

## 多层次统计-动力建模及其应用\*

林振山 刘会玉

(南京师范大学地理科学院 南京 210097)

**摘要:**该文将子波变换技术和平衡态动力理论结合起来,提出了以气候突变点数为核心的代层次气候建模技术. 该技术不仅具有纯粹的动力学意义,而且模式的物理意义十分清楚,计算简单.

**关键词:**气候; 代尺度; 干-湿; 模式; 预测.

**MR(2000)主题分类:**85A      **中图分类号:**P446      **文献标识码:**A

**文章编号:**1003-3998(2004)02-185-08

### 1 引言

气候态的转换(如干-湿、旱-涝)的数理实质就是状态的突变([1]). 然而,关于气候突变的定义,至今还没有统一的说法. 在统计气候学里,一般认为是气候记录从一个平均值到另一个平均值的急剧变化([2]). 是一种气候记录的不连续性. 显然,这不具有数学的严谨性. 目前,常用的气候突变的检验方法([3])有:低通滤波器、滑动  $t$ -检验法、Cramer's 法、Yamamoto's ([4],[5])等. 由于传统的统计方法无法区分资料的本征变化和自然变化,亦不具备时、空分辨,因此无法对气候(资料)进行多层次分析,而对突变点的诊断也缺乏数学的唯一性和严谨性. 此外,由于传统的统计诊断方法和统计预测模式都不含动力因素,所以更无法对诸如干-湿、旱-涝、冷-暖等状态异常(突变)转换的弛豫时间进行动力预测. 另一方面,对复杂的客观对象进行动力预测,不仅计算费用昂贵,而且目前对奇异点的关键预测的准确率还远远不能达到业务预报的要求. 这就提出了如何能充分利用资料来建立能够对系统的不同层次的突变进行预测的动力气候模式的新问题.

本文试图根据随机动力学、统计理论和气候层次理论([6])构建了能描述区域降水变化的统计-动力模式,并对内蒙古地区降水突变趋势及跃迁时间作出预测.

### 2 不同层次气候态的干、湿突变点

我们知道,任一时间序列  $f_i(x)$  ( $i=1,2,3,\dots,n$ )的 MHAT 子波变换([7])为

$$F[f(x)] = a^2 \frac{d^2}{dx^2}(f * g_a), \quad g_a = g(x/a)/a^{1/2}. \quad (1)$$

收稿日期:2001-01-17; 修订日期:2002-11-20

E-mail:zslin@email.njnu.edu.cn

\* 基金项目:国家自然科学基金(40371108)项目和国家“211”二期工程重大项目:“不同时空尺度的环境演变和生态建设”资助

这里  $g$  为 MHAT 子波,  $a$  为伸缩尺度,  $*$  为卷积运算.

从(1)式可以看出,由于  $F[f(x)]$  可以看成是对非线性函数  $f(x)$  经过  $g_a$  平滑后对  $x$  的二阶导数,故其零点(既数学上的拐点)就是系统的突变点. 有必要指出,有 MAHT 子波变换所给出的突变点是具有严格的数学意义的.

由于子波变换存在所谓的边界效应([8]),它将导致资料始、末两端所对应的子波系数失真. 而且,随着层次的提高,这种边界效应将十分突出. 因此,要研究代层次的突变问题,首先必需消除边界效应. 本文采用对称延伸的方法([8])进行边界处理. 如果  $\{r_i, i=1, 2, \dots, n; n=45\}$  表示某台站的年降水序列,则将序列的两边延伸构成以下的新序列,待进行子波变换后再去掉所延伸的部分,即

$$r_i = \begin{cases} r_{1-i}, & i = 0, -1, -2, \dots, -(n-1), \\ r_i, & i = 1, 2, 3, \dots, n, \\ r_{2n+1-i}, & i = n+1, n+2, \dots, 2n, \end{cases} \quad (2)$$

其中  $n$  为资料长度.

