ \text{in}\ \Omega_3\end{cases}\tag{1.1}$$

然而,该理论可拓广至更复杂的带电微粒中,如蛋白质中.

上述问题的弱解形式为:$u\in H_0^1(\Omega)$,$\forall\,\varphi\in H_0^1(\Omega)$,有

$$\int_\Omega(\varepsilon(x)\nabla u\nabla\varphi-2\pi\rho\varphi)\mathrm{d}x=0.\tag{1.2}$$

收稿日期:2003-11-01；修订日期:2004-12-08

* E-mail:xm1224@yahoo.com

其中 ρ 如(1.1)式定义的电荷体密度函数. 在分部意义下,(1.2)式等价于下面的边值问题:记 $\Omega=\bar{\Omega}_1\cup\bar{\Omega}_2\cup\Omega_3$, $u\in H_0^1(\Omega)$ 满足

$$\begin{cases} -\varepsilon_1\Delta u = 2\pi\rho_1, & \text{in } \Omega_1, \\ -\varepsilon_2\Delta u = 2\pi\rho_2, & \text{in } \Omega_2, \\ -\varepsilon_3\Delta u = 2\pi\rho_3, & \text{in } \Omega_3, \end{cases} \tag{1.3}$$

$$\varepsilon_1\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_1 = \varepsilon_2\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_2, \quad \text{in } \Gamma_1, \tag{1.4}$$

$$\varepsilon_2\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_2 = \varepsilon_3\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_3, \quad \text{in } \Gamma_2, \tag{1.5}$$

这里 $\frac{\partial u}{\partial n}|_i (i=1,2,3)$ 理解为各自的迹.

讨论一般情况,Ω 为若干子区域 $\Omega_i(i=1,2,\cdots,l)$ 的并,其边界 $\partial\Omega_i$ 均光滑. 依赖于电势 u 的电荷密度函数为 $f(x,u)\in C^\infty(\bar{\Omega}_i\times\boldsymbol{R}^1)$. 从而, 介电系数间断的静电势方程的弱解形式等价于:求 $u\in H_0^1(\Omega)$ 使得

$$\int_\Omega(\varepsilon(x)\nabla u\nabla\varphi - f(x,u)\varphi)\mathrm{d}x = 0, \forall\varphi\in H_0^1(\Omega). \tag{1.6}$$

其中 $\varepsilon(x)>0$ 在每个子区域 Ω_i 中均为常数. 对于这种一般情况,有如下定理

定理 A 设 $u\in H_0^1(\Omega)$ 为(1.6)式一弱解, $f(x,u(x))\in L^q(\Omega)$, $q>\frac{n}{2}$, 且 $f(x,u)\in C^\infty(\bar{\Omega}_i\times\boldsymbol{R}^1)$. 则 $u\in C^{0,1}(\bar{\Omega})$ 且 $u\in C^\infty(\bar{\Omega}_i)(i=1,\cdots,l)$.

假设

(H_1) $\rho_1=\rho_1(x)\in C^\infty(\bar{\Omega}_1)$;

(H_2) $\rho_2=\rho_2(x)\in C^\infty(\bar{\Omega}_2)$;

(H_3) 在 Ω_3 中, $\rho_3=-\rho(x)u|u|^{\gamma-1}$, $0\leqslant\rho(x)\in C^\infty(\bar{\Omega}_3)$, $1\leqslant\gamma<\frac{4}{n-2}$ $(2\leqslant n<6)$ 或 $\rho_3=-C\rho(x)\sinh(ku)$, $k>0$, $C>0$, $n=2$, 其中 $0\leqslant\rho(x)\in C^\infty(\bar{\Omega}_3)$.

在上述假设下有

定理 B 设 $\Omega_i(i=1,2,3)$ 为光滑有界区域. 若$(\mathrm{H}_1)-(\mathrm{H}_3)$满足, 则(1.6)式存在一 $H_0^1(\Omega)$ 弱解, 且 $u\in C^{0,1}(\bar{\Omega})$, $u\in C^\infty(\bar{\Omega}_i)$, $i=1,2,3$.

事实上,当 $\rho_i=\rho_i(x)(i=1,2,3)$ 时,线性问题(1.4)、(1.5)解的存在性已解决,证明见文[2]. 又由椭圆型方程解的正则性理论知,当 $\rho_i\in C^\infty(\Omega_i)(i=1,2,3)$ 时, $u\in C^\infty(\Omega_i)(i=1,2,3)$. 本文将在第三章中讨论该线性问题解 u 在边界上的正则性. 实际上,解 $u\in C^\infty(\bar{\Omega}_i)$, $i=1,2,3$. 从而广义解即为分片经典解. 在第四章中,将应用 De-Giorgi-Moser 定理来讨论一般的间断系数的半线性二阶椭圆型方程解的正则性. 在第五章中,作为应用,将解决两个半线性问题解的存在性和正则性.

