2005,**25A**(4):451－460

Acta Mathematica Scientia
数学物理学报

七阶非线性色散方程初值问题解的局部和整体存在性*

陶双平
(西北师范大学数学与信息科学学院　兰州 730070；北京师范大学数学系　北京 100875)
崔尚斌
(中山大学数学系　广州 510275)

摘要:该文研究七阶非线性弱色散方程:$\frac{\partial u}{\partial t}+au\frac{\partial u}{\partial x}+\beta\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}+\gamma\frac{\partial^5 u}{\partial x^5}+\mu\frac{\partial^7 u}{\partial x^7}=0,(x,t)\in \boldsymbol{R}^2$ 的初值问题,通过运用震荡积分衰减估计的最近结果，首先对相应线性方程的基本解建立了几类 Strichartz 型估计. 其次，应用这些估计证明了七阶非线性弱色散方程初值问题解的局部与整体存在性和唯一性. 结果表明，当初值 $u_0(x)\in H^s(R)$，$s\geqslant 2/13$ 时，存在局部解；当 $s\geqslant 1$ 时，存在整体解.

关键词:色散方程；初值问题；解;局部存在性；整体存在性.

MR(2000)主题分类:35Q30；35G25；42B25　　**中图分类号**:O175.12　　**文献标识码**:A

文章编号:1003-3998(2005)04-451-10

1　引言及主要结论

本文讨论下列七阶非线性弱色散方程的初值问题

$$\frac{\partial u}{\partial t}+au\frac{\partial u}{\partial x}+\beta\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}+\gamma\frac{\partial^5 u}{\partial x^5}+\mu\frac{\partial^7 u}{\partial x^7}=0,(x,t)\in \boldsymbol{R}^2, \tag{1.1}$$

$$u(x,0)=u_0(x),\quad x\in \boldsymbol{R}, \tag{1.2}$$

其中 $a\in \boldsymbol{R}$ 为非线性扰动系数,$\beta,\gamma,\mu\in \boldsymbol{R}$ 为色散系数. 方程(1.1)描述沿 x 方向弱色散非线性长波传播的物理模型[1－2]. 方程(1.1)包含了几类著名的非线性色散方程,例如,当 $\gamma=\mu=0$，$\beta=1$，$a=6$，方程(1.1)为 Korteweg-de Vries 方程[3],当 $\mu=0$,方程(1.1)为非线性 Kawahara 方程或奇异扰动 Korteweg-de Vries 方程[4－5]. Korteweg-de Vries 方程和非线性 Kawahara 方程的初值问题在 Sobolev 空间 H^s 中的适定性(即解的局部和整体存在性及唯一性)的研究目前已经取得了很好进展，例如,Kenig-Ponce-Vega[6－7]对 Korteweg-de Vries 方程分别关于 $s\geqslant 1$ 和 $s>\frac{1}{4}$；Tao-Cui[8－9]对非线性 Kawahara 方程关于 $s\geqslant\frac{1}{4}$. 然而，更一般的初值问题(1.1)－(1.2)的适定性至今仍未得到解决，本文就此问题进行研究. 首先，对于相应线性方程的基本解 $G(x,t)$得到了如下的衰减估计(详见引理 2.1):设 $\alpha\in \boldsymbol{C}$，$0\leqslant \mathrm{Re}\alpha\leqslant\frac{5}{2}$，则对任意固定的 $\delta>0$,都存在仅依赖于 δ，α，β，γ 和 μ 的常数 $C>0$ 使成立

收稿日期:2003-10-07

* 基金项目:国家自然科学基金(10271095)和 NWNU－KJCXGC－212 资助

$$\sup_{x\in R}|D^{\alpha}G(x,t)|\leqslant Ct^{-\frac{1}{7}(\mathrm{Re}\,\alpha+1)},\quad 0<|t|\leqslant\delta. \tag{1.3}$$

其次，建立了下面的 Strichartz 型光滑估计(详见定理 2.3)

$$\|D^{\frac{\theta\alpha}{2}}W(t)f\|_{L_T^qL_x^p}\leqslant C\|f\|_2,\quad \forall f\in L^2(\boldsymbol{R}), \tag{1.4}$$

其中 $0\leqslant\alpha\leqslant\frac{5}{2}$，$0\leqslant\theta\leqslant1$，$p=\frac{2}{1-\theta}$，$q=\frac{14}{\theta(\alpha+1)}$，$W(t)f(x)=(G(\cdot,t)*f)(x)$. 同时，将建立另外一些关于解算子 $W(t)f$ 的重要 $H^s-L_x^pL_T^q$ 型光滑时空混合范数估计，这些估计在证明非线性结果中将起到关键性的作用. 最后，我们得到下面的主要定理

定理 1.1 假设 $\mu\beta>0$，$\mu\gamma<0$，$u_0\in H^s(\boldsymbol{R})$，$s\geqslant\frac{2}{13}$. 则存在相应的 $T=T(\|u_0\|_{s,2})>0$ 使得初值问题(1.1)-(1.2)在 $\boldsymbol{R}\times[-T,T]$上存在唯一的解 $u(x,t)$满足

$$u\in C([-T,T];H^s(\boldsymbol{R}))\cap(L_x^{\frac{26}{9}}L_T^{\frac{13}{4}})(\boldsymbol{R}\times[-T,T]), \tag{1.5}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}\in(L_T^4L_x^{\infty})(\boldsymbol{R}\times[-T,T]), \tag{1.6}$$

$$D^s\frac{\partial u}{\partial x}\in(L_x^{\frac{13}{2}}L_T^{\frac{26}{5}})(\boldsymbol{R}\times[-T,T]), \tag{1.7}$$

$$D^{s+3}u\in(L_x^{\infty}L_T^2)(\boldsymbol{R}\times[-T,T]). \tag{1.8}$$

借助于 L^2 守恒律([10])，从定理 1.1 可以得到下面整体性结果

定理 1.2 假设 $\mu\beta>0$，$\mu\gamma<0$，$u_0\in H^1(\boldsymbol{R})$. 则初值问题(1.1)-(1.2)在 $\boldsymbol{R}^2$ 上存在唯一的整体解 $u(x,t)$满足

$$u\in L^{\infty}(\boldsymbol{R};H^1(\boldsymbol{R})).$$

本文用到的记号如下

H 表示 Hilbert 变换，即

$$Hf(x)=F^{-1}(-\mathrm{i}(\mathrm{sgn}(\xi))\tilde{f}(\xi))=\frac{1}{\pi}\quad \mathrm{P.V.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(y)}{x-y}\mathrm{d}y.$$

