2005,**25A**(3):299－306

Acta Mathematica Scientia
数学物理学报

半线性奇系数临界双调和方程的 Dirichlet 问题*

熊辉
(中国科学技术大学数学系　合肥 230026;东莞理工学院数学教研室　东莞 523106)
沈尧天
(华南理工大学应用数学系　广州 510640)

摘要:主要探讨了两类半线性双调和 Dirichlet 问题:奇系数次临界问题和临界但带较弱奇性问题,得出了在临界维数和正常维数不同情况下都至少有一个正解的结论. 同时也研究了临界维数的消失问题,比较了奇系数与较弱奇性不同情况下临界维数的变化,得出奇性越大临界维数越少的结论.

关键词:双重调和方程;奇系数;临界维数;消失。

MR(2000)主题分类:35H　　**中图分类号:**O175.25　　**文献标识码:**A

文章编号:1003-3998(2005)03-299-08

1　引言及主要结论

在这篇论文里,我们讨论方程

$$\begin{cases}\Delta^2 u = \dfrac{\lambda u}{|x|^\alpha} + |u|^{p-2}u, & x \in \Omega, \\ u = \nabla u = 0, & x \in \partial\Omega,\end{cases} \tag{1.1}$$

其中 $N \geqslant 5$, Ω 是 $\boldsymbol{R}^N$ 中一有界光滑区域, $0 \leqslant \alpha \leqslant 4$, $2 < p \leqslant 2N/(N-4)$. 我们用 $H_0^2(\Omega)$表示 Sobolev 空间 $W_0^{2,2}(\Omega)$.

近年来半线性和拟线性双调和算子的次临界增长以及临界增长问题得到广泛的研究,关于非平凡解的存在性或不存在性,我们可以参看文[1－6]及其参考文献. 特别在文[1]中,P Pucci 和 J Serrin 研究了非奇系数临界增长问题,得出了一些重要结论,讨论了解与维数的关系,而且定义了临界维数的概念. D E Edmunds 等[4]也讨论了临界情况下的双调和问题

$$\begin{cases}\Delta^2 u = \lambda u + |u|^{8/(N-4)}u, & x \in \Omega, \\ u = \nabla u = 0, & x \in \partial\Omega,\end{cases} \tag{1.2}$$

得出在临界维数与一般维数下的非平凡解存在的几个结论. 而对于多重调和问题,F Bernis 和 Hans Christoph Grunau[3]考虑了

收稿日期:2003-12-10

E-mail:xhui@163.com

* 基金项目:国家自然科学基金(10171032,10071080,10101024)资助

$$\begin{cases}\Delta^m u = \lambda u + |u|^{8/(N-4)}u, & x \in \Omega, \\ u = \nabla u = \cdots = D^\alpha u = 0, & x \in \partial\Omega,\end{cases} \tag{1.3}$$

其中 $\alpha=0,1,\cdots,m-1$,综合他们的论证,可知在非奇系数临界增长情况下

(i) 当 $N\geqslant 4m$, Ω 为单位球 B 时,对 $\forall\lambda$, $0<\lambda<\lambda_1^{(m)}$,方程都至少有一个正的径向解;

(ii) 当 $2m<N<4m$, Ω 为单位球 B 时,存在一个适当的 $\lambda_0>0$,使得当 $\lambda_0<\lambda<\lambda_1^{(m)}$ 时,方程都至少有一正的径向解;而 $\lambda<\lambda_0$ 时,方程无解.

其中 $\lambda_1^{(m)}$ 为 $(-\Delta)^m u=\lambda u$ 的齐次 Dirichlet 边界问题的第一特征值,而(ii)也只是 P Pucci 等[1]的一个猜想,并没有对所有的 $N\in(2m,4m)$ 加以证明,目前最好的工作是 F Bernis 等[5]证明了 $N=2m+1,2m+2,2m+3$ 时满足.

