2005,**25A**(2):256－263

Acta Mathematica Scientia 数学物理学报

单纯形上 Meyer-König and Zeller 算子的二阶矩量*

张春苟

(首都师范大学数学系　北京 100037)

摘要：该文讨论了单纯形上 Meyer-König and Zeller 算子的矩量问题. 首先得到了二阶矩量在广义积分下的显式表示,并由此导出了二阶矩量的二元 Appell 超几何函数表示,超几何级数表示和完全渐近公式.

关键词:单纯形;Meyer-König and Zeller 算子;Appell 超几何函数;超几何级数;完全渐近公式.

MR(2000)主题分类:33C; 41A　　**中图分类号**:O174　　**文献标识码**:A

文章编号:1003-3998(2005)02-256-08

1　引言

正线性算子的矩量,尤其是二阶矩量能很好地反映出算子的一些逼近性质,是很有意义的研究课题. 也有了不少结果,但绝大多数是关于一元情形的. 1984 年,Alkemade[1] 中利用超几何级数导出了 Meyer-Königand Zeller 算子二阶矩量的显式表示. 后来,被 Abel 推广到了任意阶[2]. Meyer-König and Zeller 算子被 Cheney 和 Sharma[3] 稍作修正为

$$\begin{aligned} &M_n(f,x)=\sum_{k=0}^{\infty}f\left(\frac{k}{n+k}\right)m_{n,k}(x)\quad (x\in[0,1)),\\ &M_n(f,1)=f(1), \end{aligned}\tag{1}$$

这里 $$m_{n,k}(x)=\frac{(n+k)!}{k!n!}x^k(1-x)^{n+1}\qquad (n\in N,\ k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots).$$

我们用 e^r 表示函数 $x\to x^r(r=0,1,2,\cdots)$, 则由文[1]可知当 $r=0,1$ 时, 有 $M_n(e^r,x)=x^r$;而当 $r=2$ 时,有

$$M_n(e^2,x)=x^2+\frac{x(1-x)^2}{n+1}\,{}_2F_1(1,2;n+2;x),\tag{2}$$

这里 ${}_2F_1(1,2;n+2;x)$ $(x\in[0,1),\ n\in N)$是超几何级数简记为 $F(1,2;n+2;x)$.

1996 年,文献[4]将该算子推广到单纯形 $\triangle:=\{(x,y)\,|\,x,y\geqslant 0;x+y\leqslant 1\}$上,定义如下

$$\begin{aligned} M_n(f;x,y)&=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}f\left(\frac{k}{n+k+l},\frac{l}{n+k+l}\right)m_{nkl}(x,y),\ x+y\neq 1,\\ M_n(f;x,y)&=f(x,y),\qquad x+y=1, \end{aligned}\tag{3}$$

收稿日期:2003-03-13;修订日期:2003-10-29

E-mail:zhangcg@mail.cnu.edu.cn

* 基金项目:北京市教委资助项目和国家自然科学基金(10371080)资助

这里
$$m_{nkl}(x,y)=\frac{(n+k+l)!}{n!k!l!}x^k y^l(1-x-y)^{n+1}.$$

文献[4]以及[5]利用二阶矩量的估计讨论了算子的一些基本的逼近性质. 记 $e_1^r:(x,y)\to x^r$, $e_2^r:(x,y)\to y^r(r=0,1,2)$, $e_3^2:(x,y)\to xy$,则有(也可参见文[4]和[5])

$$M_n(e_k^r;x,y)=e_k^r\quad(k=1,2;\ r=0,1),\tag{4}$$

$$M_n(e_2^2;0,y)=M_n(e^2,y),\tag{5}$$

$$M_n(e_1^2;x,0)=M_n(e^2,x),\tag{6}$$

$$M_n(f;x,y)=\sum_{k=0}^{\infty}m_{n,k}(\frac{x}{1-y})\sum_{l=0}^{\infty}f(\frac{k}{n+k+l},\frac{l}{n+k+l})m_{n+k,l}(y),\tag{7}$$

$$M_n(f;x,y)=\sum_{l=0}^{\infty}m_{n,l}(\frac{y}{1-x})\sum_{k=0}^{\infty}f(\frac{k}{n+k+l},\frac{l}{n+k+l})m_{n+l,k}(x).\tag{8}$$

