

基于多层增量未知元方法的一类三维对流扩散方程的研究 *

杨爱利 伍渝江 宋伦继
 (兰州大学数学与统计学院 兰州 730000)

摘要: 对于一类一般形式的三维对流扩散方程, 运用有限差分方法, 在增量未知元方法 (IU) 下, 可以得到一个 IU 型正定但非对称的线性方程组. 其系数矩阵条件数要远远优于不用 IU 方法的情形^[1]. 考虑到 IU 方法的这一优点, 作者在文中将 IU 方法与几种经典的迭代方法相结合, 来求解上述系统. 作者从理论上对该系统的 IU 型系数矩阵条件数进行了估计, 并通过数值试验验证了这几种 IU 型迭代方法的有效性.

关键词: 增量未知元方法; 对流扩散方程; 迭代方法.

MR(2000) 主题分类: 65N; 65F **中图分类号:** O241.82 **文献标识码:** A

文章编号: 1003-3998(2009)03-564-09

1 引言

增量未知元作为一种逼近近似惯性流形的方法, 首先由 Temam 在文献 [2] 中提出, 然后在文献 [3] 中被用来求解偏微分方程. 宋和伍在文献 [4] 中运用这一方法考虑下面的对流扩散方程

$$-\Delta u - b \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2} + \frac{\partial u}{\partial x_3} \right) = f(x) \quad (b > 0). \quad (1)$$

得到了比较好的结果. 本文对一类一般形式的变系数对流扩散方程进行考虑. 通过对系数进行一些适当的假设, 运用有限差分方法, 我们可以得到一个大型稀疏系统

$$AU = F, \quad (2)$$

其中系数矩阵 A 具有正定对称部分, 即 $M = \frac{1}{2}(A^T + A)$ 正定. 下述经典的迭代方法 (即: GCR, MR, Orthomin(k), Bi-CGSTAB^[5], GMRES^[6], HSS^[7] 及 BTSS^[8]) 可以用来求解 (2) 式. 有关近似惯性流形及其数值算法的研究可进一步参看文献 [9-10].

由参考文献 [1, 11], 我们知道 IU 方法可以有效降低系数矩阵 A 的条件数, 即: $\bar{A} := S^T A S$ 的条件数远小于 A 的条件数, 其中 S 是从 \bar{U} 到 U 的转换矩阵, 即: $U = S\bar{U}$. 所以很自然的运用 IU 方法, 可以得到对应于 (2) 式的方程组

$$\bar{A}\bar{U} = \bar{F}, \quad (3)$$

收稿日期: 2007-03-07; 修订日期: 2008-12-18

E-mail: yangaili@lzu.edu.cn

* 基金项目: 甘肃省科技计划 (0804NKCA073) 和兰州大学理论物理与数学纯基础科学基金 (Lzu07003) 资助

其中 $\bar{F} = S^T F$. 由于 \bar{A} 和 A 同样具有正定对称部分, 所以上述七种迭代方法依然适用, 相应的我们称它们为: GCR-IU, MR-IU, Orthomin(k)-IU, Bi-CGSTAB-IU, GMRES-IU, HSS-IU 以及 BTSS-IU. 文中定理 1 给出了对 (3) 式中 IU 型系数矩阵条件数估计的理论结果, 而要获得某一给定精度的数值解, 需要的迭代步数由推论 1 给出. 最后数值试验说明, IU 方法的运用可以有效提高这七种迭代方法的效率.

2 三维增量未知元方法 (IU)

为了简单, 我们这儿仅介绍一层的增量未知元方法, 多层情形可类似考虑, 详见参考文献 [1, 12]. 我们在区域 $\Omega = (0, 1)^3 \subset \mathbb{R}^3$ 上进行考虑, 空间各个方向上的粗网格步长均为 $h_0 = 1/N$, 而细网格步长均为 $h_1 = h_0/2$. 设 $u_{\alpha, \beta, \gamma}$ 为函数 u 在点 $(\alpha h_1, \beta h_1, \gamma h_1)$ 处的近似值, 其中 $\alpha, \beta, \gamma = 0, 1, \dots, 2N$. 现在引入增量未知元, 在粗格点 $(2ih_1, 2jh_1, 2kh_1)$ ($i, j, k = 0, 1, \dots, N$) 上, 定义 $y_{2i, 2j, 2k} = u_{2i, 2j, 2k}$, 而在其它的格点, 即细格点上, 增量值记为 $z_{\alpha, \beta, \gamma}$, 具体分如下三种形式给出