2 先验估计

本章在区域 $\Omega=\boldsymbol{R}^n\times[0,1]$上进行讨论. 为方便,引入索伯列夫空间 $H_{(k,s)}(\Omega)$,并定义模为

$$\|u\|_{(k,s)}^2 = \sum_{j=0}^{k}\|D_y^j\Lambda^{k-j+s}u(y)\|_{L^2(\boldsymbol{R}^n)}^2.$$

这里,Λ 为一拟微分算子$(I-\Delta)^{\frac{1}{2}}$,其象征为 $\sigma(\Lambda)=\sqrt{1+|\xi|^2}$,$k$ 为非负整数,且 $s\in\boldsymbol{R}$. 易见 $H_{(k,0)}(\Omega)$ 与通常意义下的索伯列夫空间 $H^k(\Omega)$ 一致. 另外,我们以 $|u|_s^2$ 记 $\|u(y)\|^2_{H^s(\boldsymbol{R}^n)}$, $\forall y\in[0,1]$.

现在,看下面的边值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial y}+K(y,x,D_x)u=Hu=f,\ (x,y)\in\boldsymbol{R}^n\times(0,1),\\ u\,|_{y=0}=g_0(\text{or } u\,|_{y=1}=g_1),\ x\in\boldsymbol{R}^n.\end{cases}\tag{2.1}$$

其中 $K(y,x,\xi)\in C^\infty([0,1],S^1(\boldsymbol{R}^n))$.

下面的引理引自文献[3]. 为方便读者,这里给出证明.

引理 2.1　假设 $\mathrm{Re}\sigma(K)\geqslant C_0|\xi|-C_1$, $\forall\xi\in\boldsymbol{R}$, C_0,C_1 为二正常数. 则对任意 $u\in H_{(1,s)}$ $(s\geqslant0)$成立

$$|u(1)|^2_{s+\frac{1}{2}}+\|u\|^2_{(1,s)}\leqslant C_s[\|Hu\|^2_{(0,s)}+\|u\|^2_{(0,0)}+|u(0)|^2_{s+\frac{1}{2}}],\quad\forall s\geqslant0.$$

证

$$\begin{aligned}2\mathrm{Re}(\Lambda^{2s+1}u,Hu)_{L^2(\boldsymbol{R}^n)}&=2\mathrm{Re}(\Lambda^{2s+1}u,\partial_yu)+2\mathrm{Re}(\Lambda^{2s+1}u,Ku)\\&=(\Lambda^{2s+1}u,\partial_yu)+(\partial_yu,\Lambda^{2s+1}u)+(\Lambda^{2s+1}u,Ku)+(Ku,\Lambda^{2s+1}u)\\&=\partial_y(\Lambda^{s+\frac{1}{2}}u,\Lambda^{s+\frac{1}{2}}u)+(K^*\Lambda^{2s+1}u,u)+(\Lambda^{2s+1}Ku,u)\\&=\partial_y|\Lambda^{s+\frac{1}{2}}u|_0^2+((K^*+K)\Lambda^{2s+1}u,u)+(r_{2s+1}u,u).\end{aligned}$$

此处以及后面的 r_i 均满足 $r_i\in C^\infty([0,1],OPS^i)$. 由假设 $\sigma(K^*+K)=2\mathrm{Re}\sigma(K)\geqslant2C_0|\xi|-2C_1$,应用 Gårding 不等式,可得

$$2\mathrm{Re}(\Lambda^{2s+1}u,Hu)\geqslant\partial_y|\Lambda^{s+\frac{1}{2}}u|_0^2+C|u(y)|^2_{s+1}-C'|u(y)|_0^2.$$

这里以及后面的 C,C' 均表示不依于 u 和 y 而变化的常数.

$$|u(y)|^2_{s+1}\leqslant2C\mathrm{Re}(\Lambda^{2s+1}u,Hu)-C\partial_y|\Lambda^{s+\frac{1}{2}}u(y)|_0^2+C|u(y)|_0^2.\tag{2.2}$$

将(2.2)式在[0,1]上关于 y 积分

$$\|u\|^2_{(0,s+1)}+|u(1)|^2_{s+\frac{1}{2}}\leqslant C[\|Hu\|^2_{(0,s)}+\|u\|^2_{(0,0)}]+|u(0)|^2_{s+\frac{1}{2}}.\tag{2.3}$$

由

$$\|u\|^2_{(1,s)}=\|D_yu\|^2_{(0,s)}+\|u\|^2\backslash-(0,s+1),\tag{2.4}$$

可得

$$|u(1)|^2_{s+\frac{1}{2}}+\|u\|^2_{(1,s)}\leqslant\|D_yu\|^2_{(0,s)}+C\|Hu\|^2_{(0,s)}+C\|u\|^2_{(0,0)}+|u(0)|^2_{s+\frac{1}{2}}.\tag{2.5}$$

由(1.1)式可知

$$\|D_yu\|^2_{(0,s)}=\|Hu-Ku\|^2_{(0,s)}\leqslant C[\|Hu\|^2_{(0,s)}+\|u\|^2_{(0,s+1)}].$$

再由(1.3)式可得

$$\|D_yu\|^2_{(0,s)}\leqslant C'[\|Hu\|^2_{(0,s)}+\|u\|^2_{(0,0)}+|u(0)|^2_{s+\frac{1}{2}}].$$

从而

$$|u(1)|^2_{s+\frac{1}{2}}+\|u\|^2_{(1,s)}\leqslant C_s[\|Hu\|^2_{(0,s)}+\|u\|^2_{(0,0)}+|u(0)|^2_{s+\frac{1}{2}}].$$ ▌

定理 2.1　如果引理 2.1 的假设成立,则 $\forall t\in\boldsymbol{Z}^+$, $s\geqslant0$

$$|u(1)|^2_{t+s-\frac{1}{2}}+\|u\|^2_{(t,s)}\leqslant C_{ts}[\|Hu\|^2_{(t-1,s)}+\|u\|^2_{(0,0)}+|u(0)|^2_{t+s-\frac{1}{2}}],$$

对一切 $u\in H_{(t,s)}(\Omega)$都成立.