本文的目的是导出单纯形上 Meyer-König and Zeller 算子二阶矩量的显式表示. 由于 Alkemade 和 Abel 的方法在这里都难以奏效,只好另辟蹊径. 很幸运,我们利用算子的分解技巧,首先得到了二阶矩量的积分表示,然后由此导出了二阶矩量的二元 Appell 超几何函数表示,超几何级数表示和完全渐近公式.

2　积分表示

由(2)式、(7)式和(8)式, 我们有

$$\begin{aligned}M_n(e_1^2;x,y)&=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}(\frac{k}{n+k+l})^2\ m_{nkl}(x,y)\\&=\sum_{l=0}^{\infty}m_{n,l}(\frac{y}{1-x})\sum_{k=0}^{\infty}(\frac{k}{n+k+l})^2m_{n+l,k}(x)=\sum_{l=0}^{\infty}m_{n,l}(\frac{y}{1-x})M_{n+l}(e^2;x)\\&=x^2+x(1-x)^2\sum_{l=0}^{\infty}m_{n,l}(\frac{y}{1-x})\ \frac{1}{n+l+1}F(1,2;n+l+2;x),\end{aligned}$$

这里超几何级数

$$F(\alpha,\beta;\gamma;x)=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_j(\beta)_j}{(\gamma)_j j!}x^j,$$

$$(a)_0=1,\quad(a)_j=\prod_{i=0}^{j-1}(a+i)\quad(j\in N,a\in R).$$

我们还要以下的欧拉积分

$$\Gamma(z)=\int_0^{\infty}e^{-t}t^{z-1}dt\quad(\mathrm{Re}(z)>0)$$

且
$$\Gamma(n+1)=n!\ n\in N.$$

$$B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx\quad(\mathrm{Re}(p)>0,\ \mathrm{Re}(q)>0))$$

且
$$B(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

这样,我们可得

$$M_n(e_1^2;x,y)-x^2=x(1-x)^2\sum_{l=0}^{\infty}m_{n,l}(\frac{y}{1-x})\ \frac{1}{n+l+1}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(1)_j(2)_j}{(n+l+2)_j}\frac{x^j}{j!}$$

$$=x(1-x)^2\sum_{l=0}^{\infty}m_{n,l}(\frac{y}{1-x})\sum_{j=1}^{\infty}\frac{j!}{(n+l+1)_j}x^{j-1}$$

$$=x(1-x)^2\sum_{l=0}^{\infty}(n+l)m_{n,l}(\frac{y}{1-x})\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\Gamma(j+1)\Gamma(n+l)}{\Gamma(n+l+j+1)}x^{j-1}$$

$$=x(1-x)^2\sum_{l=0}^{\infty}(n+l)m_{n,l}(\frac{y}{1-x})\sum_{j=1}^{\infty}B(n+l,j+1)x^{j-1}$$

$$=x(1-x)^2\int_0^1\sum_{j=1}^{\infty}(1-t)^jx^{j-1}[\sum_{l=0}^{\infty}(n+l+1)m_{n,l}(\frac{y}{1-x})t^{n+l-1}$$

$$-\sum_{l=0}^{\infty}m_{n,l}(\frac{y}{1-x})t^{n+l-1}]\mathrm{d}t$$

$$=x(1-x)^2\int_0^1\sum_{j=1}^{\infty}(1-t)^jx^{j-1}(1-\frac{y}{1-x})^{n+1}t^{n-1}\cdot[\sum_{l=0}^{\infty}m_{n+1,l}(\frac{ty}{1-x})$$

$$\cdot(1-\frac{yt}{1-x})^{-(n+2)}(n+1)-\sum_{l=0}^{\infty}m_{n,l}(\frac{ty}{1-x})\ (1-\frac{yt}{1-x})^{-(n+1)}]\mathrm{d}t$$