本文主要目的是证明在问题(1.1)中,α 的改变会影响临界维数 N 的取值,而且通过计算,我们还得出一系列结果. 以下是本文的主要结论

定理 1.1 对于问题(1.1),有以下结论成立

(i) 当 $2<p<2N/(N-4)$ 即奇系数次临界情况时,若 $\alpha=4$,则临界维数 N 将消失;

(ii) 当 $p=2N/(N-4)$ 即奇系数临界情况时,有

(a) 当 $3\leqslant\alpha<4$ 时,则临界维数 N 消失;

(b) 当 $2\leqslant\alpha<3$ 时,则临界维数 $N=5$;

(c) 当 $1\leqslant\alpha<2$ 时,则临界维数 $N=5,6$;

(d) 当 $0\leqslant\alpha<1$ 时,则临界维数 $N=5,6,7$.

其中(ii)-(d)中当 $\alpha=0$ 时即为 P Pucci 和 J Serrin[1]所得到的结论.

定理 1.2 对于问题(1.1)

(i) 当 $2<p<2N/(N-4)$, $\alpha=4$ 即奇系数次临界情况时

$$\begin{cases}\Delta^2 u = \dfrac{\lambda u}{|x|^4} + |u|^{p-2}u, & x \in \Omega, \\ u = \nabla u = 0, & x \in \partial\Omega,\end{cases} \tag{1.4}$$

对 $\lambda<\lambda_1^{*}=N^2(N-4)^2/16$, $\forall N\geqslant 5$,该问题都至少有一个正解.

(ii) 当 $p=2N/(N-4)$, $0\leqslant\alpha<4$ 即临界情况时,若 $N\geqslant 8-\alpha$,则对 $\forall\lambda\in(0,\lambda_1^{(2)})$,该问题都至少有一个正解;若 $N=5,\cdots,7-\alpha$,则存在某个 $\lambda_0>0$ 且

$$\lambda_0 = \lambda_1^{(2)} - \frac{K}{|\phi|^2_{L^{2^{**}}}}\int_\Omega \frac{\phi^2}{|x|^\alpha}\mathrm{d}x < \lambda_1^{(2)},$$

使得对 $\forall\lambda\in(\lambda_0,\lambda_1^{(2)})$,该问题都至少有一个正解.

定理 1.1-(i)和定理 1.2-(i)本质上是一样的.

定义 $H_0^2(\Omega)$ 空间的范数和 $L^q(\Omega)$ $(1<q<+\infty)$ 空间的模分别为

$$\|u\|^2 = \int_\Omega |\Delta u|^2\mathrm{d}x, \quad |u|_{L^q} = \left(\int_\Omega u^q\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}},$$

记号 $\rightarrow$ 表示强收敛,$\rightharpoonup$ 表示弱收敛,$\rightharpoonup^*$ 表示弱 * 收敛.

2 结论证明

定义 $$K = \inf\left\{\int_\Omega |\Delta u|^2\mathrm{d}x : u\in H_0^2(\Omega), \int_\Omega |u|^{2^{**}}\mathrm{d}x = 1\right\},$$

由 D E Edmunds 等[4]中的 Theorem 2.3 我们知道,这个极小值 K 在 Ω 内达不到. 在流形

$$V=\left\{u\in H_0^2(\Omega)\mid\int_\Omega|u|^{\frac{2N}{N-4}}\mathrm{d}x=1\right\}$$

上考虑以下的问题.

引理 2.1 对于问题(1.1),当 $p=2N/(N-4)$, $0\leqslant\alpha<4$ 时,相应泛函为

$$J_\lambda(u)=\frac{1}{2}\int_\Omega|\Delta u|^2\mathrm{d}x-\frac{\lambda}{2}\int_\Omega\frac{u^2}{|x|^\alpha}\mathrm{d}x-\frac{1}{2^{**}}\int_\Omega|u|^{2^{**}}\mathrm{d}x.\tag{2.1}$$

这时 $J_\lambda(u)$满足局部 PS 条件,即存在某个常数 $c\in(-\infty,\frac{2}{N}K^{N/4}+\frac{2}{N})$ 和序列$\{u_n\}\in V$ 使得当 $n\to\infty$时,有

$$J_\lambda(u_n)\to c,\tag{2.2}$$

$$J'_\lambda(u_n)u_n\to 0,\tag{2.3}$$

成立,则在空间 $H_0^2(\Omega)$中$\{u_n\}$必存在一个强收敛的子列.