(1) 边的中点 (Z_1)

$$\begin{aligned} z_{2i, 2j, 2k+1} &= u_{2i, 2j, 2k+1} - \frac{1}{2}(u_{2i, 2j, 2k} + u_{2i, 2j, 2k+2}), \\ z_{2i, 2j+1, 2k} &= u_{2i, 2j+1, 2k} - \frac{1}{2}(u_{2i, 2j, 2k} + u_{2i, 2j+2, 2k}), \\ z_{2i+1, 2j, 2k} &= u_{2i+1, 2j, 2k} - \frac{1}{2}(u_{2i, 2j, 2k} + u_{2i+2, 2j, 2k}), \end{aligned}$$

(2) 面的中心 (Z_2)

$$\begin{aligned} z_{2i, 2j+1, 2k+1} &= u_{2i, 2j+1, 2k+1} - \frac{1}{4}(u_{2i, 2j, 2k} + u_{2i, 2j, 2k+2} + u_{2i, 2j+2, 2k} + u_{2i, 2j+2, 2k+2}), \\ z_{2i+1, 2j, 2k+1} &= u_{2i+1, 2j, 2k+1} - \frac{1}{4}(u_{2i, 2j, 2k} + u_{2i, 2j, 2k+2} + u_{2i+2, 2j, 2k} + u_{2i+2, 2j, 2k+2}), \\ z_{2i+1, 2j+1, 2k} &= u_{2i+1, 2j+1, 2k} - \frac{1}{4}(u_{2i, 2j, 2k} + u_{2i, 2j+2, 2k} + u_{2i+2, 2j, 2k} + u_{2i+2, 2j+2, 2k}), \end{aligned}$$

(3) 体的中心 (Z_3)

$$\begin{aligned} z_{2i+1, 2j+1, 2k+1} &= u_{2i+1, 2j+1, 2k+1} - \frac{1}{8}(u_{2i, 2j, 2k} + u_{2i, 2j, 2k+2} + u_{2i, 2j+2, 2k} + u_{2i, 2j+2, 2k+2} \\ &\quad + u_{2i+2, 2j, 2k} + u_{2i+2, 2j, 2k+2} + u_{2i+2, 2j+2, 2k} + u_{2i+2, 2j+2, 2k+2}). \end{aligned}$$

现在引入属于 $\mathbb{R}^{(2N-1)^3}$ 的三个向量

$$U = \begin{pmatrix} U_c \\ U_f \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} F_c \\ F_f \end{pmatrix}, \quad \bar{U} = \begin{pmatrix} Y \\ Z \end{pmatrix},$$

其中 U_c 是由粗格点处的函数值按字典顺序做成的向量, U_f 是由其它细格点处的函数值按照上述三类排列而成, 每一类也都按字典顺序, F 类似定义. 在向量 \bar{U} 中, $Y = U_c$, 向量 Z 是由增量未知元 $z_{\alpha, \beta, \gamma}$ 按照与 U_f 一样的顺序排列而成. 从 \bar{U} 到 U 的转换矩阵记为 S . 这样我们就可以很容易的由 (2) 式重现系统 (3). 多层 IU 方法可以类似定义.

3 一类一般情形的三维对流扩散方程

考虑下述三维对流扩散方程

$$\begin{cases} Lu := - \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) + \sum_{i=1}^3 b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u = f(x), & \text{in } \Omega, \\ u = 0, & \text{on } \partial\Omega, \end{cases} \quad (4)$$

其中 $\Omega = (0,1)^3$. 设存在常数 $0 < \underline{\alpha} \leq \bar{\alpha}$, 使得系数函数 $a_{ii}, a_{ij} = a_{ji}, b_i \in C^1(\Omega)$ ($i, j = 1, 2, 3$), $c \in C^0(\Omega)$, 在 Ω 中几乎处处满足

$$\underline{\alpha} \sum_{i=1}^3 \xi_i^2 \leq \sum_{i,j=1}^3 a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \leq \bar{\alpha} \sum_{i=1}^3 \xi_i^2, \quad \forall \xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in \mathbb{R}^3, \quad (5)$$

$$-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} b_i(x) + c(x) \geq 0, \quad c(x) \geq \gamma > 0, \quad (6)$$

对于方程 (4) 运用空间有限差分多层离散, 容易得到系统 (2). 四种迭代方法 (即 GCR, MR, Orthomin(k), GMRES) 运用到 (2) 式上的收敛率, 我们有下面的结果 (见文献 [5-6]).

引理 1 如果 $\{r(i)\}$ 是由四种算法 GCR, MR, Orthomin(k) 及 GMRES 生成的残量序列, 则

$$\|r(i)\|_2 \leq \left\{ 1 - \frac{1}{\nu(A)^2} \right\}^{i/2} \|r(0)\|_2, \quad (7)$$

其中 $\nu(A) = \lambda_{\max}(A^T A)^{1/2} / \lambda_{\min}(M)$, $M = \frac{1}{2}(A^T + A)$ 是 A 的对称部分.

注 1 如果将定理中的 A 换为 \bar{A} , 我们就得到了这四种方法运用到 (3) 式上的结果, 即四种相应的 IU 型方法作用到 (2) 式上的结果.