$$=x(1-x)^2\int_0^1\sum_{j=1}^{\infty}(1-t)^jx^{j-1}(1-\frac{y}{1-x})^{n+1}t^{n-1}$$

$$\cdot(1-\frac{yt}{1-x})^{-(n+2)}[(n+1)-(1-\frac{yt}{1-x})]\mathrm{d}t$$

$$=x(1-x)^2\int_0^1(1-\frac{y}{1-x})^{n+1}t^{n-1}\cdot(1-\frac{yt}{1-x})^{-(n+2)}$$

$$\cdot(n+\frac{yt}{1-x})\ \frac{(1-t)}{(1-x+tx)}\mathrm{d}t$$

$$=x(1-x)^2(1-x-y)^{n+1}\int_0^1\frac{1-t}{1-x+xt}\mathrm{d}\,\frac{t^n}{(1-x-yt)^{n+1}}.$$

再由分步积分和变量替换 $s=1-t$，便可得

$$M_n(e_1^2;x,y)-x^2=x(1-x)^2\int_0^1(1-s)^n(1+\frac{y}{1-x-y}s)^{-(n+1)}(1-xs)^{-2}\mathrm{d}s.$$

由对称性，有

$$M_n(e_2^2;\ x,y)-y^2=y(1-y)^2\int_0^1(1-s)^n(1+\frac{x}{1-x-y}s)^{-(n+1)}(1-ys)^{-2}\mathrm{d}s.$$

至于 $M_n(e_3^2;x,y)$，我们注意到

$$M_n(e_3^2;x,y)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{kl}{(n+k+l)^2}m_{nkl}(x,y)$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k}{n+k}m_{n,k}(\frac{x}{1-y})\sum_{l=0}^{\infty}(1-\frac{l}{n+k+l})\ \frac{l}{n+k+l}m_{n+k,l}(y)$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k}{n+k}m_{n,k}(\frac{x}{1-y})[M_{n+k}(e^1;y)-M_{n+k}(e^2;y)]$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k}{n+k}m_{n,k}(\frac{x}{1-y})[y-y^2-\frac{y(1-y)^2}{n+k+1}F(1,2;n+k+2;y)].$$

因此

$$M_n(e_3^2;x,y)-xy=-y(1-y)^2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k}{(n+k+1)(n+k)}m_{n,k}(\frac{x}{1-y})F(1,2;n+k+2;y).$$

类似 $M_n(e_1^2;x,y)$ 的处理,只是稍有不同,我们有

$$M_n(e_3^2;x,y)-xy=-xy(1-y)\int_0^1(1-s)^{(n+1)}(1+\frac{x}{1-x-y}s)^{-(n+1)}(1-ys)^{-2}\mathrm{d}s.$$

这样,我们便得到了算子二阶矩量的积分表示如下

定理 1　对任意的 $n\in N$ 和 $(x,y)\in\triangle\backslash\{x+y=1\}$,有

$$M_n(e_1^2;x,y)-x^2=x(1-x)^2\int_0^1(1-s)^n(1+\frac{y}{1-x-y}s)^{-(n+1)}(1-xs)^{-2}\mathrm{d}s, \tag{9}$$

$$M_n(e_1^2;x,y)-y^2=y(1-y)^2\int_0^1(1-s)^n(1+\frac{x}{1-x-y}s)^{-(n+1)}(1-ys)^{-2}\mathrm{d}s, \tag{10}$$

$$M_n(e_3^2;x,y)-xy=-xy(1-y)\int_0^1(1-s)^{(n+1)}(1+\frac{x}{1-x-y}s)^{-(n+1)}(1-ys)^{-2}\mathrm{d}s, \tag{11}$$

$$M_n(e_3^2;x,y)-xy=-xy(1-x)\int_0^1(1-s)^{(n+1)}(1+\frac{y}{1-x-y}s)^{-(n+1)}(1-xs)^{-2}\mathrm{d}s. \tag{12}$$