证 对 t 用归纳法,当 $t=1$ 时,命题即为引理 2.1. 现假设下面的不等式对于某个 $m\geqslant 1$ 成立

$$|u(1)|^2_{m+s-\frac{1}{2}}+\|u\|^2_{(m,s)}\leqslant C[\|Hu\|^2_{(m-1,s)}+\|u\|^2_{(0,0)}+|u(0)|^2_{m+s-\frac{1}{2}}], \tag{2.6}$$

以 Λu 替代 u,得

$$|\Lambda u(1)|^2_{t+s-\frac{1}{2}}+\|\Lambda u\|^2_{(m,s)}\leqslant C[\|H\Lambda u\|^2_{(m-1,s)}+\|\Lambda u\|^2_{(0,0)}+|\Lambda u(0)|^2_{m+s-\frac{1}{2}}],$$

而

$$\|H\Lambda u\|^2_{(m-1,s)}\leqslant C[\|Hu\|^2_{(m,s)}+\|u\|^2_{(m,s)}],$$

所以

$$|u(1)|^2_{m+s+\frac{1}{2}}+\|\Lambda u\|^2_{(m,s)}\leqslant C[\|Hu\|^2_{(m,s)}+\|u\|^2_{(m,s)}+\|u\|^2_{(0,1)}+|u(0)|^2_{m+s+\frac{1}{2}}]. \tag{2.7}$$

注意到

$$\|u\|^2_{(m+1,s)}=\sum_{j=0}^{m+1}\|D_y{}^j\Lambda^{m+s+1-j}u\|^2_{L^2}=\|\Lambda u\|^2_{(m,s)}+\|D_y{}^{m+1}\Lambda^s u\|^2_{L^2} \tag{2.8}$$

及

$$\begin{aligned}\|D_y{}^{m+1}\Lambda^s u\|^2_{L^2}&=\|D_y\cdot D_y{}^m\Lambda^s u\|^2_{L^2}\\&\leqslant\|D_y u\|^2_{(m,s)}\\&\leqslant\|Ku\|^2_{(m,s)}+\|Hu\|^2_{(m,s)}\\&\leqslant\|Hu\|^2_{(m,s)}+C\|u\|^2_{(m,s+1)},\end{aligned} \tag{2.9}$$

由(2.6)、(2.7)、(2.8)、(2.9)式,可得

$$|u(1)|^2_{m+s+\frac{1}{2}}+\|u\|^2_{(m+1,s)}\leqslant C[\|Hu\|^2_{(m,s)}+\|u\|^2_{(0,0)}+|u(0)|^2_{m+s+\frac{1}{2}}].$$

从而定理得证. ▌

推论 2.1 如果 $K\in C^\infty([0,1],OPS^1)$, $\mathrm{Re}\sigma(-K)\geqslant C_0|\xi|-C_1$, $\forall\xi\in\boldsymbol{R}$, C_0,C_1 为二正数, 则 $\forall t\in\boldsymbol{Z}^+$, $s\geqslant 0$

$$|u(0)|^2_{t+s-\frac{1}{2}}+\|u\|^2_{(t,s)}\leqslant C_{ts}[\|Hu\|^2_{(t-1,s)}+\|u\|^2_{(0,0)}+|u(1)|^2_{t+s-\frac{1}{2}}]. \tag{2.10}$$

对一切 $u\in H_{(t,s)}$ 都成立.

由上面的讨论,可知当 $\mathrm{Re}\sigma(K)\geqslant C_0|\xi|-C_1$ $(C_0,C_1>0)$ 时,u 的正则性依赖于 Hu 和 $u(0)$;当 $\mathrm{Re}\sigma(-K)\geqslant C_0|\xi|-C_1$ $(C_0,C_1>0)$ 时,u 的正则性依赖于 Hu 和 $u(1)$.