D^{α}($\alpha\in C$，$\mathrm{Re}\alpha>-1$)表示关于空间变量 x 的 α 阶绝对导数，即

$$D^{\alpha}f(x)=F^{-1}(|\xi|^{\alpha}\tilde{f}(\xi)).$$

因此，成立

$$D^1=H\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial x}H,\quad \frac{\partial u}{\partial x}=-HD^1=-D^1H.$$

$\|\cdot\|_p$($1\leqslant p\leqslant\infty$)表示空间 $L^p(\boldsymbol{R})$的范数.

$W^{s,p}(\boldsymbol{R}^n)=J^{-s}L^p(\boldsymbol{R}^n)$，$1\leqslant p\leqslant\infty$，其上的范数用 $\|\cdot\|_{s,p}$表示，其中 $J^s=(1-\Delta)^{\frac{s}{2}}$为 $-s$ 阶的 Bessel 位势算子(其定义详见 E. M. Stein[20]). 当 $p=2$ 时，用 H^s 代替 $W^{s,2}$.

$C([a.b];B)$(相应地 $C([a,b);B)$，$C((a,b);B)$)表示所有从$[a,b]$(相应地$[a.b)$,(a,b))到 B 的连续函数空间.

设 $1\leqslant p$，$q<\infty$，函数 $v:\boldsymbol{R}\times[-T,T]\to\boldsymbol{R}$. 定义

$$\|v(t,x)\|_{L_x^pL_T^q}=\left[\int_{-\infty}^{\infty}\left(\left(\int_{-T}^{T}|v(x,t)|^q\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{q}}\right)^p\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{p}}.$$

类似地有 $\|v(t,x)\|_{L_T^qL_x^p}$,并相应地用 $T=t$ 表示$[-T,T]=\boldsymbol{R}$ 时的情形. 当 p 或 q 等于 ∞ 时，范数取相应的极限范数. $(L_T^qL_x^p)(\boldsymbol{R}\times[-T,T])$(简记作 $L_T^qL_x^p$)表示定义在 $\boldsymbol{R}\times[-T,T]$上并满足 $\|\cdot\|_{L_T^qL_x^p}<\infty$ 的所有可测函数构成的空间. 类似地可定义空间$(L_x^pL_T^q)(\boldsymbol{R}\times[-T,T])$.

p'表示 $p(1\leqslant p\leqslant\infty)$的对偶指标，即$\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$.

2　基本估计

本节将建立相应线性方程的解及其分数阶导数的估计. 特别地，我们将证明 Strichartz 型光滑效应(1.4). 除此之外，还将建立几个在证明非线性结果中起重要作用的 $\|\cdot\|_{L_x^pL_T^q}$ 型的光滑时空混合范估计.

考虑下面的自由(线性)方程的初值问题

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\beta\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}+\gamma\frac{\partial^5 u}{\partial x^5}+\mu\frac{\partial^7 u}{\partial x^7}=0,\quad (x,t)\in\boldsymbol{R}^2, \tag{2.1}$$

$$u(x,0)=u_0(x),\quad x\in\boldsymbol{R}. \tag{2.2}$$

通过标准方法可以得到方程(2.1)的基本解有如下表达式

$$G(x,t)=c\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t(\mu\xi^7-\gamma\xi^5+\beta\xi^3)}d\xi=c\lim_{M\to\infty}\int_{-M}^{M}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t(\mu\xi^7-\gamma\xi^5+\beta\xi^3)}\mathrm{d}\xi, \tag{2.3}$$

其中 $c=(2\pi)^{-1}$. 易知上述极限是有意义的，对每个 $t\in\boldsymbol{R}$，$t\neq 0$，定义算子 $W(t)$如下：$W(t)f(x)=(G(\cdot,t)*f)(x)$，并定义 $W(0)f=f$. 则函数

$$u(x,t)=W(t)u_0(x),\quad (x,t)\in\boldsymbol{R}^2$$

(对适当的初值 u_0)是初值问题(2.1)－(2.2)的唯一解. 易知$\{W(t)\}_{t\in R}$是 $L^2(\boldsymbol{R})$上的酉算子群，因此，

$$\|W(t)f\|_2=\|f\|_2,\quad \forall f\in L^2(\boldsymbol{R}). \tag{2.4}$$

本节的目的是建立关于算子 $W(t)$的一些下节将用到的估计式.

引理 2.1　设 $\alpha\in\boldsymbol{C}$，$0\leqslant\mathrm{Re}\alpha\leqslant 5/2$. 则对任意的 $\delta>0$，存在仅依赖于 δ，α，β，γ，μ 的常数 $C>0$，成立

$$\sup_{x\in R}|D^\alpha G(x,t)|\leqslant Ct^{-\frac{1}{7}(\mathrm{Re}\alpha+1)},\quad 0<|t|\leqslant\delta. \tag{2.5}$$

证　记 $p(\xi)=\mu\xi^7-\gamma\xi^5+\beta\xi^3$，则

$$\begin{aligned}D^\alpha G(x,t)&=c\int_{-\infty}^{\infty}|\xi|^\alpha\mathrm{e}^{\mathrm{i}(tp(\xi)+x\xi)}\mathrm{d}\xi\\&=c\int_0^{\infty}\xi^\alpha\mathrm{e}^{\mathrm{i}t(p(\xi)+\frac{x}{t}\xi)}\mathrm{d}\xi+c\int_0^{\infty}(\xi)^\alpha\mathrm{e}^{\mathrm{i}t(p(-\xi)+(\frac{-x}{t})\xi)}\mathrm{d}\xi.\end{aligned}$$