3　其它形式的表示

由于(见文[6]p. 191)

$$\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}{\Gamma(\gamma)}F_1(\alpha;\beta,\beta';\gamma;x,y)=\int_0^1 s^{\alpha-1}(1-s)^{\gamma-\alpha-1}(1-sx)^{-\beta}(1-sy)^{-\beta'}\mathrm{d}s.$$

二元 Appell 超几何函数 $F_1(\alpha;\beta,\beta';\gamma;x,y)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_{k+l}(\beta)_k(\beta')_l}{(\gamma)_{k+l}k!l!}x^ky^l$,由定理 1 得

$$M_n(e_1^2;x,y)-x^2=\frac{x(1-x)^2}{n+1}F_1(1;2,n+1;n+2;x,-\frac{y}{1-x-y}).$$

再由 F_1 的其它等式(见文[6] p. 192),我们就能得到

$$M_n(e_1^2;x,y)-x^2=\frac{x(1-x)(1-x-y)}{n+1}F_1(1;2,-1;n+2;x+y,\frac{y}{1-x}), \tag{13}$$

$$M_n(e_1^2;x,y)-x^2=\frac{x(1-x-y)^{n+1}}{n+1}F_1(n+1;-1,n+1;n+2;x,x+y). \tag{14}$$

由对称性得

$$M_n(e_2^2;x,y)-y^2=\frac{y(1-y)(1-x-y)}{n+1}F_1(1;2,-1;n+2;\frac{x}{1-y},x+y), \tag{15}$$

$$M_n(e_2^2;x,y)-y^2=\frac{y(1-x-y)^{n+1}}{n+1}F_1(n+1;n+1,-1;n+2;x+y,y). \tag{16}$$

关于 $M_n(e_3^2;x,y)$,我们也容易得到

$$M_n(e_3^2;x,y)-xy=-\frac{xy(1-y)}{n+2}F_1(1;n+1,2;n+3;-\frac{x}{1-x-y},y), \tag{17}$$

$$M_n(e_3^2;x,y)-xy=-\frac{xy(1-x)}{n+2}F_1(1;2,n+1;n+3;x,-\frac{y}{1-x-y}). \tag{18}$$

由于在 $\gamma=\beta+\beta'$ 时,二元 Appell 超几何函数退化为超几何级数(见文[6] p. 194)

$$F_1(\alpha;\beta,\beta';\gamma;x,y)=(1-y)^{-\alpha}F(\alpha,\beta;\gamma;\frac{y-x}{y-1}),$$

因此,我们有　$M_n(e_3^2;x,y)-xy=-\frac{xy(1-x-y)}{n+2}F(1,2;n+3;x+y).$

同理 $M_n(e_1^2;x,y)-x^2$ 和 $M_n(e_2^2;x,y)-y^2$ 也可用超几何级数表示,我们注意到

$$F_1(1;2,-1;n+2;x+y,\frac{y}{1-x})=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(1)_{k+l}(2)_k(-1)_l}{(n+2)_{k+l}k!l!}(x+y)^k(\frac{y}{1-x})^l,$$

上式右边的和式中只有当 $l=0$，1 时，不为零. 所以有

$$\begin{aligned}&F_1(1;\ 2,\ -1;\ n+2;\ x+y,\ \frac{y}{1-x})\\&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(1)_k(2)_k}{(n+2)_k k!}(x+y)^k-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(1)_{k+1}(2)_k}{(n+2)_{k+1}k!}(x+y)^k\frac{y}{1-x}\\&=F(1,2;n+2;x+y)-\frac{y}{(n+2)(1-x)}F(2,2;n+3;x+y).\end{aligned}$$

再由(13)式，即可得

$$\begin{aligned}M_n(e_1^2;x,y)-x^2=&-\frac{xy(1-x-y)}{(n+2)(n+1)}F(2,2;n+3;x+y)\\&+\frac{x(1-x)(1-x-y)}{n+1}F(1,2;n+2;x+y).\end{aligned}$$

由(14)式，我们完全类似地有

$$\begin{aligned}M_n(e_1^2;x,y)-x^2=&-\frac{x^2(1-x-y)}{n+2}F(1,2;n+3;x+y)\\&+\frac{x(1-x-y)}{n+1}F(1,1;n+2;x+y).\end{aligned}$$

这样，我们便得到了算子二阶矩量的超几何级数表示.