3 间断系数的线性泊松方程解的正则性

本章考察线性情形. 为方便,假设 $\Omega=\bar{\Omega}_1\cup\Omega_2$, $\rho_i=\rho_i(x)\in C^\infty(\bar{\Omega}_i)$, $i=1,2$. 线性问题解的存在性见文献[2]. 这里讨论该线性问题解在边界 $\Gamma_1=\partial\Omega_1$ 上的正则性. 本章中,我们总假设 $u\in H_0^1(\Omega)$ 在散度及迹的意义下满足以下的方程和边界条件.

$$\begin{cases}\varepsilon_1\Delta u=-2\pi\rho_1, & \text{in }\Omega_1,\\ \varepsilon_2\Delta u=-2\pi\rho_2, & \text{in }\Omega_2,\end{cases} \tag{3.1}$$

其中,Γ_1 光滑, $\rho_1\in C^\infty(\bar{\Omega}_1)$, $\rho_2\in C^\infty(\bar{\Omega}_2)$. 且有

$$\begin{cases}u=0, & \text{in }\partial\Omega,\\ \varepsilon_1\dfrac{\partial u}{\partial n}=\varepsilon_2\dfrac{\partial u}{\partial n}, & \text{in }\Gamma_1,\end{cases} \tag{3.2}$$

由$\partial\Omega_1=\Gamma_1$光滑,对任意$x_0\in\Gamma_1$,当其邻域充分小时,存在一光滑的微分同胚$\Psi$: $\mathcal{N}(x_0)\mapsto B_1(0)$. 使得

$$\Gamma_1\cap\mathcal{N}(x_0)\mapsto\{|y|<1,y_n=0\}=B_1^0,$$
$$\Omega_1\cap\mathcal{N}(x_0)\mapsto\{|y|<1,y_n>0\}=B_1^+,$$
$$\Omega_2\cap\mathcal{N}(x_0)\mapsto\{|y|<1,y_n<0\}=B_1^-.$$

于是$u(x)=u(\Psi^{-1}(y))=\tilde{u}(y)$. 又由链式法则可得

$$\begin{aligned}\Delta u&=\sum_{i=1}^n\partial_{ii}u=\sum_{l,k,i=1}^n\left(\frac{\partial^2y_l}{\partial x_i^2}\cdot\tilde{u}_l+\frac{\partial y_l}{\partial x_i}\frac{\partial y_k}{\partial x_i}\tilde{u}_{lk}\right)\\&=\sum_{i=1}^n\left(\frac{\partial y_n}{\partial x_i}\right)^2\tilde{u}_{nn}+2\sum_{l=1}^{n-1}\sum_{i=1}^n\frac{\partial y_l}{\partial x_i}\frac{\partial y_n}{\partial x_i}\tilde{u}_{ln}+\sum_{l,k\leqslant n-1}\frac{\partial y_l}{\partial x_i}\frac{\partial y_k}{\partial x_i}\tilde{u}_{lk}+\sum_{l=1}^n b_l\tilde{u}_l\\&=a^{nn}\tilde{u}_{nn}+2\sum_{l=1}^{n-1}a^{ln}\tilde{u}_{ln}+\sum_{l,k\leqslant n-1}a^{lk}\tilde{u}_{lk}+\sum_{l=1}^n b_l\tilde{u}_l=L\tilde{u},\end{aligned}\tag{3.3}$$

而且
$$(a^{lm})_{n\times n}=\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^t\cdot\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right).$$

由Ψ光滑,易证L为一椭圆算子.

引理 3.1 在$y_n=0$附近存在光滑的微分同胚$Z=\Phi(Y)$

$$\Phi:(y_1,y_2,\cdots,y_n)\mapsto(z_1,z_2,\cdots,z_n)=(\Phi_1(y),\cdots,\Phi_{n-1}(y),y_n)$$

使得在新坐标系下,变换后的混合偏导数$\partial^2_{z_nz_l}$,$l=1,\cdots,n-1$的系数为0.

证 现考察下面的柯西问题

$$\begin{cases}a^{nn}\dfrac{\partial\varphi_l}{\partial y_n}+2\displaystyle\sum_{i=1}^{n-1}a^{in}\frac{\partial\varphi_l}{\partial y_i}=0,\\ \varphi_l|_{y_n=0}=y_l,\ 1\leqslant l\leqslant n-1,\end{cases}\tag{3.4}$$

我们知道该问题存在$n-1$个独立的光滑解φ_l,$1\leqslant l\leqslant n-1$. 从而,命题得证. ▌

现仍记$\tilde{u}(\Phi^{-1}(z))$为$\tilde{u}(z)$,则(3.3)式变为

$$L\tilde{u}=\tilde{a}^{nn}\tilde{u}_{nn}+\sum_{1\leqslant l,l'\leqslant n-1}\tilde{a}^{ll'}\tilde{u}_{ll'}+\sum_{l=1}^n\tilde{b}^l\tilde{u}_l.$$

令$(z_1,\cdots,z_{n-1})=x$,$z_n=y$,则原问题变为

$$\begin{cases}L_1\tilde{u}=\partial_{yy}\tilde{u}+\displaystyle\sum_{i,j=1}^{n-1}a^{ij}(y,x)\partial_{ij}\tilde{u}+\sum_{i=1}^n b^i\partial_i\tilde{u}=\tilde{\rho}_1(y>0),\\ L_2\tilde{u}=\partial_{yy}\tilde{u}+\displaystyle\sum_{i,j=1}^{n-1}a^{ij}(y,x)\partial_{ij}\tilde{u}+\sum_{i=1}^n b^i\partial_i\tilde{u}=\tilde{\rho}_2(y<0).\end{cases}\tag{3.1$'$}$$

u乘以一个截断函数$\eta\in C_c^\infty(\boldsymbol{R}^{n-1},[-1,1])$,$\mathrm{supp}\eta\subset B_1$,在一个小区域$V\subset B_1$上,$\eta=1$. 仍记$\eta\tilde{u}$为$\tilde{u}$则

$$\tilde{u}(x,y)\in H^1(R^{n-1}\times[-1,1]),\tag{3.5}$$

不失一般性,我们仍可假设

$$\varepsilon_1\frac{\partial\tilde{u}}{\partial y}(x,+0)-\varepsilon_2\frac{\partial\tilde{u}}{\partial y}(x,-0)=0.\tag{3.6}$$