因此从[12，定理 2.5]容易得到(2.5)式(注：尽管[12，定理 2.5]只对实的 α 陈述，但检查其证明不难知道它对复的 α 也成立).　▍

应用 Young 不等式和引理 2.1 立得

$$\|D^\alpha W(t)f\|_\infty\leqslant C\,t^{-\frac{1}{7}(\mathrm{Re}\,\alpha+1)}\|f\|_1, \tag{2.6}$$

其中 α 和 C 同引理 2.1. 根据复插值定理(见[13，Chapter V，Theorem 4.1])，由(2.4)和(2.6)式易得

定理 2.2　设 $0\leqslant\alpha\leqslant 5/2$，$0\leqslant\theta\leqslant 1$，则对任意 $\delta>0$ 存在仅依赖于 δ，α，β，γ 和 μ 的常数 $C>0$ 使对任意的 $f\in L^{\frac{2}{1+\theta}}(\boldsymbol{R})$和 $0<|t|\leqslant\delta$ 成立

$$\|D^{\theta\alpha}W(t)f\|_{\frac{2}{1-\theta}}\leqslant C\,t^{-\frac{1}{7}\theta(\alpha+1)}\|f\|_{\frac{2}{1+\theta}}. \tag{2.7}$$

估计式(2.6)和(2.7)对下节的应用来说不方便，因为它们的右端都不是函数的 L^2 范数或 H^s 范数，而是 L^p 范数且 $1\leqslant p<2$. 由于我们无法建立关于 $\|W(t)f\|_p$当 $1\leqslant p<2$ 时的估

计,这正是色散方程与抛物型方程的一个显著区别：关于抛物型方程，对于任意的 $1\leqslant p\leqslant q\leqslant\infty$ 都可以建立基本解的 L^p-L^q 型估计[14]，然而对于色散方程只能建立基本解的 $L^p-L^{p'}$ 估计，当然这里要求 $1\leqslant p<2$. 正由于这个原因，获得非线性色散方程初值问题在 Sobolev 空间中的适定性结果要比非线性抛物方程相应的问题困难得多. 为了克服这一困难，我们不得不借助于现代调和分析理论，建立线性色散方程(2.1)基本解算子 $W(t)$ 的 $H^s-L_x^pL_T^q$ 或 $H^s-L_T^qL_x^p$ 型光滑时空混合范数估计，即所谓的 Strichartz 型估计(C. E. Kenig, G. Ponce 和 L. Vega 首先应用这类估计研究非线性色散方程初值问题在 Sobolev 空间中的适定性[7]). 因此，为了证明主要定理,我们必须建立下面的 Strichartz 型估计.

定理 2.3 设 $0\leqslant\alpha\leqslant5/2$, $0\leqslant\theta\leqslant1$. 则对任意的 $\delta>0$ 存在仅依赖于 $\delta,\alpha,\theta,\beta,\gamma,\mu$ 的常数 $C>0$ 使对任意的 $f\in L^2(\boldsymbol{R})$和 $0<T\leqslant\delta$ 成立

$$\|D^{\frac{\theta\alpha}{2}}W(t)f\|_{L_T^qL_x^p}\leqslant C\|f\|_2,\text{ 这里 } p=2/(1-\theta),\ q=14/\theta(\alpha+1). \tag{2.8}$$

证 对任意的 $u(x,t)\in L_T^{q'}L_x^{p'}$，从估计式(2.7)得

$$\begin{aligned}\Big\|\int_{-T}^{T}D^{\theta\alpha}W(t-\tau)u(x,\tau)\mathrm{d}\tau\Big\|_{L_T^qL_x^p}&\leqslant\Big(\int_{-T}^{T}\Big(\int_{-T}^{T}\|D^{\theta\alpha}W(t-\tau)u(x,\tau)\|_p\mathrm{d}\tau\Big)^q\mathrm{d}t\Big)^{\frac1q}\\&\leqslant C\Big(\int_{-T}^{T}\Big(\int_{-T}^{T}|t-\tau|^{-\frac17\theta(\alpha+1)}\|u(\cdot,\tau)\|_{p'}\mathrm{d}\tau\Big)^q\mathrm{d}t\Big)^{\frac1q}.\end{aligned}$$

记 $I_\lambda(f)$为 λ 阶的 Riesz 位势积分算子[11],由于 $0\leqslant\frac17\theta(\alpha+1)\leqslant\frac12$及

$$\frac{1}{q}'+\frac17\theta(\alpha+1)=1+\frac1q,\ \text{i. e.},\quad q=\frac{14}{\theta(\alpha+1)},$$

所以应用关于 I_λ 的 Hardy-littlewood-Sobolev 不等式得([11, Chapter V, Theorem 1]或[15, Theorem 4.5.3])

$$\begin{aligned}&\Big\|\int_{-T}^{T}D^{\theta\alpha}W(t-\tau)u(x,\tau)d\tau\Big\|_{L_T^qL_x^p}\\\leqslant\,&C\Big(\int_{-\infty}^{\infty}\Big(\int_{-\infty}^{\infty}|t-\tau|^{-\frac17\theta(\alpha+1)}\|u^*(\cdot,\tau)\|_{p'}\mathrm{d}\tau\Big)^q\mathrm{d}t\Big)^{\frac1q}\\=\,&C\Big(\int_{-\infty}^{\infty}\big(I_{1-\frac17\theta(\alpha+1)}(\|u^*(\cdot,t)\|_{p'})\big)^q\mathrm{d}t\Big)^{\frac1q}\\\leqslant\,&C\Big(\int_{-\infty}^{\infty}\|u^*(\cdot,t)\|_{p'}^{q'}\mathrm{d}t\Big)^{\frac1q}=\|u\|_{L_T^{q'}L_x^{p'}},\end{aligned}$$

其中

$$u^*(x,t)=\begin{cases}u(x,t), & \text{如果}\quad x\in\boldsymbol{R},\ |t|\leqslant T,\\0, & \text{如果}\quad x\in\boldsymbol{R},\ |t|>T.\end{cases}$$