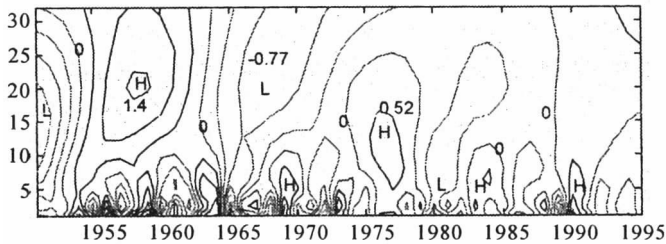


图 1

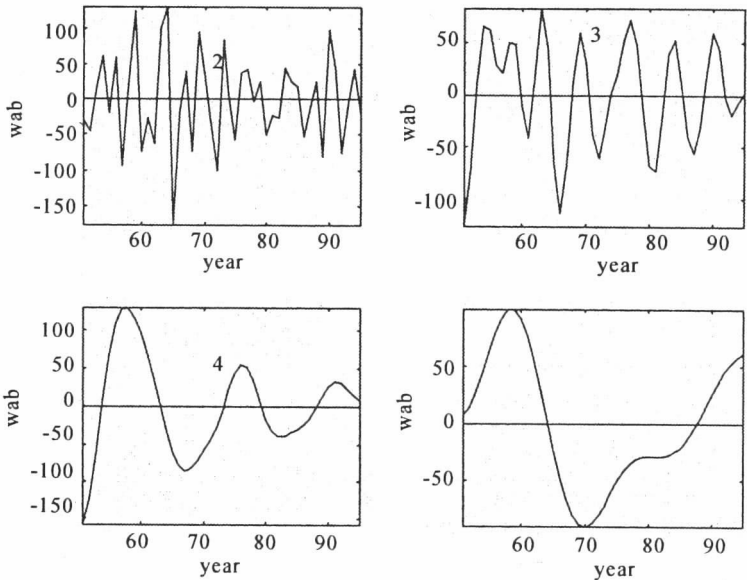


图 2

图 1 为华北某地区的年降水时间序列的子波变换等值线图,而图 2 则是不同时间尺度(层次)的子波变换图. 其中各曲线的零点所对应的时间就是该层次的降水突变点.

### 3 建模原理及方法

#### 3.1 建模原理

若以  $r_1, r_2, \dots, r_n$  表示某区域的年降水时间序列, 而用  $R_j (j=1, 2, \dots, l)$  表示原序列  $\{r_i, i=1, 2, \dots, n\}$  里某段具有一定共性(如干期或湿期)的平均值所构成的新的序列. 则  $\{R_j\}$  序列所描述的系统层次要比  $\{r_i, i=1, 2, \dots, n\}$  序列所描写的高. 设某台站的年降水的时间序列的起、止年分别为  $t_1$  和  $t_n$ , 而由子波诊断出的代层次的突变点(这里假设只有一个突变点, 以下将讨论多个突变点的情况)的对应时间(年份)为  $t_y$ . 我们则可以认为突变点前 ( $t_1$  年至  $t_y$  年)、后 ( $t_y$  年至  $t_n$  年)年降水距平均  $R_1$  和  $R_3$  是代层次里的两个稳定态(湿态和干态), 而每年降水量的变化则是围绕某定态(干期或湿期)的振荡 ( $r_i = R_1 + p$  或  $r_i = R_3 + p$ ). 这里的  $p$  是由年尺度和月、季尺度有关的诸因素(广义力)所共同决定的对代层次气候变化的“扰动”(相对代层次而言, 年、月季尺度的作用都可视为扰动). 而  $R_1, R_3$  是高(代)层次里的二个平衡态, 且依下式计算

$$R_1 = \frac{1}{t_y - t_1} \sum_{i=1}^{c-1} (r_i - \bar{R}), \quad R_3 = \frac{1}{t_n - t_y + 1} \sum_{i=c}^n (r_i - \bar{R}), \quad (3)$$

其中  $\bar{R} = \frac{1}{t_n - t_1 + 1} \sum_i r_i$  是平均值,  $c$  为突变点所对应的原序列的序号.