此时,原问题仍写为(3.1)$'$的形式,且$\tilde{\rho}\in L^2(\boldsymbol{R}^{n-1}\times[-1,1])$. 于是,可得下定理

定理 3.1 设$u\in H_0^1(\Omega)$为问题(3.1)(3.2)的解,$\rho_1(x)\in H^s(\Omega_1)$,$\rho_2(x)\in H^s(\Omega_2)$,$s\geqslant 0$. 则$u\in H^{s+2}(\Omega_i)(i=1,2)$且$u\in H^{s+\frac{3}{2}}(\Gamma_1)$.

证 记$A(y,x,D_x)=-\sum_{i,j=1}^{n-1}a^{ij}(y,x)\partial_{ij}$. 则

$$\sigma(A)=\sum_{i,j=1}^{n-1}a^{ij}(y,x)\xi_i\xi_j\in C^\infty([-1,1],S^2(\boldsymbol{R}^{n-1})),$$

从而(3.1)′中的第一个方程化为

$$L\tilde{u}=\partial_{yy}\tilde{u}-A(y,x,D_x)\tilde{u}+\sum_{i=1}^{n}b^i\partial_i\tilde{u}=\tilde{\rho}_1.$$

现将 L 分解为如下形式

$$(\partial_y-A^+(y,x,D_x))(\partial_y-A^-(y,x,D_x))\tilde{u}=\tilde{\rho}_1-r_0(y,x,D_x)\partial_y\tilde{u}-r_1(y,x,D_x)\tilde{u}.$$

其中

$$\sigma(A^\pm)(y,x,\xi)=\pm\sqrt{\sum_{i,j=1}^{n-1}a^{ij}\xi_i\xi_j},\quad 当\ |\xi|\geqslant 1$$

且 $r_0(y,x,D_x)\partial_y\tilde{u}\in H_{(0,0)}(\boldsymbol{R}^{n-1}\times(0,1])$, $r_1(y,x,D_x)\tilde{u}\in H_{(1,-1)}(\boldsymbol{R}^{n-1}\times(0,1])\subset H_{(0,0)}(\boldsymbol{R}^{n-1}\times(0,1])$.

于是, $(\partial_y-A^+(y,x,D_x))(\partial_y-A^-(y,x,D_x))\tilde{u}\in H_{(0,0)}(\boldsymbol{R}^{n-1}\times(0,1])$. 令 $w=(\partial_y-A^-(y,x,D_x))\tilde{u}$, 则 $(\partial_y-A^+(y,x,D_x))w=\tilde{\rho}_1-r_0(y,x,D_x)\partial_y\tilde{u}-r_1(y,x,D_x)\tilde{u}=f$. 由第二章中讨论及标准的磨光技术,可知

$$\|w\|^2_{(1,0)}+|w(0)|^2_{\frac{1}{2}}\leqslant C\|f\|^2_{(0,0)}+C\|w\|^2_{(0,0)}+C|w(1)|^2_{\frac{1}{2}}.$$

又 $w(1)=0$, 从而 $w\in H_{(1,0)}(\boldsymbol{R}^{n-1}\times(0,1))$ 且 $w(0)\in H^{\frac{1}{2}}(\boldsymbol{R}^{n-1})$. 即

$$(\partial_y-A^-(y,x,D_x))\tilde{u}\,|_{y=0}\in H^{\frac{1}{2}}(\boldsymbol{R}^{n-1}).\tag{3.7}$$

当 $y<0$ 时,令 $y_1=-y>0$. 按照如 $y>0$ 时的做法,可得

$$(\partial_{y_1}-A^-(y_1,x,D_x))\tilde{u}\,|_{y_1=0}\in H^{\frac{1}{2}}(\boldsymbol{R}^{n-1}),$$

即

$$(-\partial_y-A^-(y,x,D_x))\tilde{u}\,|_{y=0}\in H^{\frac{1}{2}}(\boldsymbol{R}^{n-1}),\tag{3.8}$$

$\varepsilon_1\times(3.7)+\varepsilon_2\times(3.8)$,若令 $y=0$,可得

$$(-\varepsilon_1A^--\varepsilon_2A^-)\tilde{u}(x,0)\in H^{\frac{1}{2}}(\boldsymbol{R}^{n-1}).$$

当 $\varepsilon_1+\varepsilon_2\neq 0$ 时,由 $A^-(0,x,D_x)$ 是一阶拟微分算子,可得 $\tilde{u}(x,0)\in H^{\frac{3}{2}}(\boldsymbol{R}^{n-1})$. 又由磨光技巧及定理 1.1 可得 $\tilde{u}\in H^2((0,1)\times\boldsymbol{R}^{n-1})$, $\tilde{u}\in H^2((-1,0)\times\boldsymbol{R}^{n-1})$.