定理 2 对任意的 $n\in N$ 和 $(x,y)\in\triangle\backslash\{x+y=1\}$，有

$$\begin{aligned}M_n(e_1^2;x,y)-x^2=&-\frac{xy(1-x-y)}{(n+2)(n+1)}F(2,2;n+3;x+y)\\&+\frac{x(1-x)(1-x-y)}{n+1}F(1,2;n+2;x+y).\end{aligned}\tag{19}$$

$$\begin{aligned}M_n(e_1^2;x,y)-x^2=&-\frac{x^2(1-x-y)}{n+2}F(1,2;n+3;x+y)\\&+\frac{x(1-x-y)}{n+1}F(1,1;n+2;x+y).\end{aligned}\tag{20}$$

$$\begin{aligned}M_n(e_2^2;x,y)-y^2=&-\frac{yx(1-x-y)}{(n+2)(n+1)}F(2,2;n+3;x+y)\\&+\frac{y(1-y)(1-x-y)}{n+1}F(1,2;n+2;x+y).\end{aligned}\tag{21}$$

$$\begin{aligned}M_n(e_2^2;x,y)-y^2=&-\frac{y^2(1-x-y)}{n+2}F(1,2;n+3;x+y)\\&+\frac{y(1-x-y)}{n+1}F(1,1;n+2;x+y).\end{aligned}\tag{22}$$

$$M_n(e_3^2;x,y)-xy=-\frac{xy(1-x-y)}{n+2}F(1,2;n+3;x+y).\tag{23}$$

注 1 在(19)式中令 $y=0$，我们即得

$$M_n(e^2;x)-x^2=M_n(e_1^2;x,0)-x^2=\frac{x(1-x)^2}{n+1}F(1,2;n+2;x),$$

这也可由(20)式导出，只是稍复杂些. 它正好就是文[1]中的定理 2.

注 2 受(20)式，(22)式和(23)式的启发，我们发现它们也可直接导出. 事实上，由二

元 Appell 超几何函数以及如下恒等式

$$m_{nkl}(x,y)=\frac{(n+1)_{k+l}}{k!l!}x^k y^l(1-x-y)^{n+1},\quad \frac{1}{n+k+l}=\frac{(n-1)!(n)_{n+k}}{n!(n+1)_{n+k}},$$

$$F(\alpha,\beta;\gamma;x)=(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}F(\gamma-\alpha,\gamma-\beta;\gamma;x),$$

我们有

$$\begin{aligned}
M_n(e_1^2;x,y)&=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{k}{n+k+l}\right)^2 m_{nkl}(x,y)=x\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{k+1}{n+k+l+1}m_{nkl}(x,y)\\
&=x\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{k}{n+k+l+1}m_{nkl}(x,y)+x\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{n+k+l+1}m_{nkl}(x,y)\\
&=x^2\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{n+k+l+1}{n+k+l+2}m_{nkl}(x,y)+x\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{n+k+l+1}m_{nkl}(x,y)\\
&=x^2-x^2\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{n+k+l+2}m_{nkl}(x,y)+x\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{n+k+l+1}m_{nkl}(x,y)\\
&=x^2-\frac{x^2(1-x-y)^{n+1}}{n+2}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(n+2)_{k+l}(n+1)_{k+l}}{(n+3)_{k+l}k!l!}x^k y^l\\
&\quad+\frac{x(1-x-y)^{n+1}}{n+1}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(n+1)_{k+l}(n+1)_{k+l}}{(n+2)_{k+l}k!l!}x^k y^l\\
&=x^2-\frac{x^2(1-x-y)^{n+1}}{n+2}F(n+1,n+2;n+3;x+y)\\
&\quad+\frac{x(1-x-y)^{n+1}}{n+1}F(n+1,n+1;n+2;x+y)\\
&=x^2-\frac{x^2(1-x-y)}{n+2}F(1,2;n+3;x+y)\\
&\quad+\frac{x(1-x-y)}{n+1}F(1,1;n+2;x+y).
\end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned}
M_n(e_3^2;x,y)&=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{kl}{(n+k+l)^2}m_{nkl}(x,y)\\
&=xy\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n+k+l+2}\right)m_{nkl}(x,y)\\
&=xy-\frac{xy(1-x-y)^{n+1}}{n+2}F(n+1,n+2;n+3;x+y)\\
&=xy-\frac{xy(1-x-y)}{n+2}F(1,2;n+3;x+y).
\end{aligned}$$