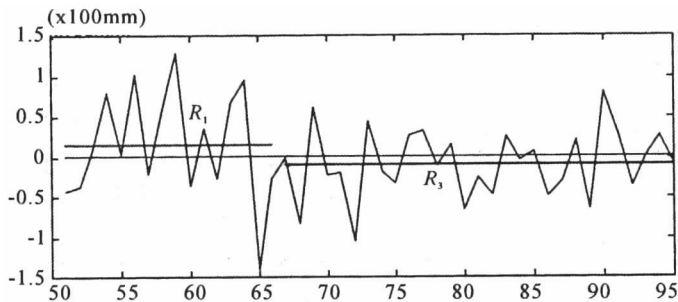


图 3

图 3 给出了双平衡态(对应于(3)式)和一个不稳态的物理说明.

由于在代层次里有多突变点, 即该层次里有多平衡态(如多个湿期和多个干期), 为了描述该层次的统计行为, 建立起能够描写该层次的统一的统计-动力学方程,  $R_1$  和  $R_3$  应该是分别由(7)式算出多个湿期和多个干期的各自平均值. 即

$$R_1 = \frac{1}{n_{yw}} \sum_{i=1}^{n_w} \sum_{j=t_{ub}(i)}^{t_{uw}(i)-1} (r(j) - \bar{R}), \quad (4)$$

$$R_3 = \frac{1}{n_{yd}} \sum_{i=1}^{n_d} \sum_{j=t_{db}(i)}^{t_{de}(i)-1} (r(j) - \bar{R}), \quad (5)$$

其中  $n_w, n_d$  分别为湿期和干期的数目,  $t_{ub}(i), t_{uw}(i), t_{db}(i), t_{de}(i)$  分别为第 1 个湿期和干期的起始时间和结束时间.  $n_{yw}, n_{yd}$  分别为湿期和干期的总年数, 且

$$n_{yw} = \sum_{i=1}^{n_w} [t_{wx}(i) - t_{wb}(i) + 1], \quad (6)$$

$$n_{yd} = \sum_{i=1}^{n_d} [t_{dx}(i) - t_{db}(i) + 1], \quad (7)$$

而

$$\bar{R} = \frac{1}{n_{yw} + n_{yd}} \sum_i r_i. \quad (8)$$

由(3)~(8)式我们分别求得内蒙古各站代层次降水(即其各自的湿、干态的平均)的两个稳定态,如表 1 所示

表 1 内蒙古各站 16 年层次降水系统的双稳态

	$R_1$ (湿态)	$R_3$ (干态)
呼和浩特	0.051 963	-0.031 638
锡林浩特	0.029 125	-0.032 303
朱日和	0.028 082	-0.021 725
多伦	0.014 933	-0.020 625
包头	0.035 625	-0.025 938
杭锦后旗	0.011 911	-0.177 750

由于是双稳态结构,两定态之间必有一个不稳态  $R_2$ . 所以在不考虑低层次的作用时,描述该层次(代尺度)气候性质和行为的势函数  $u$  最简单的形式应该是关于降水量的 4 次方型函数,而相应的广义力  $f = -u' = -\frac{du}{dR}$  则为三次方型函数. 从而,我们得以用统计的方法建立起以下的动力方程

$$\frac{dR}{d\tau} = -R^3 + \lambda_1 R^2 - \lambda_2 R + \lambda_3 = f(R). \quad (9)$$

由(9)式的定态解可得以下的参数方程

$$\begin{cases} \lambda_1 = R_1 + R_2 + R_3, \\ \lambda_2 = R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3, \\ \lambda_3 = R_1 R_2 R_3. \end{cases} \quad (10)$$

如果考虑到本征层次(年尺度)和低层次(月、季尺度)因素(或广义力)对代层次的扰动,则必须在(9)式里加入扰动项,从而可得到描述某地区代层次的降水变化的统计-动力方程

$$\frac{dR}{d\tau} = -R^3 + \lambda_1 R^2 - \lambda_2 R + \lambda_3 + F(\tau). \quad (11)$$

为保证三次幂项的系数为单位 1,这里的  $\tau$  为无标度时间,而  $F(\tau)$  为扰动力.