注 2 HSS 和 BTSS 方法无条件收敛到精确解^[7-8], Bi-CGSTAB 的收敛性参见文献 [13].

4 IU 型系数矩阵条件数估计

考虑对流扩散方程 (4). 设 N, d 为非负整数, $N \geq 2$, $h_0 = 1/N$, $h_d = h_0/2^d$. 网格步长为 h_d 的五点差分离散格式为

$$\begin{aligned} (L_d U_d)_{\alpha, \beta, \gamma} &= \left\{ - \sum_{i,j=1}^3 \bar{\nabla}_{j, h_d} (a_{ij} \nabla_{i, h_d} u) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 b_i (\bar{\nabla}_{i, h_d} + \nabla_{i, h_d}) u + cu \right\}_{\alpha, \beta, \gamma} \\ &= f_{\alpha, \beta, \gamma}, \quad \alpha, \beta, \gamma = 1, 2, \dots, 2^d N - 1, \end{aligned} \quad (8)$$

$$u_{\alpha, \beta, \gamma} = 0, \quad \text{if } \alpha, \beta \text{ or } \gamma = 0 \text{ or } 2^d N. \quad (9)$$

这儿 $u_{\alpha, \beta, \gamma}$ 为解函数 u 在点 $(\alpha h_d, \beta h_d, \gamma h_d)$ 处的逼近值,

$$\bar{\nabla}_{i, h_d} \varphi(x) = \frac{1}{h_d} \{ \varphi(x) - \varphi(x - h_d e_i) \}, \quad i = 1, 2, 3,$$

$$\nabla_{i, h_d} \varphi(x) = \frac{1}{h_d} \{ \varphi(x + h_d e_i) - \varphi(x) \}, \quad i = 1, 2, 3,$$

其中 $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$. 类似于文献 [14], 设 \tilde{u} 表示与 U_d 相关的步长函数, 相应于 (8) 式的二次型为

$$\begin{aligned} \langle L_d U_d, U_d \rangle = & \frac{1}{h_d^3} \left\{ \sum_{i,j=1}^3 \int_{\Omega} \tilde{a}_{ij}(x) \nabla_{i,h_d} \tilde{u} \nabla_{j,h_d} \tilde{u} dx \right. \\ & \left. + \int_{\Omega} \left(\tilde{c}(x) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 (\bar{\nabla}_{i,h_d} + \nabla_{i,h_d}) \tilde{b}_i(x) \right) \tilde{u}^2 dx \right\}. \end{aligned} \quad (10)$$

由假设 (6), 当 h 非常小的时候, 有

$$\tilde{c}(x) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 (\bar{\nabla}_{i,h_d} + \nabla_{i,h_d}) \tilde{b}_i(x) \geq 0.$$

由假设 (5), 对于任意 $U_d \neq 0$, 有

$$\langle L_d U_d, U_d \rangle \geq \frac{\alpha}{h_d^3} \sum_{i=1}^3 \int_{\Omega} |\nabla_{i,h_d} \tilde{u}(x)|^2 dx > 0, \quad (11)$$

从而 L_d 正定. 又

$$\frac{1}{2} (\bar{L}_d + \bar{L}_d^T) \bar{U}_d, \bar{U}_d \rangle = \langle \bar{L}_d \bar{U}_d, \bar{U}_d \rangle = \langle L_d U_d, U_d \rangle, \quad (12)$$

其中 $\bar{L}_d = S_d^T L_d S_d$, $\bar{U}_d = S_d^{-1} U_d$, \bar{L}_d 具有正定对称部分. 所以, 对于 IU 型方程组 $\bar{L}_d \bar{U}_d = \bar{f}_d$, 其中 $\bar{f}_d = S_d^T f_d$, 我们可以运用上述七种迭代方法进行求解. 为了估计 $\nu(\bar{L}_d)$, 我们首先引入下述引理 [1,4].

引理 2 存在仅依赖于 Ω 的形状的常数 c_1 , 使得

$$\|S_d\|_2 \leq c_1 8^{d/2}. \quad (13)$$

在引理 1 和 2 的帮助下, 对于算法 GCR-IU, MR-IU, Orthomin(k)-IU 及 GMRES-IU, 我们有下列的结果.