4 完全渐近公式

类似文[1]中的引理 2,我们易得二阶矩量的如下估计

$$\sum_{k=0}^{m-1}\frac{(2)_k}{(n+2)_k}(x+y)^k\leqslant F(1,2;n+2;x+y)$$

$$\leqslant\sum_{k=0}^{m-1}\frac{(2)_k}{(n+2)_k}(x+y)^k+\frac{(m+1)!}{(n-1)\ (n+2)_{m-1}}(x+y)^m,$$

$$\sum_{k=0}^{m-1}\frac{(2)_k}{(n+3)_k}(x+y)^k\leqslant F(1,2;n+3;x+y)$$

$$\leqslant\sum_{k=0}^{m-1}\frac{(2)_k}{(n+3)_k}(x+y)^k+\frac{(m+1)!}{n(n+3)_{m-1}}(x+y)^m,$$

$$\sum_{k=0}^{m-1}\frac{(1)_k}{(n+2)_k}(x+y)^k\leqslant F(1,1;n+2;x+y)$$

$$\leqslant\sum_{k=0}^{m-1}\frac{(1)_k}{(n+2)_k}(x+y)^k+\frac{m!}{n(n+2)_{m-1}}(x+y)^m,$$

$$\sum_{k=0}^{m-1}\frac{(2)_k(2)_k}{(n+3)_k k!}(x+y)^k\leqslant F(2,2;n+3;x+y)$$

$$\leqslant\sum_{k=0}^{m-1}\frac{(2)_k(2)_k}{(n+3)_k}(x+y)^k+\frac{(m+2)!(n+1)(n+2)}{n(n-m-1)_{m-1}}(x+y)^m.$$

利用这些估计,由定理 2 我们便可得二阶矩量的完全渐近公式如下

定理 3

$$M_n((u-x)^2;x,y)=M_n(e_1^2;x,y)-x^2=\frac{x(1-x-y)}{n}\sum_{i=0}^{m-1}\frac{a_i(x,y)}{n^i}+\bigcirc(n^{-m-1}),$$

$$M_n((v-y)^2;x,y)=M_n(e_2^2;x,y)-y^2=\frac{y(1-x-y)}{n}\sum_{i=0}^{m-1}\frac{a_i(y,x)}{n^i}+\bigcirc(n^{-m-1}),$$

$$M_n((u-x)(v-y);x,y)=M_n(e_3^2;x,y)-xy$$

$$=-\frac{xy(1-x-y)}{n}\sum_{i=0}^{m-1}\frac{b_i(x,y)}{n^i}+\bigcirc(n^{-m-1}).$$

这里

$$a_i(x,y)=\sum_{k=0}^{i}(x+y)^k\sum_{i_0+\cdots+i_k=i-k}[(-1)^{i_0}\cdots(-k-1)^{i_k}(1)_k-(-2)^{i_0}\cdots(-k-2)^{i_k}(2)_k x],$$

$$b_i(x,y)=\sum_{k=0}^{i}(x+y)^k\sum_{i_0+\cdots+i_k=i-k}(-2)^{i_0}\cdots(-k-2)^{i_k}(2)_k,\quad i=0,1,\cdots.$$