设  $F(\tau)$  是随机的,且满足

$$\begin{aligned} \langle F(\tau) \rangle &= 0, \\ \langle F(\tau_1) F(\tau_2) \rangle &= \epsilon^2 \delta(\tau_1 - \tau_2). \end{aligned} \quad (12)$$

其中  $\epsilon^2$  为一常数,描写随机  $r$  扰动强度;尖括号  $\langle \rangle$  表示统计平均值(下同). 方程(11)和(12)就是我们所要建立的描写地区代层次降水的动力学方程.

### 3.2 参数的确定

由于方程组(10)只有 3 个方程,却有 4 个未知数( $R_2, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ),此外,方程(12)里还有未知参数  $\epsilon$ . 所以,还必须导出有关的 2 个辅助方程.

(11)~(12)式所对应的 Fokker-Planck 方程为

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial \tau} &= \frac{\partial}{\partial R}(R^3 - \lambda_1 R^2 + \lambda_2 R - \lambda_3)P + \frac{\epsilon^2 \partial^2 P}{2\partial R^2} \\ &= \frac{\partial}{\partial R}(u'P) + \frac{\epsilon^2 \partial^2 P}{2\partial R^2}, \end{aligned} \quad (13)$$

其中

$$u' = -f(R) = R^3 - \lambda_1 R^2 + \lambda_2 R - \lambda_3. \quad (14)$$

设

$$R = \bar{R}_{0j} + \delta R, \quad (15)$$

用  $R^2$  乘(13)式的两边,并取定态解得

$$\begin{aligned} \langle \delta R^2 \rangle_{\bar{R}_{01}} &= \frac{\epsilon^2}{2u''_{\bar{R}_{01}}}, \\ \langle \delta R^2 \rangle_{\bar{R}_{03}} &= \frac{\epsilon^2}{2u''_{\bar{R}_{03}}}. \end{aligned} \quad (16)$$

根据资料可得  $R_1, R_3$  的方差

$$\langle \delta R^2 \rangle_{\bar{R}_{01}} = S_1 = \frac{1}{t_y - t_1} \sum_{i=1}^{c-1} (r_i - \bar{R})^2, \quad (17)$$

$$\langle \delta R^2 \rangle_{\bar{R}_{03}} = S_3 = \frac{1}{t_n - t_y + 1} \sum_{i=c}^n (r_i - \bar{R})^2. \quad (18)$$

由于在代层次里有多个突变点, $S_1$  和  $S_3$  应该是分别由(17)~(18)式算出多个湿期和多个干期的各自平均值. 即

$$S_1 = \frac{1}{n_{yw}} \sum_{i=1}^{n_w} \sum_{j=t_{ub}^{(i)}}^{t_{uw}^{(i)}-1} (r(j) - \bar{R})^2, \quad (19)$$

$$S_3 = \frac{1}{n_{yd}} \sum_{i=1}^{n_d} \sum_{j=t_{db}^{(i)}}^{t_{dw}^{(i)}-1} (r(j) - \bar{R})^2. \quad (20)$$

由(10),(17)~(20)式可求得内蒙古地区各站代层次的降水变化-动力方程的有关系数如表 2 所示.

表 2 内蒙古各站 16 年层次降水预测动力方程参数

	$R_2$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\epsilon^2$
呼和浩特	0.027 950 5	0.048 28	-0.001 08	-0.000 05	0.000 121 2
锡林浩特	0.010 650 6	0.007 47	-0.000 97	-0.000 01	0.000 017 4
朱日和	0.010 895 4	0.017 27	-0.000 54	0.000 01	0.000 008 29
多伦	0.000 150 5	-0.005 68	-0.000 31	0.000 00	0.000 006 24
包头	0.017 381 3	0.027 05	-0.000 76	-0.000 02	0.000 037 7
杭锦后旗	-0.003 039 1	-0.008 90	-0.000 19	0.000 00	0.000 002 2

## 4 平衡态的转换周期

### 4.1 无标度时间

与 Fokker-Planck 方程所对应的伴随 Fokker-Planck 方程为

$$f(R, \lambda_i) \frac{d\tau}{dR} + \frac{1}{2} \epsilon^2 \frac{d^2\tau}{dR^2} = -1. \quad (21)$$