现在采用 P. Tomas 方法[16]便得到

$$\begin{aligned}&\Big\|\int_{-T}^{T}D^{\frac{\alpha\theta}{2}}W(t)u(x,t)\mathrm{d}t\Big\|_2^2\\=&\int_{-\infty}^{\infty}\Big(\int_{-T}^{T}D^{\frac{\alpha\theta}{2}}W(t)u(x,t)\mathrm{d}t\Big)\Big(\int_{-T}^{T}\overline{D^{\frac{\alpha\theta}{2}}W(t)u(x,t)}\mathrm{d}t\Big)\mathrm{d}x\\=&\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-T}^{T}u(x,t)\Big(\int_{-T}^{T}D^{\alpha\theta}W(t-\tau)u(x,\tau)\mathrm{d}\tau\Big)\mathrm{d}t\mathrm{d}x\\\leqslant&\|u\|_{L_T^{q'}L_x^{p'}}\cdot\Big\|\int_{-T}^{T}D^{\alpha\theta}W(t-\tau)\overline{u(x,t)}d\tau\Big\|_{L_T^qL_x^p}\leqslant\|u\|_{L_T^{q'}L_x^{p'}}^2.\end{aligned}$$

因此，

$$\left\| \int_{-T}^{T} D^{\frac{\theta\alpha}{2}} W(t) u(x,t) \mathrm{d}t \right\|_2 \leqslant C \| u \|_{L_T^{q'} L_x^{p'}}. \tag{2.9}$$

注意到

$$\int_{-T}^{T}\int_{-\infty}^{\infty} D^{\frac{\theta\alpha}{2}} W(t) f(x) u(x,t) \mathrm{d}x\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \left(\int_{-T}^{T} D^{\frac{\alpha\theta}{2}} W(t) u(x,t) \mathrm{d}t\right) \mathrm{d}x,$$

所以借助于对偶关系和 Hölder 不等式，从(2.9)式立得(2.8)式. ▌

推论 2.4 对任意固定的 $\delta>0$，存在仅依赖于 δ, β, γ 和 μ 的常数 $C>0$ 使对任意的 $f \in L^2(\boldsymbol{R})$和 $0<T\leqslant\delta$ 成立

$$\left\| \frac{\partial}{\partial x} W(t) f \right\|_{L_T^{\frac{14}{3}} L_x^{\infty}} \leqslant C \| f \|_2. \tag{2.10}$$

证 在(2.8)式中取 $\theta=1$ 和 $\alpha=2$ 得

$$\| D^1 W(t) f(x) \|_{L_T^{\frac{14}{3}} L_x^{\infty}} \leqslant C \| f \|_2.$$

因此从 Hilbert 变换是 $L^2(\boldsymbol{R})$上的酉算子得

$$\left\| \frac{\partial}{\partial x} W(t) f \right\|_{L_T^{\frac{14}{3}} L_x^{\infty}} = \| -D^1 W(t) Hf \|_{L_T^{\frac{14}{3}} L_x^{\infty}} \leqslant C \| Hf \|_2 = C \| f \|_2.$$ ▌

引理 2.5 设 $\mu\beta>0$，$\mu\gamma<0$,则存在仅依赖于 β, γ 和 μ 的常数 $C>0$ 使对任意的 $f \in L^2(\boldsymbol{R})$成立

$$\left\| \frac{\partial^3}{\partial x^3} W(t) f \right\|_{L_x^{\infty} L_t^2} \leqslant C \| f \|_2. \tag{2.11}$$

证 设 $f\in C_0^{\infty}(\boldsymbol{R})$，$g(x)=\dfrac{d^3 f}{dx^3}(x)$，则

$$\frac{\partial^3}{\partial x^3} W(t) f(x) = W(t) g(x),$$

其中 $p(\xi)=\mu\xi^7-\gamma\xi^5+\beta\xi^3$. 注意到 $\mu\beta>0$，$\mu\gamma<0$ 有

$$| p'(\xi) | = | \xi^2 (7\mu\xi^4 - 5\gamma\xi^2 + 3\beta) | \geqslant 7 | \mu | | \xi |^6,$$

所以应用[17, Theorem 4.1]得到

$$\begin{aligned}
&\sup_{x\in R}\left(\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\partial^3}{\partial x^3} W(t) f(x) \right|^2 \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \sup_{x\in R}\left(\int_{-\infty}^{\infty} | W(t) g(x) |^2 \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant C\left(\int_{-\infty}^{\infty} | \widetilde{g}(\xi) |^2 \, | p'(\xi) |^{-1} \mathrm{d}\xi\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leqslant C\left(\int_{-\infty}^{\infty} | \xi |^6 \, | \widetilde{f}(\xi) |^2 \, \xi^{-6} d\xi\right)^{\frac{1}{2}} = C \| \widetilde{f} \|^2 = C \| f \|_2,
\end{aligned}$$

其中 $\widetilde{g}$ 表示 g 的 Fourier 变换. 故当 $f\in C_0^{\infty}(\boldsymbol{R})$时(2.11)式成立. 再由 $C_0^{\infty}(\boldsymbol{R})$在 $L^2(\boldsymbol{R})$中的稠密性即得(2.11)式对任意的 $f\in L^2(\boldsymbol{R})$也成立. ▌

引理 2.6 设 $\mu\beta>0$，$\mu\gamma<0$,则存在仅依赖于 β, γ 和 μ 的常数 $C>0$ 使对任意的 $f\in \dot{H}^{\frac{1}{4}}(\boldsymbol{R})$成立

$$\| W(t) f \|_{L_x^4 L_t^{\infty}} \leqslant C \| D^{\frac{1}{4}} f \|_2. \tag{2.12}$$