重复上面做法,可得 $\tilde{\rho}(x)\in H^s(\bar{\Omega}_i)$, $i=1,2$, $s\geqslant 0$ 时

$$\tilde{u}(x,0)\in H^{s+\frac{3}{2}}(\boldsymbol{R}^{n-1}),\ \tilde{u}\in H^{s+2}((0,1)\times\boldsymbol{R}^{n-1}),$$
$$\tilde{u}\in H^{s+2}((-1,0)\times\boldsymbol{R}^{n-1}),\quad\forall s\geqslant 0.$$

再拉回到 Ω_i 即得 $u\in H^{s+2}(\Omega_i)(i=1,2)$, $u\in H^{s+\frac{3}{2}}(\Gamma_1)$ $\forall s\geqslant 0$. 定理得证. ▌

4 半线性问题解的正则性

在文章最初提到的蛋白质问题中, ρ_3 依赖于 u,是一半线性问题. 本章中我们就讨论一般的间断系数半线性二阶椭圆型方程解的正则性.

假设区域 $\bar{\Omega}=\bigcup_{i=1}^{l}\bar{\Omega}_i\subset\boldsymbol{R}^n$, $\Omega_i\cap\Omega_j=\varnothing(i\neq j)$,边界 $\partial\Omega_i=\Gamma_i(i=1,\cdots,l)$ 光滑, Ω 中电荷密度函数为 $f(x,u)\in C\backslash+\infty(\bar{\Omega}_i\times\boldsymbol{R}^1)$. 设 $u\in H^1_0(\Omega)$ 为方程(1.6)的解

$$\int_\Omega(\varepsilon(x)\nabla u\nabla\varphi-f(x,u)\varphi)\mathrm{d}x=0,\ \forall\varphi\in H^1_0(\Omega).$$

定理 A 假设 $u\in H_0^1(\Omega)$为(1.6)式的一个弱解，且 $f(x,u(x))\in L^q(\Omega)$，$q>\frac{n}{2}$，$f(x,u)\in C^\infty(\bar{\Omega}_i\times\boldsymbol{R}^1)$．则 $u\in C^{0,1}(\bar{\Omega})$且 $u\in C^\infty(\bar{\Omega}_i)$ $(i=1,\cdots,l)$．

证 由 $f(x,u(x))\in L^q(\Omega)$，$q>\frac{n}{2}$以及 De-Giorgi-Moser 定理，可得 $u\in C^\alpha(\bar{\Omega})$对某个 $\alpha\in(0,1)$．又因为，$f(x,u)\in C^\infty(\bar{\Omega}_i\times\boldsymbol{R}^1)$，所以

$$\begin{aligned}\| D_x f(x,u(x))\|_{L^2(\Omega_i)} &= \| f_x(x,u(x))+f_u(x,u(x))\partial_x u\|_{L^2(\Omega_i)}\\ &\leqslant C\| f_x(x,u(x))\|_{L^2(\Omega_i)}+C\| f_u(x,u(x))\partial_x u\|_{L^2(\Omega_i)}\\ &\leqslant C\| f_x(x,u(x))\|_{L^2(\Omega_i)}+C| f_u(x,u(x))|_\infty\|\partial_x u\|_{L^2(\Omega_i)}\end{aligned}$$

从而 $D_x f(x,u(x))\in L^2(\Omega_i)$，$f(x,u(x))\in H^1(\Omega_i)$．由定理 3.1，可得 $u\in H^3(\Omega_i)$ 且 $u\in H^{\frac{5}{2}}(\partial\Omega_i)$．注意到

$$\| D_x{}^2 f(x,u(x))\|_{L^2(\Omega_i)} = \| f_{xx}+f_{xu}D_x u+f_{ux}D\backslash -xu+f_{uu}(D_x u)^2+f_u D_x{}^2 u\|_{L^2(\Omega_i)},$$

因为，$f(x,u)\in C^\infty(\bar{\Omega}_i\times\boldsymbol{R}^1)$，$u\in L^\infty(\bar{\Omega})$，于是由 Nirenberg 不等式，可得 $f(x,u(x))\in H^2(\Omega_i)$．又由定理 3.1，可得 $u\in H^4(\Omega_i)$ 且 $u\in H^{\frac{7}{2}}(\partial\Omega_i)$．由此依次下去可得，$u\in H^s(\Omega_i)$且 $u\in H^{s-\frac{1}{2}}(\partial\Omega_i)$，$\forall s\geqslant 3$．即 $u\in C^\infty(\bar{\Omega}_i)$ $(i=1,\cdots,l)$．所以，$u\in C^{0,1}(\bar{\Omega})$． ▍

5 应用

本章将应用第四章得到的结论解决两个半线性问题解的正则性．假设 $\bar{\Omega}=\bigcup_{i=1}^{3}\bar{\Omega}_i$．$u\in H_0^1(\Omega)$满足

$$\begin{cases}-\varepsilon_1\Delta u = 2\pi\rho_1(x),\text{在 }\Omega_1\text{ 内},\\ -\varepsilon_2\Delta u = 2\pi\rho_2(x),\text{在 }\Omega_2\text{ 内},\\ -\varepsilon_3\Delta u = 2\pi\rho_3(x,u(x)),\text{在 }\Omega_3\text{ 内},\end{cases}\tag{5.1}$$