设:  $R_3 < R_2 < R_1$ , 则  $R_1, R_3$  分别为湿、干气候态, 则系统干-湿状态之间的平均跃迁无标度时间, 即系统由  $R_1$  (湿期) 跃迁到  $R_2$  (拐点) 的平均时间由以下边界条件决定

$$R_1 \rightarrow R_2: R = \infty, \frac{d\tau}{dR} = 0; R = R_2, \tau = 0. \quad (22)$$

同理, 当系统由  $R_3$  (干期) 跃迁到  $R_2$  (拐点) 的平均时间由以下边界条件决定

$$R_3 \rightarrow R_2: R = -\infty, \frac{d\tau}{dR} = 0; R = R_2, \tau = 0. \quad (23)$$

采用 Rongger-Kunta 法对(19)式进行数值积分, 分别利用条件(20)和(21)则可求得湿期到突变点转换所需的无标度时间(既湿期的无标度弛豫时间)  $\tau_w$  和干期到突变点转换所需的无标度时间(既干期的无标度弛豫时间)  $\tau_d$ . 但在气候预测中, 我们需要的是实际的弛豫时间, 而不是无标度的时间. 因此, 有必要将无标度的弛豫时间换为实际的时间.

### 4.2 干-湿转换周期

根据无标度时间的动力方程(9)可得系统在某定态  $R_i$  ( $R_1$  或  $R_3$ ) 附近 ( $R = R_i + \delta R$ ,  $\delta R/R_i \ll 1$ ) 的线性化方程

$$\frac{d(\delta R)}{d\tau} = -u''(R_i)\delta R. \quad (24)$$

设有标度时间

$$t = \tau/\rho, \quad (25)$$

则有

$$\frac{d(\delta R)}{dt} = -\rho u''(R_i)\delta R. \quad (26)$$

从(22)式里可以看出,  $\rho u''(R_i)$  表示转向迟豫时间. 若该层次的平均周期为  $T$ , 则可近似认为

$$T \approx 1/\rho u''(R_i), \quad (27)$$

所以

$$\begin{aligned} \rho_i &= \frac{1}{u''(R_i)T} \\ &= \frac{1}{(3R_i^2 - 2\lambda_1 R_i + \lambda_2)T}, \quad i = 1, 3. \end{aligned} \quad (28)$$

在同一层次里,  $\rho$  值显然应取分别用  $R_1$  和  $R_3$  计算所得的  $\rho_1$  和  $\rho_3$  的平均值, 即  $\rho = (\rho_1 + \rho_3)/2$ . 由各层次的子波成分图确定该层次的平均周期  $T$  (表 1 所示) 后, 则可由(28)式求出  $\rho$ , 进而可以求出整个湿期和干期的弛豫时间  $t_w = \tau_w/\rho$  和  $t_d = \tau_d/\rho$ . 表 3 给出了内蒙古地区各站降水代层次的有关  $\tau_w, \tau_d, \rho_1, \rho_3, t_w$  和  $t_d$  值.

表 3 内蒙古各站 16 年层次气候态弛豫时间预测值

	$\tau_w$	$\tau_d$	$\rho_1$	$\rho_3$	$t_w$ (年)	$t_d$ (年)
呼和浩特	76.59	3.725 8	29.333	11.808	3.73	10.19
锡林浩特	248.63	656.54	51.834	22.294	6.71	17.71
朱日和	408.92	853.28	89.883	47.375	5.98	12.44
多伦	454.72	628.88	104.724	75.695	5.04	7.20
包头	140.22	364.92	49.448	20.815	4.00	10.38
杭锦后旗	1 006.54	890.64	204.844	207.818	4.88	4.80