定理 1 存在依赖于 Ω 的形状, 但与 h_d 无关的常数 c_2, c_3 及 c_4 , 使得

$$\lambda_{\min}(M) \geq \frac{c_2 \alpha^2}{d^3 h_d^2}, \quad (14)$$

$$\lambda_{\max}(\bar{L}_d^T \bar{L}_d)^{\frac{1}{2}} \leq c_3 h_d^{-4} \left\{ \bar{\alpha}^2 d h_d + 8^d h_d + 2^{-\frac{d}{2}} (\bar{\alpha} d)^{\frac{1}{2}} \right\}, \quad (15)$$

从而有

$$\nu(\bar{L}_d) \leq c_4 d^3 (\underline{\alpha} h_d)^{-2} \left\{ \bar{\alpha}^2 h_d d + 8^d h_d + 2^{-\frac{d}{2}} (\bar{\alpha} d)^{\frac{1}{2}} \right\}, \quad (16)$$

其中 $M = \frac{1}{2} (\bar{L}_d + \bar{L}_d^T)$, $\nu(\bar{L}_d) = \lambda_{\max}(\bar{L}_d^T \bar{L}_d)^{\frac{1}{2}} / \lambda_{\min}(M)$.

证 设算子 A_d 为

$$(A_d U_d)_{\alpha, \beta, \gamma} = \left\{ - \sum_{i,j=1}^3 \bar{\nabla}_{j,h_d} (a_{ij} \nabla_{i,h_d} u) \right\}_{\alpha, \beta, \gamma},$$

则

$$\langle A_d U_d, U_d \rangle = \sum_{i,j=1}^3 \int_{\Omega} \tilde{a}_{ij}(x) \nabla_{i,h_d} \tilde{u} \nabla_{j,h_d} \tilde{u} dx,$$

注意到 (5) 式及文献 [1, 定理 1], 存在仅依赖于 Ω 的形状的常数 c'_1 和 c'_2 , 使得对于任意的 $\bar{U}_d \neq 0$, 有

$$\begin{aligned} \langle A_d U_d, U_d \rangle &\geq \underline{\alpha} \int_{\Omega} |\nabla_{h_d} \tilde{u}(x)|^2 dx \geq \frac{c'_1 \underline{\alpha} h_d}{d^3} \langle \bar{U}_d, \bar{U}_d \rangle, \\ \langle A_d U_d, U_d \rangle &\leq \bar{\alpha} \int_{\Omega} |\nabla_{h_d} \tilde{u}(x)|^2 dx \leq c'_2 \bar{\alpha} d \langle \bar{U}_d, \bar{U}_d \rangle, \end{aligned}$$

即

$$\frac{c'_1 \underline{\alpha} h_d}{d^3} \leq \frac{\langle A_d U_d, U_d \rangle}{\langle \bar{U}_d, \bar{U}_d \rangle} \leq c'_2 \bar{\alpha} d. \quad (17)$$

注意到 (10), (12) 及 (17) 式, 有

$$\begin{aligned} \lambda_{\min}(M) &= \inf_{\bar{U}_d \neq 0} \frac{\langle \frac{1}{2}(\bar{L}_d + \bar{L}_d^T) \bar{U}_d, \bar{U}_d \rangle}{\langle \bar{U}_d, \bar{U}_d \rangle} = \inf_{\bar{U}_d \neq 0} \frac{\langle \bar{L}_d \bar{U}_d, \bar{U}_d \rangle}{\langle \bar{U}_d, \bar{U}_d \rangle} \\ &\geq \underline{\alpha} \cdot \inf_{\bar{U}_d \neq 0} \frac{1}{h_d^3} \frac{\langle A_d U_d, U_d \rangle}{\langle \bar{U}_d, \bar{U}_d \rangle} \geq \frac{c'_1 \underline{\alpha}^2}{d^3 h_d^2}. \end{aligned}$$

记 $c_2 = c'_1$, 不等式 (14) 得证.

另外一方面, 我们假设

$$\|c(x)\|_{\infty} \leq c'_3, \quad \|b_i(x)\|_{\infty} \leq c'_4, \quad i = 1, 2, 3. \quad (18)$$

记算子 M_d 及 N_d 为

$$\begin{aligned} (M_d U_d)_{\alpha, \beta, \gamma} &= \left\{ - \sum_{i,j=1}^3 \bar{\nabla}_{j,h_d} (a_{ij} \nabla_{i,h_d} u) + cu \right\}_{\alpha, \beta, \gamma}, \\ (N_d U_d)_{\alpha, \beta, \gamma} &= \left\{ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 b_i (\bar{\nabla}_{i,h_d} + \nabla_{i,h_d}) u \right\}_{\alpha, \beta, \gamma}, \end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned} L_d U_d &= M_d U_d + N_d U_d, \\ \lambda_{\max}(\bar{L}_d^T \bar{L}_d)^{\frac{1}{2}} &= \|\bar{L}_d\|_2 \leq \|\bar{M}_d\|_2 + \|\bar{N}_d\|_2. \end{aligned} \quad (19)$$