证 设 $f\in C_0^{\infty}(\boldsymbol{R})$, $p(\xi)=\mu\xi^7-\gamma\xi^5+\beta\xi^3$，由 $\mu\beta>0$, $\mu\gamma<0$ 得 $\left|\dfrac{p'(\xi)}{p''(\xi)}\right|\leqslant C|\xi|$，$\forall\, \xi\in \boldsymbol{R}$. 所以应用 [17, Theorem 2.5]便得

$$\begin{aligned}
\| W(t) f \|_{L_x^4 L_t^{\infty}} &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} \sup_{t\in R} | W(t) f(x) |^4 \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{4}} \\
&\leqslant C\left(\int_{-\infty}^{\infty} | \widetilde{f}(\xi) |^2 \left| \frac{p'(\xi)}{p''(\xi)} \right|^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}\xi\right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

$$\leqslant C\left(\int_{-\infty}^{\infty}|\widetilde{f}(\xi)|^2|\xi|^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}\xi\right)^{\frac{1}{2}}=C\|D^{\frac{1}{4}}f\|_2.$$

故当 $f\in C_0^{\infty}(\boldsymbol{R})$ 时(2.12)式成立. 再由 $C_0^{\infty}(\boldsymbol{R})$ 在 $\dot{H}^{\frac{1}{4}}(\boldsymbol{R})$ 中的稠密性即得(2.12)式. ▌

引理 2.7 设 $\mu\beta>0$, $\mu\gamma<0$, $0\leqslant\theta\leqslant1$,则存在仅依赖于 β, γ, θ, μ 的常数 $C>0$ 使对任意的 $f\in L^2(\boldsymbol{R})$ 成立

$$\|D^{3-\frac{13}{4}\theta}W(t)f\|_{L_x^{p_\theta}L_t^{q_\theta}}\leqslant C\|f\|_2, \tag{2.13}$$

其中 $p_\theta=4/\theta$, $q_\theta=2/(1-\theta)$.

证 考虑解析算子簇(固定 $t>0$) $T_z=D^{-z/4}D^{3-3z}W(t)$, $z\in\boldsymbol{C}$, $0\leqslant\mathrm{Re}z\leqslant1$. 当 $z=\mathrm{i}b$ 时,由(2.11)式得

$$\|T_{\mathrm{i}b}f\|_{L_x^{\infty}L_t^2}=\|D^3W(t)D^{-\mathrm{i}\frac{13}{4}b}f\|_{L_x^{\infty}L_t^2}=\left\|\frac{\partial^3}{\partial x^3}W(t)D^{-\mathrm{i}\frac{13}{4}b}Hf\right\|_{L_x^{\infty}L_t^2}$$

$$\leqslant C\|Hf\|_2=C\|f\|_2, \tag{2.14}$$

其中 H 表示 Hilbert 变换(为 $L^2(\boldsymbol{R})$ 上的酉算子). 另一方面当 $z=1+\mathrm{i}b$ 时,由(2.12)式得

$$\|T_{1+\mathrm{i}b}f\|_{L_x^4L_t^{\infty}}=\|D^{-\frac{1}{4}}W(t)D^{-\mathrm{i}\frac{13}{4}b}f\|_{L_x^4L_t^{\infty}}\leqslant C\|f\|_2. \tag{2.15}$$

因此应用 Stein 插值定理[18]由(2.14)和(2.15)式得(2.13)式. ▌

推论 2.8 设 $\mu\beta>0$,$\mu\gamma<0$,则存在仅依赖于 β,γ,μ 的常数 $C>0$ 使对任意的 $f\in L^2(\boldsymbol{R})$ 和 $0<T\leqslant\delta$ 成立

$$\left\|\frac{\partial}{\partial x}W(t)f\right\|_{L_x^{\frac{13}{2}}L_t^{\frac{26}{5}}}\leqslant C\|f\|_2. \tag{2.16}$$

证 在(2.13)式中取 $\theta=\dfrac{8}{13}$ 便得(2.16)式. ▌

引理 2.9 设 $\delta>0$, $\mu\beta>0$, $\mu\gamma<0$, $0\leqslant\theta\leqslant1$,则存在仅依赖于 δ, θ,β, γ 和 μ 的常数 $C>0$ 使对任意的 $f\in L^2(\boldsymbol{R})$ 和 $0<T\leqslant\delta$ 成立

$$\|D^{-\frac{\theta}{4}}W(t)f\|_{L_x^{p_\theta}L_T^{q_\theta}}\leqslant C\|f\|_2, \tag{2.17}$$

其中 $p_\theta=4/(2-\theta)$, $q_\theta=2/(1-\theta)$.

证 考虑解析算子簇 $T_z=D^{-z/4}W(t)$, $z\in\boldsymbol{C}$, $0\leqslant\mathrm{Re}z\leqslant1$. 注意到 $W(t)$ 为 $L^2(\boldsymbol{R})$ 上的酉算子,对 $\forall f\in L^2(\boldsymbol{R})$, $T>0$ 有

$$\|W(t)f\|_{L_x^2L_T^2}=\|W(t)f\|_{L_T^2L_x^2}\leqslant\sqrt{2}\,T^{\frac{1}{2}}\|f\|_2. \tag{2.18}$$

因此当 $z=\mathrm{i}b$ 时,由(2.18)式得

$$\|T_{\mathrm{i}b}f\|_{L_x^2L_T^2}\leqslant C\|f\|_2. \tag{2.19}$$

另一方面当 $z=1+\mathrm{i}b$ 时,由(2.12)式得

$$\|T_{1+\mathrm{i}b}f\|_{L_x^4L_t^{\infty}}=\|D^{-\frac{1}{4}}W(t)D^{-\mathrm{i}\frac{b}{4}}f\|_{L_x^4L_t^{\infty}}\leqslant C\|f\|_2. \tag{2.20}$$

因此应用 Stein 插值定理[18]由(2.19),(2.20)式便得(2.17)式. ▌

推论 2.10 设 $\mu\beta>0$, $\mu\gamma<0$,$\delta>0$,则存在仅依赖于 β,γ,μ,$\delta>0$ 的常数 $C>0$ 使对任意的 $f\in L^2(\boldsymbol{R})$ 和 $0<T\leqslant\delta$ 成立

$$\|D^{-\frac{2}{13}}W(t)f\|_{L_x^{\frac{26}{9}}L_T^{\frac{26}{5}}}\leqslant C\|f\|_2. \tag{2.21}$$