其中 Γ_1,Γ_2 光滑，$\rho_i\in C^\infty$，$i=1,2$．且

$$\varepsilon_1\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_1-\varepsilon_2\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_2 = 0,\text{在 }\Gamma_1\text{ 上},\tag{5.2}$$

$$\varepsilon_2\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_2-\varepsilon_3\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_3 = 0,\text{在 }\Gamma_2\text{ 上},\tag{5.3}$$

其中$\frac{\partial u}{\partial n}\big|_i$，$\frac{\partial u}{\partial n}\big|_{i+1}$ $(i=1,2)$分别为 u 在 Γ_i 两侧法向导数在 Γ_i 上的迹．

问题 I

假设

$$\rho_3(x,u) = -\rho(x)u|u|^{\gamma-1}\ (\gamma\geqslant 1),\tag{5.4}$$

其中 $0\leqslant\rho(x)\in C^\infty(\bar{\Omega}_3)$．由 $u\in H_0^1(\Omega)$及索伯列夫嵌入定理，可知若 $n=1,2$，$\rho_3\in L^p(\Omega_3)$，$\forall p\geqslant 1$．若 $n>2$，则 $u\in L^{\frac{2n}{n-2}}(\Omega)=L^{2^*}(\Omega)$，$\rho_3\in L^{\frac{2^*}{\gamma}}(\Omega_3)$．

注意到，当 $\gamma+1\leqslant 2^*$ 时，满足条件(5.2)－(5.4)的方程(5.1) 是泛函

$$E(u) = \int_\Omega\frac{1}{2}\varepsilon(x)|\nabla u|^2\mathrm{d}x+2\pi\int_{\Omega_3}\frac{\rho(x)}{\gamma+1}|u|^{\gamma+1}\mathrm{d}x-2\pi\int_{\Omega_1}\rho_1(x)u\mathrm{d}x-2\pi\int_{\Omega_2}\rho_2(x)u\mathrm{d}x,$$

在 $H_0^1(\Omega)$上的 Euler-Lagrange 方程．由 $\rho(x)\geqslant 0$ 和 Cauchy 不等式以及 Poincaré 不等式知，有

$$E(u) \geqslant \int_{\Omega} \frac{1}{4}\varepsilon(x) \mid \nabla u \mid^{2} \mathrm{d}x - C_1 \geqslant C \| u \|_{H^1(\Omega)}^{2} - C_1.$$

所以 $E(u)$ 是强制的. $E(u)$ 在 $H_0^1(\Omega)$上是弱下半连续的. 事实上,假设 $u_m \in H_0^1(\Omega)$, $u_m \rightharpoonup u \in H_0^1(\Omega)$. 则由嵌入定理知,$u_m \to u \in L^p(\Omega)$,若 $n \geqslant 3$ 则 $p < 2^*$;若 $n=2$,则 p 为任意正数. 即当 $n \geqslant 3, \gamma+1 < 2^*$ 时;或 $n=2, \gamma+1 < +\infty$时, 成立

$$\int_{\Omega_3} \frac{\rho(x)}{\gamma+1}(\mid u_m \mid^{\gamma+1} - \mid u \mid^{\gamma+1})\mathrm{d}x - \int_{\Omega_1} \rho_1(x)(u_m - u)\mathrm{d}x$$

$$-\int_{\Omega_2} \rho_2(x)(u_m - u)\mathrm{d}x \to 0 \quad (\text{当 } m \to \infty).$$

又由 H^1 模的弱下半连续性,易得 E 的弱下半连续性. 因此, $H_0^1(\Omega)$中存在 E 的极小元 u^*. 并且 u^* 即为(1.6)式一个弱解.

问题Ⅱ

实际上,在蛋白质问题中,条件(5.4)被下面的条件所取代

$$\rho_3(u) = -C\rho(x)\sinh(ku), \rho(x) \geqslant 0, C > 0, k > 0, \text{且 } n = 2 \tag{5.5}$$

为讨论该半线性问题解的存在性,我们需要介绍 Moser Trudinger 不等式.

引理 5.1(Moser Trudinger 不等式)

设 M_n 为一紧黎曼流形. 若 $\varphi \in H^{1,n}(M_n)$,则 $\exp\varphi$ 和 $\exp[\alpha(|\varphi| \cdot \|\varphi\|_{H^1}^{-1})^{\frac{n}{(n-1)}}]$($\alpha$ 是一个不依于 φ 的充分小实数)均可积. 且存在常数 C, μ 和 γ 使得对一切 $\varphi \in H^{1,n}$都满足

$$\int_{M_n} e^{\varphi}\mathrm{d}V \leqslant C\exp[\mu \| \nabla\varphi \|_{L^2}^{n} + \gamma \| \varphi \|_{L^2}^{n}]$$

且 $H^1 \ni \varphi \to e^{\varphi} \in L^1$ 为紧映射.