由于 M_d 和 \bar{M}_d 对称正定, 以及 (18), (5) 和 (13) 式, 有

$$\begin{aligned} \|\bar{M}_d\|_2 &= \sup_{\bar{U}_d \neq 0} \frac{\langle \bar{M}_d \bar{U}_d, \bar{U}_d \rangle}{\langle \bar{U}_d, \bar{U}_d \rangle} \leq \frac{1}{h_d^3} \sup_{\bar{U}_d \neq 0} \frac{\bar{\alpha} \langle A_d U_d, U_d \rangle + c'_3 \langle U_d, U_d \rangle}{\langle \bar{U}_d, \bar{U}_d \rangle} \\ &\leq \frac{1}{h_d^3} (\bar{\alpha}^2 d + 8^d) \max(c'_2, c'_3 c_1^2). \end{aligned} \quad (20)$$

定义

$$\begin{aligned} (B_{1,d} U_d)_{\alpha, \beta, \gamma} &= u_{\alpha+1, \beta, \gamma} - u_{\alpha, \beta, \gamma}, & (C_{1,d} U_d)_{\alpha, \beta, \gamma} &= u_{\alpha, \beta, \gamma} - u_{\alpha-1, \beta, \gamma}, \\ (B_{2,d} U_d)_{\alpha, \beta, \gamma} &= u_{\alpha, \beta+1, \gamma} - u_{\alpha, \beta, \gamma}, & (C_{2,d} U_d)_{\alpha, \beta, \gamma} &= u_{\alpha, \beta, \gamma} - u_{\alpha, \beta-1, \gamma}, \\ (B_{3,d} U_d)_{\alpha, \beta, \gamma} &= u_{\alpha, \beta, \gamma+1} - u_{\alpha, \beta, \gamma}, & (C_{3,d} U_d)_{\alpha, \beta, \gamma} &= u_{\alpha, \beta, \gamma} - u_{\alpha, \beta, \gamma-1}, \end{aligned}$$

有

$$\langle N_d U_d, U_d \rangle = \frac{1}{2h_d^3} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^3 \tilde{b}_i (\bar{\nabla}_{i,h_d} + \nabla_{i,h_d}) \tilde{u} dx = \frac{1}{h_d^3} \left\langle \sum_{i=1}^3 \frac{1}{2h_{i,d}} D_i (B_{i,d} + C_{i,d}) U_d, U_d \right\rangle,$$

其中 $D_i = \text{diag}(b_i(x))$. 由 (18) 式, $\|D_i\|_2 \leq c'_4, i = 1, 2, 3$, 相应地

$$\begin{aligned} \|\bar{N}_d\|_2 &= \|S_d^T N_d S_d\|_2 \leq \frac{1}{h_d^3} \|S_d^T\|_2 \left\| \sum_{i=1}^3 \frac{1}{2h_d} D_i (B_{i,d} + C_{i,d}) S_d \right\|_2 \\ &\leq \frac{1}{h_d^3} \|S_d^T\|_2 \frac{c'_4}{2 \cdot 2^d h_0} \left\| \sum_{i=1}^3 (B_{i,d} + C_{i,d}) S_d \right\|_2. \end{aligned} \tag{21}$$

记 $\Omega_{1,h_d}^* = (0, 1) \times (0, 1 + h_d) \times (0, 1 + h_d)$, 由 $B_{1,d}$ 的定义, 有

$$\begin{aligned} \|B_{1,d} S_d\|_2^2 &= \sup_{\bar{U}_d \neq 0} \frac{\langle B_{1,d} S_d \bar{U}_d, B_{1,d} S_d \bar{U}_d \rangle}{\langle \bar{U}_d, \bar{U}_d \rangle} = \sup_{\bar{U}_d \neq 0} \frac{\langle B_{1,d} U_d, B_{1,d} U_d \rangle}{\langle \bar{U}_d, \bar{U}_d \rangle} \\ &\leq \sup_{\bar{U}_d \neq 0} \frac{\int_{\Omega_{1,h_d}^*} (\nabla_{1,h_d} \tilde{u})^2 dx}{\langle \bar{U}_d, \bar{U}_d \rangle} \leq \frac{\langle A_d U_d, U_d \rangle}{\langle \bar{U}_d, \bar{U}_d \rangle}, \end{aligned}$$

由 (17) 式

$$\|B_{1,d} S_d\|_2 \leq (c'_2 \bar{\alpha} d)^{\frac{1}{2}},$$

类似地

$$\|B_{i,d} S_d\|_2 \leq (c'_2 \bar{\alpha} d)^{\frac{1}{2}}, \quad i = 2, 3. \quad \|C_{i,d} S_d\|_2 \leq (c'_2 \bar{\alpha} d)^{\frac{1}{2}}, \quad i = 1, 2, 3.$$

所以由 (13) 和 (21) 式, 有

$$\|\bar{N}_d\|_2 \leq 3c_1 c'_4 (c'_2)^{\frac{1}{2}} \frac{2^{\frac{d}{2}} (\bar{\alpha} d)^{\frac{1}{2}}}{h_0 h_d^3}. \tag{22}$$