证 在(2.17)式中取 $\theta=\dfrac{8}{13}$ 便得(2.16)式. ▌

3 定理 1.1 的证明

先限定 $0<T\leqslant 1$(即取第二节中出现的 $\delta=1$). 再设 $s\geqslant\frac{2}{13}$. 对这样给定的 s，$T>0$ 和 $\boldsymbol{R}\times[-T, T]$ 上的二元函数 $\omega(x,t):\boldsymbol{R}\times[-T, T]\to\boldsymbol{R}$，定义模函数

$$\Lambda_1{}^T(\omega)=\|D^{s+3}\omega\|_{L_x^\infty L_T^2}=\sup_{x\in R}(\int_{-T}^{T}|D^{s+3}\omega(x,t)|^2\mathrm{d}t)^{\frac{1}{2}},\tag{3.1}$$

$$\Lambda_2^T(\omega)=\|\frac{\partial\omega}{\partial x}\|_{L_T^4L_x^\infty}=(\int_{-T}^{T}\|\frac{\partial\omega}{\partial x}(\cdot,t)\|_\infty^4\mathrm{d}t)^{\frac{1}{4}},\tag{3.2}$$

$$\Lambda_3^T(\omega)=\|D^s\frac{\partial\omega}{\partial x}\|_{L_x^{\frac{13}{2}}L_T^{\frac{26}{5}}}=(\int_{-\infty}^{\infty}(\int_{-T}^{T}|D^s\frac{\partial\omega}{\partial x}(x,t)|^{\frac{26}{5}}\mathrm{d}t)^{\frac{5}{4}}\mathrm{d}x)^{\frac{2}{13}},\tag{3.3}$$

$$\Lambda_4^T(\omega)=\|\omega\|_{L_x^{\frac{26}{9}}L_T^{\frac{13}{4}}}=(\int_{-\infty}^{\infty}(\int_{-T}^{T}|\omega(x,t)|^{\frac{13}{4}}\mathrm{d}t)^{\frac{8}{9}}\mathrm{d}x)^{\frac{9}{26}},\tag{3.4}$$

$$\Lambda_5^T(\omega)=\sup_{-T\leqslant t\leqslant T}\|\omega(\cdot,t)\|_{s,2},\tag{3.5}$$

$$\Lambda^T(\omega)=\max_{1\leqslant j\leqslant 5}\{\Lambda_j{}^T(\omega)\}.\tag{3.6}$$

令 X_T 为下列函数空间($s\geqslant\frac{2}{13}$)

$$X_T=\{\omega\in C([-T,T];H^s(\boldsymbol{R})),\ \Lambda^T(\omega)<\infty\},$$

其上的范数就取为 $\Lambda^T(\cdot)$. 易见 X_T是 Banach 空间. 对任意的 $M>0$,用 $X_{T,d}$表示 X_T 中半径为 $d>0$ 的闭球

$$X_{T,d}=\{\omega\in X_T:\Lambda^T(\omega)\leqslant d\}.$$

易知初值问题(1.1)－(1.2)等价于下列积分方程

$$u(\cdot,t)=W(t)u_0+a\int_0^t W(t-\tau)(u\frac{\partial u}{\partial x})(\cdot,\tau)\mathrm{d}\tau.\tag{3.7}$$

对给定的初值 $u_0\in H^s(\boldsymbol{R})$($s\geqslant\frac{2}{13}$)，定义映射 ψ: $u\to\psi(u)$

$$\psi(u)(\cdot,t)=W(t)u_0+a\int_0^t W(t-\tau)(u\frac{\partial u}{\partial x})(\cdot,\tau)\mathrm{d}\tau,\quad\forall u\in X_T.$$

我们将证明这一定义合理(即右端的运算有意义)，且 ψ 映 X_T到自身,并且当取 d 充分大(依赖于 $\|u_0\|_{s,2}$)，T 充分小(依赖于$\|u_0\|_{s,2}$和 d)时，ψ 是 $X_{T,d}$到自身的压缩映射. 为此,先建立下列引理.

引理 3.1 设 $s\geqslant\frac{2}{13}$，$0<T\leqslant 1$，$u_0\in H^s(\boldsymbol{R})$，$v\in L^1([-T,T];H^s(\boldsymbol{R}))$，令 $\mu\beta>0$,$\mu\gamma<0$，$a\in\boldsymbol{R}$,$a\neq 0$,及

$$w(\cdot,t)=W(t)u_0+a\int_0^t W(t-\tau)v(\cdot,\tau)\mathrm{d}\tau\quad(|t|\leqslant T).$$

则 $w\in X_T$且存在仅与 s，β，γ，a 有关的常数 $C>0$ 使成立

$$\Lambda(w)\leqslant C(\|u_0\|_{s,2}+\int_{-T}^{T}\|v(\cdot,t)\|_{s,2}\mathrm{d}t).\tag{3.8}$$

证 易见 $w\in C([-T, T];H^s(\boldsymbol{R})$,首先由(2.11)式得

$$\|D^{s+3}w\|_{L_x^\infty L_T^2}\leqslant\|\frac{\partial^3}{\partial x^3}W(t)D^s u_0\|_{L_x^\infty L_T^2}$$

$$+|a|\sup_{x\in R}(\int_0^T|\int_0^t\frac{\partial^3}{\partial x^3}W(t-\tau)D^s v(\cdot,\tau)\mathrm{d}\tau|^2\mathrm{d}t)^{\frac{1}{2}}$$

$$+|a|\sup_{x\in R}(\int_{-T}^0|\int_0^t\frac{\partial^3}{\partial x^3}W(t-\tau)D^s u^2 v(\cdot,\tau)\mathrm{d}\tau|^2\mathrm{d}t)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant C\|D^s u_0\|_2+|a|\int_0^T\sup_{x\in R}(\int_\tau^T|\frac{\partial^3}{\partial x^3}W(t-\tau)D^s v(\cdot,\tau)|^2\mathrm{d}t)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}\tau$$

$$+|a|\int_{-T}^0\sup_{x\in R}(\int_{-T}^\tau|\frac{\partial^3}{\partial x^3}W(t-\tau)D^s v(\cdot,\tau)|^2\mathrm{d}t)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}\tau. \tag{3.9}$$