从表 3 可以看出:(1)除了杭锦后旗内蒙古各区的干期的维持比湿期要长得多,这说明了内蒙古缺水干旱的普遍性;(2)在 16 年层次里,内蒙古地区干期最长的是锡林浩特(17.71 年),而干期最短的则是杭锦后旗(4.80 年);(3)在 16 年层次里,内蒙古地区湿期最长的是锡林浩特(6.71 年),而湿期最短的则是呼和浩特(3.73 年);(4)在 16 年层次里,内蒙古的不同地区的干-湿周期是不同的,最长的(锡林浩特)干-湿周期为 24.42 年,而最短的杭锦后旗仅为 9.68 年. 根据表 3 则可以推测这些地区进入下一个湿期的时间分别是:2004、2013、2011、2003、2006 和 1999 年. 所以,除了杭锦后旗,内蒙古地区在今后的若干年内仍是处于干期的.

## 5 结语

本文将子波变换技术和平衡态动力学理论结合起来,提出了以气候突变点数为核心的代层次气候建模技术. 与传统的统计建模技术相比,该技术虽然采用了许多统计方法,但已具有了纯粹的动力学意义,并能严谨地(指具有数学意义的)确定突变点;与传统的动力数值预测方法相比,该技术已充分地利用了资料所能提供的历史信息,并能严谨地(指具有数学和物理意义的)求积不同时间尺度的气候(平衡)态的弛豫时间,而且模式的物理意义(指气候态)十分清楚,计算极其简单.

我们还将该技术应用于对内蒙古不同地区的代层次的干、湿期的诊断和预测,研究结果表明:(1)在突变特征上,1965 年是一个明显的突变点. 内蒙古地区的降水在这一年发生了自 1951 年来最为明显(强烈)的一次突变,而在 1965 年以前,内蒙古地区的降水较为丰沛;(2)除了杭锦后旗,内蒙古各区的干期的维持(弛豫时间)比湿期要长得多,这说明了内蒙古缺水干旱的普遍性;(3)在 16 年层次里,内蒙古的不同地区的干-湿周期是不同的,最长的(锡林浩特)干-湿周期为 24.42 年,而最短的杭锦后旗仅为 9.68 年;(4)呼和浩特、锡林浩特、朱日和、多伦、包头和杭锦后旗地区进入下一个湿期的时间分别是:2004、2013、2011、2003、2006 和 1999 年.

## 参 考 文 献

- [1] 林振山. 普适双变量随机气候模式的研究. 数学物理学报, 2003, **23A**(1): 60—65  
 [2] 林振山, 刘健. 当代气候的层次和时间序列建模. 数学物理学报, 1995, **15**(2): 183—189

- [3] Lin Zhenshan. The theory of hierarchy and its application. *J Peking Uni*, 1990, **26**(3): 355—363
- [4] Yamamoto R, Iwashima T, Sanga N K. Climatic jump—a phprothesis in climate diagnosis. *J Meteor Soc Japan*, 1985, **63**: 1157—1160
- [5] Yamamoto R, Iwashima T, Sanga N K, Hoshiai M. An analysis of climatic jump. *J Meteor Soc Japan*, 1986, **64**: 273—281
- [6] 林振山. 气候建模、诊断和预测的研究. 北京:气象出版社,1996
- [7] Mayer Y. *Wavelet and Operator*. Beijing: Press of World Books Corporation, 1992
- [8] 林振山,邓自旺. 小波气候诊断技术. 北京:气象出版社,1999

## **The Modeling Technique of Multi-Hierarchy Statistic-dynamics and its Application**

Lin Zhenshan   Liu Huiyu

*(The College of Geographic Sciences, Nanjing Normal University, Nanjing 210097)*

**Abstract:** In this paper, the technique of wavelet analysis and the theory of equilibrium state are combined to propose modeling technique of climate catastrophe points. Comparing with traditional statistic modeling technique, this technique has the sense of pure dynamics and is able to determine catastrophe points rigorously. Comparing with traditional method of dynamical numerical forecast, this method has made full use of the historical information provided by data and been able to work out the transition time of the climate states with different time scale rigorously. Moreover, the physical meaning of the model is very clear and the calculation is fairly simple.

**Key words:** Wavelets; Catastrophe point; Climatic modeling; Forecast.

**MR(2000) Subject Classification:** 85A