如果取 $m=1$, 那么我们有

$$M_n((u-x)^2;x,y)=M_n(e_1^2;x,y)-x^2=\frac{x(1-x)(1-x-y)}{n}+\bigcirc(n^{-2}),$$

$$M_n((v-y)^2;x,y)=M_n(e_2^2;x,y)-y^2=\frac{y(1-y)(1-x-y)}{n}+\bigcirc(n^{-2}),$$

$$M_n((u-x)(v-y);x,y)=M_n(e_3^2;x,y)-xy=-\frac{xy(1-x-y)}{n}+\bigcirc(n^{-2}),$$

它正是文[4]的引理 2. 通过取更大的 m 值, 我们能得到二阶矩量更精确的估计. 例如,取 $m=2$,则有

$$M_n(e_1^2;x,y)-x^2=\frac{x(1-x)(1-x-y)}{n}-\frac{x(1-2x)(1-x-y)^2}{n^2}+\bigcirc(n^{-3}),$$

$$M_n(e_2^2;x,y)-y^2=\frac{y(1-y)(1-x-y)}{n}-\frac{x(1-2y)(1-x-y)^2}{n^2}+\bigcirc(n^{-3}),$$

$$M_n(e_3^2;x,y)-xy=-\frac{xy(1-x-y)}{n}+\frac{2xy(1-x-y)^2}{n^2}+\bigcirc(n^{-3}).$$

取 $m=3$,则得

$$M_n(e_1^2;x,y)-x^2=\frac{x(1-x)(1-x-y)}{n}-\frac{x(1-2x)(1-x-y)^2}{n^2}+\frac{x(1-4x-2(1-3x)(x+y))(1-x-y)^3}{n^3}+O(n^{-4}),$$

$$M_n(e_2^2;x,y)-y^2=\frac{y(1-y)(1-x-y)}{n}-\frac{x(1-2y)(1-x-y)^2}{n^2}+\frac{y(1-4y-2(1-3y)(x+y))(1-x-y)^3}{n^3}+O(n^{-4}),$$

$$M_n(e_3^2;x,y)-xy=-\frac{xy(1-x-y)}{n}+\frac{2xy(1-x-y)^2}{n^2}-\frac{2xy(1-3(x+y))(1-x-y)^3}{n^3}+O(n^{-4}).$$

有了二阶矩量的这些更精确估计,就能改进算子 M_n 的一些已知结果,但这里我们不打算这么做.

参 考 文 献

[1] Alkemade J A H. The second moments for the Meyer-König and Zeller operators. J Approx Theory, 1984, **40**(2): 261-273

[2] Abel U. The moments for the Meyer-König and Zeller operators. J Approx Theory, 1995, **82**(3): 352-361

[3] Cheney E W, Sharma A. Bernstein power series. Canad J Math, 1964, **16**(2): 241-253

[4] 熊静宜,杨汝月.单纯形上 Meyer-König and Zeller 算子的逼近定理.数学杂志, 1995, **15**(2): 127-133

[5] 张春苟.单纯形上 Meyer-König and Zeller 算子逼近.北京师范大学学报(自然科学版), 1998, **34**(2): 147-151

[6] 王竹溪,郭敦仁.特殊函数概论.北京:北京大学出版社, 2000

The Second Moments for Meyer-König and Zeller Operators on a Simplex

Zhang Chungou

(*Department of Mathematics*, *Capital Normal University*, *Beijin* 100037)

Abstract In this paper, the explicit expressions of the second moments for the Meyer-König and Zeller operators on a simplex are discussed and derived in terms of the generalized integration, Appell hypergeometric functions in two variables and hypergeometric series. With that, the complete asymptotic formulae of the second moments are obtained.

Key words Meyer-König and Zeller operators; Simplex; Moment; Appell hypergeometric functions; Hypergeometric series.

MR(2000) Subject Classification: 33C; 41A