又由于 (19)–(20) 及 (22) 式, 有

$$\begin{aligned} \lambda_{\max}(\bar{L}_d^T \bar{L}_d)^{\frac{1}{2}} &\leq \max(c'_2, c'_3 c_1^2) \frac{\bar{\alpha}^2 d + 8^d}{h_d^3} + 3c_1 c'_4 (c'_2)^{\frac{1}{2}} \frac{2^{\frac{d}{2}} (\bar{\alpha} d)^{\frac{1}{2}}}{h_0 h_d^3} \\ &\leq \max\left(c'_2, c'_3 c_1^2, 3c_1 c'_4 (c'_2)^{\frac{1}{2}}\right) \frac{\bar{\alpha}^2 d h_0 + 8^d h_0 + 2^{\frac{d}{2}} (\bar{\alpha} d)^{\frac{1}{2}}}{h_d^3 h_0}. \end{aligned}$$

记 $c_3 = \max\left(c'_2, c'_3 c_1^2, 3c_1 c'_4 (c'_2)^{\frac{1}{2}}\right)$, 注意到 $h_0 = 2^d h_d$, 不等式 (15) 成立. 从而

$$\nu(\bar{L}_d) = \lambda_{\max}(\bar{L}_d^T \bar{L}_d)^{\frac{1}{2}} / \lambda_{\min}(M) \leq c_4 d^3 (\underline{\alpha} h_d)^{-2} \left\{ \bar{\alpha}^2 h_d d + 8^d h_d + 2^{-\frac{d}{2}} (\bar{\alpha} d)^{\frac{1}{2}} \right\},$$

其中 $c_4 = c_3 / c_2$.

这样, 对于上述四种算法 (GCR-IU, MR-IU, Orthomin(k)-IU 及 GMRES-IU), 有下面的结果.

推论 1 为了获得残量不大于 ε 的近似解, 我们最多需要 k 步迭代, 其中

$$k \geq 2c_5 (\underline{\alpha} h_d)^{-4} d^6 |\log(\varepsilon)| \left\{ h_d \bar{\alpha}^2 d + 8^d h_d + 2^{-\frac{d}{2}} (\bar{\alpha} d)^{\frac{1}{2}} \right\}^2. \tag{23}$$

证 为了获得残量不大于 ε 的近似解, 由 (7) 式, 最多需要 k 步迭代, 其中 k 满足

$$\left\{1 - \frac{1}{\nu(\bar{L}_d)^2}\right\}^{k/2} \leq \varepsilon.$$

由 (16) 式, 有

$$\left\{1 - \frac{h_d^4 \underline{\alpha}^4}{c_4^2 d^6 (h_d \bar{\alpha}^2 d + 8^d h_d + 2^{-\frac{d}{2}} (d \bar{\alpha})^{\frac{1}{2}})^2}\right\}^{k/2} \leq \varepsilon$$

或等价的

$$k \geq 2 |\log(\varepsilon)| \cdot \left| \log \left(1 - \frac{h_d^4 \underline{\alpha}^4}{c_4^2 d^6 (h_d \bar{\alpha}^2 d + 8^d h_d + 2^{-\frac{d}{2}} (d \bar{\alpha})^{\frac{1}{2}})^2} \right) \right|^{-1}.$$

注意到 $|\log(1-x)| \geq x$, 记 $c_5 = c_4^2$, 我们只要求

$$k \geq 2c_5 (\underline{\alpha} h_d)^{-4} d^6 |\log(\varepsilon)| \left\{ h_d \bar{\alpha}^2 d + 8^d h_d + 2^{-\frac{d}{2}} (d \bar{\alpha})^{\frac{1}{2}} \right\}^2. \quad \blacksquare$$

5 数值结果

在这一部分, 我们以下述问题为例, 数值验证七种 IU 型迭代算法的有效性.

$$\begin{cases} -(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) + (1+y)u_x + xu_y + u_z + \exp(x+y+z)u = f(x, y, z), & \text{in } \Omega, \\ u(x, y, z) = g(x, y, z), & \text{on } \partial\Omega, \end{cases} \quad (24)$$

其中 $\Omega = (0, 1)^3$, $g \in C^2(\bar{\Omega})$. 注意到边界条件是非齐次的, 所以我们设 $v(x, y, z) = u(x, y, z) - g(x, y, z)$, 则在 $\partial\Omega$ 上, $v(x, y, z) = 0$. 方程 (24) 变成

$$-(v_{xx} + v_{yy} + v_{zz}) + (1+y)v_x + xv_y + v_z + \exp(x+y+z)v = Q(x, y, z), \quad \text{in } \Omega, \quad (25)$$

其中 $Q = f + g_{xx} + g_{yy} + g_{zz} - (1+y)g_x - xg_y - g_z - \exp(x+y+z)g$, 精确解为 $v(x, y, z) = 100xyz(1-x)(1-y)(1-z)$. 容易验证方程 (25) 的系数满足 (5) 和 (6) 式.