做变换 $t'=t-\tau$ 并注意到 $T-\tau\leqslant T$(当 $\tau\in[0,T]$)，由估计式(2.11)可知

$$\sup_{x\in R}(\int_\tau^T|\frac{\partial^3}{\partial x^3}W(t-\tau)D^s v(\cdot,\tau)|^2\mathrm{d}t)^{\frac{1}{2}}\leqslant\sup_{x\in R}(\int_0^T|\frac{\partial^3}{\partial x^3}W(t')D^s v(\cdot,\tau)|^2\mathrm{d}t')^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant C\|D^s v(\cdot,\tau)\|_2=C\|v(\cdot,\tau)\|_{s,2}.$$

对(3.9)式中第三项类似处理，最后得到

$$\|D^{s+3}w\|_{L_x^\infty L_T^2}\leqslant C\|u_0\|_{s,2}+C\int_{-T}^T\|v(\cdot,\tau)\|_{s,2}\mathrm{d}\tau.$$

因此(3.8)式对 Λ_1^T 成立. 其次由

$$\|\frac{\partial w}{\partial x}\|_{L_T^4L_x^\infty}\leqslant\|\frac{\partial w}{\partial x}\|_{L_T^{\frac{14}{3}}L_x^\infty},\quad \|w\|_{L_x^{\frac{26}{9}}L_T^{\frac{13}{4}}}\leqslant\|w\|_{L_x^{\frac{26}{9}}L_T^{\frac{26}{5}}},$$

所以由(2.10)式、(2.16)式、(2.21)式，并注意到$\{W(t)\}_{t\in R}$为 $L^2(\mathbf{R})$上的酉算子及 $\|w(\cdot,t)\|_{s,2}=\|J^s w(\cdot,t)\|_2$，分别对 Λ_2^T、Λ_3^T、Λ_4^T 进行上述类似的处理便得(3.18)式对 Λ^T 成立. ▌

引理 3.2 设 $s\geqslant\frac{2}{13}$, $0<T\leqslant 1$, $u\in X_T$, 则 $u\frac{\partial u}{\partial x}\in L^2([-T,T];H^s(\mathbf{R}))$, 且

$$(\int_{-T}^T\|(u\frac{\partial u}{\partial x})(\cdot,t)\|_{s,2}{}^2\mathrm{d}t)^{\frac{1}{2}}\leqslant C(\Lambda^T(u))^2. \tag{3.10}$$

证 只须证明

$$\|u\frac{\partial u}{\partial x}\|_{L_T^2L_x^2}\leqslant C(\Lambda^T(u))^2, \tag{3.11}$$

$$\|D^s(u\frac{\partial u}{\partial x})\|_{L_T^2L_x^2}\leqslant C(\Lambda^T(u))^2. \tag{3.12}$$

事实上

$$\|u\frac{\partial u}{\partial x}\|_{L_T^2L_x^2}=(\int_{-T}^T\int_{-\infty}^\infty|u(x,t)|^2|\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant(\int_{-T}^T\|u(\cdot,t)\|_2^2\|\frac{\partial u}{\partial x}(\cdot,t)\|_\infty^2\mathrm{d}t)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant\sup_{-T\leqslant t\leqslant T}\|u(\cdot,t)\|_2T^{\frac{1}{4}}(\int_{-T}^T\|\frac{\partial u}{\partial x}(\cdot,t)\|_\infty^4\mathrm{d}t)^{\frac{1}{4}}$$

$$\leqslant T^{\frac{1}{4}}\Lambda_5^T(u)\Lambda_2^T(u)\leqslant(\Lambda^T(u))^2.$$

所以(3.11)式成立. 由分数阶求导的 Leibniz 法则(见[18, A. 8],取 $f=u$, $g=\frac{\partial u}{\partial x}$, $\alpha=\alpha_1=s$, $p=q=2$, $p_2=13/2$, $q_2=26/5$)得

$$\|D^s(u\frac{\partial u}{\partial x})\|_{L_T^2L_x^2}=\|D^s(u\frac{\partial u}{\partial x})\|_{L_x^2L_T^2}$$

$$\leqslant C(\int_{-T}^T\|D^s u(\cdot,t)\|_2^2\|\frac{\partial u}{\partial x}(\cdot,t)\|_\infty^2\mathrm{d}t)^{\frac{1}{2}}$$

$$
\begin{aligned}
&+C\|u\|_{L_x^{\frac{26}{9}}L_T^{\frac{13}{4}}}\|D^s\frac{\partial u}{\partial x}\|_{L_x^{\frac{13}{2}}L_T^{\frac{26}{5}}}\\
\leqslant&\sup_{-T\leqslant t\leqslant T}\|D^s u(\cdot,t)\|_2 T^{\frac{1}{4}}(\int_{-T}^{T}\|\frac{\partial u}{\partial x}(\cdot,t)\|_\infty{}^4\mathrm{d}t)^{\frac{1}{4}}+C\Lambda_3^T(u)\Lambda_4^T(u)\\
=&C\Lambda_5^T(u)\Lambda_2^T(u)+C\Lambda_3^T(u)\Lambda_4^T(u)\leqslant C(\Lambda^T(u))^2.
\end{aligned}
$$

即(3.12)式成立.

因为 $L^2([-T,T];H^s(\boldsymbol{R}))\subseteq L^1([-T,T];H^s(\boldsymbol{R}))$ 且

$$
\int_{-T}^{T}\|v(\cdot,t)\|_{s,2}\mathrm{d}t\leqslant T^{\frac{1}{2}}(\int_{-T}^{T}\|v(\cdot,t)\|_{s,2}{}^2\mathrm{d}t)^{\frac{1}{2}},
$$

所以得 ψ 映 X_T 到自身并且

$$
\Lambda^T(\psi(u))\leqslant C(\|u_0\|_{s,2}+CT^{\frac{1}{2}}(\Lambda^T(u))^2),\quad\forall u\in X_T. \tag{3.13}
$$

取 $d>0$ 足够大满足 $C\|u_0\|_{s,2}+1\leqslant d$,其中 $C>0$ 为出现于(3.13)式中的正常数. 再取 $T_0>0$ 充分小使当 $0<T\leqslant T_0$ 时成立

$$
CT^{\frac{1}{2}}d^2\leqslant 1, \tag{3.14}
$$

其中 $C>0$ 也是出现于(3.13)式中的正常数. 则由(3.13)和(3.14)式得:ψ: $X_{T,d}\to X_{T,d}$. ▌

引理 3.3 必要时适当缩小 T_0，则当 $0<T\leqslant T_0$时，ψ 为 $X_{T,d}$ 到 $X_{T,d}$ 的压缩映射.