假设问题Ⅱ的解 $u \in H_0^1(\Omega)$,由引理 5.1 可知当 $n=2$ 时,$e^u \in L^q$, $\forall q \geqslant 1$. 因此, $\cosh(ku) \in L^q$, $\forall q \geqslant 1$.

注意到,满足条件(5.2)(5.3)和(5.5)的方程(5.1) 是泛函

$$E(u) = \int_{\Omega} \frac{1}{2}\varepsilon(x) \mid \nabla u \mid^{2} \mathrm{d}x + 2\pi\int_{\Omega_3} \frac{C}{k}\rho(x)\cosh(ku)\mathrm{d}x$$

$$-2\pi\int_{\Omega_1} \rho_1(x)u\mathrm{d}x - 2\pi\int_{\Omega_2} \rho_2(x)u\mathrm{d}x$$

在 $H_0^1(\Omega)$上的 Euler-Lagrange 方程. 则由 $\rho(x) \geqslant 0$ 和 Cauchy 不等式以及 Poincaré 不等式,得

$$E(u) \geqslant \int_{\Omega} \frac{1}{4}\varepsilon(x) \mid \nabla u \mid^{2} \mathrm{d}x - C_1 \geqslant C \| u \|_{H^1(\Omega)}^{2} - C_1,$$

所以,$E(u)$是强制的. 假设 当 $n \to \infty$时,$u_n \rightharpoonup u$(在 $H^1(\Omega)$中). 又由 Moser Trudinger 不等式,可知 $H^1 \ni \varphi \to e^{\varphi} \in L^1$ 为紧映射. 因此, 当 $n \to \infty$时,$\cosh(ku_n) \to \cosh(ku)$ (在 $L^1(\Omega)$ 中). 进而 $E(u)$是弱下半连续的.

于是存在 $u^* \in H_0^1(\Omega)$ 使得 $E(u^*) = \inf\limits_{u \in H_0^1(\Omega)} E(u)$. 并且 u^* 是问题Ⅱ一个弱解.

由上述讨论可得

引理 5.2 对于满足条件(H_1)—(H_3)的 $f(x,u)$,问题 (1.6)存在弱解 $u \in H_0^1(\Omega)$.

于是由定理 A 可得

定理 B 设 Ω_i ($i=1,2,3$) 为光滑有界区域. 若(H_1)—(H_3)满足,则(1.6)存在一

$H_0^1(\Omega)$弱解，且 $u\in C^{0,1}(\bar{\Omega})$

$$u \in C^{\infty}(\bar{\Omega}_i), \quad i = 1,2,3.$$

证 由引理 5.2 可得(1.6)式存在一 $H_0^1(\Omega)$弱解．由索伯列夫嵌入定理可知，当 $n=2$ 时，问题Ⅰ中的 $\rho_3\in L^q(\Omega_3)$，$\forall q\in[1,\infty)$．另一方面，在问题Ⅱ中，当 $n=2$ 时，由 Moser Trudinger 不等式，可得 $\sinh(ku)\in L^q(\Omega_3)$，$\forall q\in[1,\infty)$．于是，定理 A 可用于这两种情形，得到 $u\in C^{0,1}(\bar{\Omega})$且 $u\in C^{\infty}(\bar{\Omega}_i)$，$i=1,2,3$.

已知在问题Ⅰ中，当 $n>2$ 时，有 $u\in L^{2^*}(\Omega)$．由已知条件 (H_3)：$2<n<6$ 时，$1\leqslant\gamma<\frac{4}{n-2}$，可得 $\rho_3(x,u)\in L^q(\Omega_3)$，$q>\frac{n}{2}$．再由定理 A 即得 $u\in C^{0,1}(\bar{\Omega})$且 $u\in C^{\infty}(\bar{\Omega}_i)$，$i=1,2,3$. ▌

参 考 文 献

[1] Debye P, Hückel E. Zur theore der elektrolyte. Physik Z, 1923, **24**: 185

[2] Li Tatian, Tan Yongji, Peng Yuejun. Mathematical model and method for spontaneous potential well-logging. European J Appl Math, 1994, **5**: 123－139

[3] Michael E. Taylor Pseudodifferential Operators. Princeton: Princeton University Press, 1981

[4] Lar Hörmander. Linear Partial Differential Operators. Berlin: Springer-Verlag, 1976

[5] Lin Fanghua, Han Qing. Elliptic Partial Differential Equations. New York: Providence RI, 2000

[6] Thierry Aubin. Some Nonlinear Problems in Riemannian Geometry. Berlin: Springer-Verlag, 1998

[7] Michael Struwe. Variational Methods. New York: Springer-Verlag, 2000

Regularity of Solutions to Second Order Elliptic Equations with Discontinuous Coefficients

Xing Mei

(*Institute of Mathematics*, *Fudan University*, *Shanghai* 200433)

Abstract: The mathematical problem discussed in the paper is derived from the electric field with discontinuous dielectric constants arising in biology and physics. The author will study the existence and regularity of solutions to semi-linear second order elliptic equations with discontinuous coefficients. The pseudo differential operator is a basic tool in the present paper.

Key words: Regularity; Pseudo differential operator; Discontinuous coefficients.

MR(2000) Subject Classification: 35R05; 35J60; 35S05