如果没有特别的声明, 我们所有的迭代都是从零向量开始, 而当残量满足 $\|r^{(k)}\|_2 / \|r^{(0)}\|_2 < 10^{-4}$ 时停止, 其中 $r^{(k)}$ 为第 k 步的残量. 这儿我们只考虑一层 IU 情形, 所以在三个方向的步长均为 $h_1 = 1/2N$. 方程 (25) 右端项 $Q(x, y, z)$ 对应的离散向量 Q_d 可以按下面方式计算

$$Q_d = A_d V_d,$$

其中 V_d 为精确解对应的离散向量.

由表 1 和 2 我们知道, 不论是迭代步数还是 CPU 时间, 对于不同的 N , HSS-IU 和 BTSS-IU 方法都分别要比 HSS 和 BTSS 好. 更为重要的是, 随着 N 的增大, HSS-IU 和 BTSS-IU 相对于 HSS 和 BTSS, 在 CPU 时间方面的速度增长 (speed-up) 也会变大.

表 1 迭代步数

N	HSS	HSS-IU	BTSS	BTSS-IU
3	16	14	21	21
4	21	14	30	17
5	27	14	38	26
6	32	15	47	29

表 2 CPU 时间 (秒)

N	HSS	HSS-IU	Speed-up	BTSS	BTSS-IU	Speed-up
3	0.1410	0.1090	1.29	0.0930	0.0940	0.99
4	1.9220	1.2190	1.58	0.8440	0.5930	1.42
5	17.8440	9.2190	1.94	9.3120	6.0620	1.54
6	120.5310	51.8910	2.32	56.0470	33.8430	1.66

由图 1 和 2, 我们可以看到, IU 方法的运用有效提高了图中五种迭代方法的效率. 在同样的迭代步数或同样的 CPU 时间下, 结合了 IU 的算法所达到的精度要远高于没有用 IU 的算法的精度. 例如在图 1 中, 当 CPU 时间为 0.6 秒时, Orthomin(1)(左) 精度为 $10^{-5.2}$, 而 Orthomin(1)-IU(右) 已经达到了 $10^{-8.5}$. 在图 2 中, 经过 20 步迭代, Bi-CGSTAB(左) 精度为 $10^{-5.8}$, Bi-CGSTAB-IU(右) 却已达到 $10^{-9.5}$.

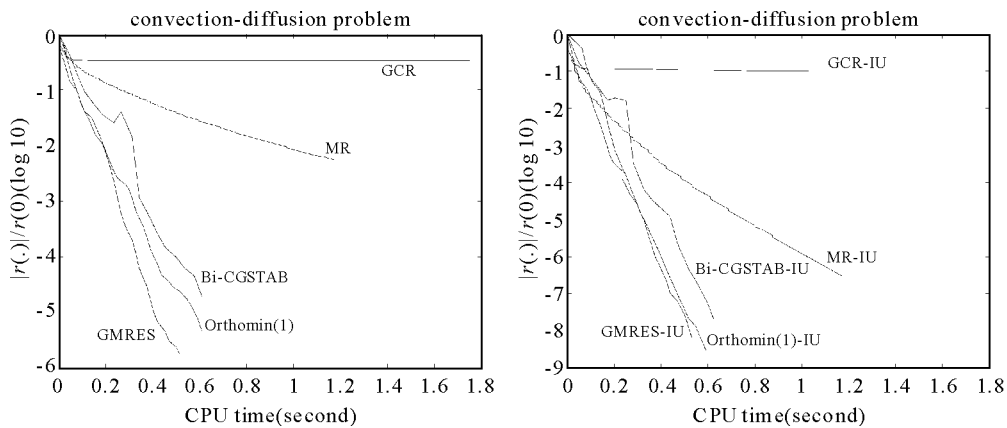


图 1 $N = 6$ 时, 由算法 GCR, MR, Orthomin(1), GMRES 及 Bi-CGSTAB 所得的数值解的误差的 l^2 范与 CPU 时间图 (左), IU 型算法 GCR-IU, MR-IU, Orthomin(1)-IU, GMRES-IU 及 Bi-CGSTAB-IU 的图 (右)