证 类似于(3.13)式的推理，我们可以得到

$$
\Lambda^T(\psi(u)-\psi(v))\leqslant C\,T^{\frac{1}{2}}(\Lambda^T(u)+\Lambda^T(v))\Lambda^T(u-v),\quad\forall u,v\in X_{T,M}. \tag{3.15}
$$

取 $T_0>0$ 充分小使 $T(0<T\leqslant T_0)$满足(3.14)式的同时也满足 $\nu\equiv 2CT^{\frac{1}{2}}d<1$,其中 $C>0$ 为(3.15)式中出现的常数. 故由(3.15)式得 ψ: $X_{T,d}\to X_{T,d}$ 且

$$
\Lambda^T(\psi(u)-\psi(v))\leqslant\nu\Lambda^T(u-v),\quad\forall u,v\in X_{T,d}.
$$
▌

据引理 3.3 和压缩映射原理，我们得到存在唯一的 $u\in X_{T,d}$ 使得 $\psi(u)\equiv u$，即

$$
u(\cdot,t)=W(t)u_0+a\int_0^t W(t-\tau)(u\frac{\partial u}{\partial x})(\cdot,\tau)\mathrm{d}\tau.
$$

也就是说，u 是初值问题(1.1)－(1.2)满足条件(1.5)－(1.8)的唯一解。

参 考 文 献

[1] Jones K L, He X, Chen Y. Existence of periodic traveling wave solution to the forced generalized nearly concentric Korteweg-de Vries equation. Internat J Math & Math Sci, 2000, **24**(6):371－377

[2] Constantin P, Saut J C. Local smoothing properties of dispersive equations. Journal Amer Math Soc,1988,**1**:413－446

[3] Korteweg J D, de Vries G. On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal and on anew type of long stationary waves. Philos Mag, 1895, **39**(5): 422－443

[4] Kawahara T. Oscillatory solitary waves in dispersive media. J Phys Soc Japan, 1972, **33**(1): 260－264

[5] Grimshaw R, Joshi N. Weakly nonlocal waves in a singularly perturbed Korteweg-de Vries equation. SIAM J Appl Math, 1995, **55**(1):124－135

[6] Kenig C E, Ponce G, Vega L. On the(generalized)Korteweg-de Vries equation. Duke Math J, 1989, **59**:585－610

[7] Kenig C E, Ponce G, Vega L. Well-posedness and scatering results for the generalized Korteweg-de Vries equation via the contraction principle. Comm on Pure and Appl Math, 1993, **46**:527－620

[8] Tao Shuangping, Cui Shangbin. Existence and uniqueness of solutions to nonlinear Kawahara equations. Chin Ann of Math, 2002, **23**A(2):221－228

[9] Tao Shuangping, Cui Shangbin. Local and global existence of solutions to initial value problems of modified nonlinear Kawahara equations. Acta Mathematica Sinica, English Sries, 2003, **19**(4)

[10] Tao Shuangping. Initial value problems for some classes of higher order nonlinear dispersive equations. A doctoral dissertation, Lanzhou University, 2001.

[11] Stein E M. Singular Interals and Differentiablity Properties of Functions. Princeton: Princeton University Press, 1970

[12] Ben-Artzi M, Saut J C. Uniform decay estimates for a class of oscillatory interals and applications. Differ and Integ Equations, 1999, **12**:137—145

[13] Stein E M, Weiss G. Introduction to Fourier Analysis in Euclidean Spaces. Princeton: Princeton University Press, 1971

[14] Cui Shangbin. Local and global existence of solutions to semilinear parabolic initial value problems. Nonlinear Anal, 2001, **43**:293—323

[15] Hörmander L. Analysis of Linear Partial Differential Operators. New York: Springer-Verlag, 1983

[16] Tomas P. A restriction theorem for the Fourier transform. Bull A M S, 1975, **81**:477—478

[17] Kenig C E, Ponce G, Vega L. Oscillatory integrals and regularity of dispersive equations. Indiana Univ Math J, 1991, **40**(1): 33—69

[18] Stein E M. Interplation of linear operators. Trans Amer Math, 1956, **83**:482—492

The Initial Value Problem of the Seventh Order Weakly Dispersive Equations

Tao Shuangping

(*Department of Mathematics*, *Northwest Normal University*, *Lanzhou* 730070)

(*Department of Mathematics*, *Beijing Normal University*, *Beijing* 100875)

Cui Shangbin

(*Department of Mathematics*, *Zhongshan University*, *Guangzhou* 510275)

Abstract: This paper is devoted to studying the initial value problem of a class of seventh order weakly nonlinear dispersive equations $\frac{\partial u}{\partial t}+au\frac{\partial u}{\partial x}+\beta\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}+\gamma\frac{\partial^5 u}{\partial x^5}+\mu\frac{\partial^7 u}{\partial x^7}=0$, $(x,t)\in \boldsymbol{R}^2$. By using recently established decay estimates for oscillatory integrals, the authors first establish several Strichartz type estimates for the fundamental solution of the corresponding linear problem. Then the authors prove that a local solution exists if the initial function $u_0(x)\in H^s(R)$ and $s\geqslant 2/13$, and a global solution exists if $s\geqslant 1$.

Key words: Dispersive Equation; Initial Value Problem; Solution; Local existence; Global existence.

MR(2000)Subject Classification: 35Q30; 35G25; 42B25