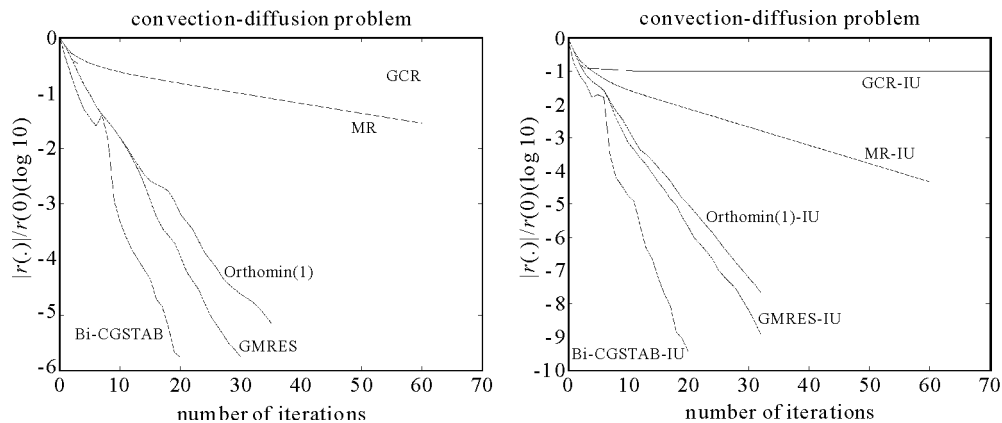


图 2 $N = 6$ 时, 由算法 GCR, MR, Orthomin(1), GMRES 及 Bi-CGSTAB 所得的数值解的误差的 l^2 范与迭代步数图 (左), IU 型算法 GCR-IU, MR-IU, Orthomin(1)-IU, GMRES-IU 及 Bi-CGSTAB-IU 的图 (右)

参 考 文 献

- [1] Chen M, Miranville A, Temam R. Incremental unknowns in finite differences in three space dimensions. *Mat Apl Comput*, 1995, **14**(3): 219–252
- [2] Temam R. Inertial manifolds and multigrid methods. *SIAM J Math Anal*, 1990, **21**: 154–178
- [3] Chen M, Temam R. Incremental unknowns for solving partial differential equations. *Numer Math*, 1991, **59**: 255–271
- [4] Song L J, Wu Y J. Incremental unknowns method for solving three-dimensional convection-diffusion equations. *Numer Math J Chinese Univ (English Ser)*, 2007, **16**: 14–27
- [5] Eisenstat S C, Elman H C, Schultz M H. Variational iterative methods for nonsymmetric system of linear equations. *SIAM J Numer Anal*, 1983, **20**: 345–357
- [6] Saad Y, Schultz M H. GMRES: A generalized minimal residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems. *SIAM J Sci Stat Comput*, 1986, **7**(3): 856–869
- [7] Bai Z Z, Golub G H, NG M K. Hermitian and skew-hermitian splitting methods for non-hermitian positive-definite linear systems. *SIAM J Matrix Anal Appl*, 2003, **24**(3): 603–626
- [8] Bai Z Z, Golub G H, Lu L Z, Yin J F. Block triangular and skew-hermitian splitting methods for positive-definite linear systems. *SIAM J Sci Comput*, 2005, **26**(3): 844–863
- [9] Li K T, Xu Z F, Yang X Z. A new approximate inertial manifold and associated algorithm. *Acta Math Sci*, 2006, **26B**(1): 1–16
- [10] Wu Y J, Guo B Y. Localization and approximation of attractors for the Kuramoto-Sivashinsky equations. *Acta Math Sci*, 2000, **20B**(2): 145–154
- [11] Chen M, Temam R. Incremental unknowns in finite differences: condition number of the matrix. *SIAM J Matrix Anal Appl*, 1993, **14**: 432–455
- [12] Song L J, Wu Y J. Incremental unknowns in three-dimensional stationary problem. *Numer Algor*, 2007, **46**: 153–171
- [13] Van der Vorst H A. Bi-CGSTAB: A fast and smoothly converging variant of Bi-CG for the solution of nonsymmetric linear systems. *SIAM J Sci Stat Comput*, 1992, **13**(2): 631–644
- [14] Chen M, Temam R. Incremental unknowns for convection-diffusion equations. *Appl Numer Math*, 1993, **11**: 365–383

A Class of Generalized Three Dimensional Convection-Diffusion Equations with Multi-Level Incremental Unknowns Method

Yang Aili Wu Yujiang Song Lunji

(School of Mathematics and Statistics, Lanzhou Univeristy, Lanzhou 730000)

Abstract: With the finite difference discretization techniques, the authors get a nonsymmetric and positive-definite linear system when considering a class of generalized three-dimensional convection-diffusion equations even if they have variable coefficients. Considering that the condition number of incremental unknowns(IU)-type coefficient matrix is much better than the matrix without IU(see [1]), the authors use the IU method in conjunction with several classical iterative methods to approximate the solution of the system. After estimating the condition number of IU-type coefficient matrix, the authors numerically confirm that these IU-type iterative methods are much more efficient.

Key words: Incremental unknowns; Convection-diffusion equations with variable coefficients; Iterative methods.

MR(2000) Subject Classification: 65N; 65F