证 我们先证明$\{u_n\}$在空间 $H_0^2(\Omega)$中有界,因为

$$J_\lambda(u_n)=\frac{1}{2}\int_\Omega|\Delta u_n|^2\mathrm{d}x-\frac{\lambda}{2}\int_\Omega\frac{u_n{}^2}{|x|^\alpha}\mathrm{d}x-\frac{1}{2^{**}}\int_\Omega|u_n|^{2^{**}}\mathrm{d}x,$$

$$\langle J'_\lambda(u_n),u_n\rangle=\int_\Omega|\Delta u_n|^2\mathrm{d}x-\lambda\int_\Omega\frac{u_n{}^2}{|x|^\alpha}\mathrm{d}x-\int_\Omega|u_n|^{2^{**}}\mathrm{d}x,$$

我们有

$$J_\lambda(u_n)-\frac{1}{2}\langle J_\lambda'(u_n),u_n\rangle=\frac{2}{N}\int_\Omega|u_n|^{2^{**}}\mathrm{d}x.$$

由(2.2),(2.3)式,很明显积分$\int_\Omega|u_n|^{2^{**}}\mathrm{d}x$ 有界,令 $B(0,R)$是以零点为球心以 R 为半径的球,且使得 $\Omega\subseteq B(0,R)$,由 Hölder 不等式

$$\begin{aligned}\int_\Omega\frac{u_n{}^2}{|x|^\alpha}\mathrm{d}x&\leqslant\left(\int_\Omega u_n{}^{2^{**}}\mathrm{d}x\right)^{\frac{N-4}{N}}\left(\int_\Omega|x|^{\frac{-\alpha N}{4}}\mathrm{d}x\right)^{\frac{4}{N}}\\&=C\left(\int_\Omega|x|^{\frac{-\alpha N}{4}}\mathrm{d}x\right)^{\frac{4}{N}}\\&\leqslant C\left(\int_{B(0,R)}|x|^{-\alpha N/4}\mathrm{d}x\right)^{\frac{4}{N}}\\&=C\omega^{\frac{4}{N}}\left(\int_0^R r^{N-1-\frac{\alpha N}{4}}\mathrm{d}x\right)^{\frac{4}{N}}\\&=C\omega^{\frac{4}{N}}R^{4-\alpha}<\infty.\end{aligned}$$

再由(2.2)式, 我们知道

$$\int_\Omega|\Delta u_n|^2\mathrm{d}x\leqslant c+\frac{1}{2^{**}}\int_\Omega|u_n|^{2^{**}}\mathrm{d}x+\frac{\lambda}{2}\int_\Omega\frac{u_n{}^2}{|x|^\alpha}\mathrm{d}x+o(\|u_n\|).$$

因此$\{u_n\}$在空间 $H_0^2(\Omega)$中有界,有界则意味着它存在一个子列(仍记之为$\{u_n\}$)满足

$$\begin{cases}u_n\rightharpoonup u, & \text{in}\quad H_0^2(\Omega),\\ u_n\to u, & \text{in}\quad L^r(\bar{\Omega}),\end{cases}\tag{2.4}$$

其中 $1<r<2^{**}$. 由于$\{u_n\}$弱收敛,所以由 P L Lions[2]集中紧原理可以假定

$$\begin{cases}|\Delta u_n|^2\rightharpoonup^*\mu,\\ |u_n|^{2^{**}}\rightharpoonup^*\nu,\end{cases}$$

其中 μ,ν 都是某有限测度,则存在$\{x_i\}\subset\{u_n\}$, $i=1,2,\cdots,l$,使得

$$\begin{cases}\mu \geqslant |\Delta u|^2 + \sum_{i=1}^{N}\mu_i\delta_{x_i}, \quad \mu_i > 0, \\ \nu = |u|^{2^{**}} + \sum_{i=1}^{N}\nu_i\delta_{x_i}, \quad \nu_i > 0, \\ {\nu_i}^{2/2^{**}} \leqslant \dfrac{\mu_i}{K},\end{cases}$$

因此

$$\begin{cases}|\Delta u_n|^2 \rightharpoonup \mathrm{d}\mu \geqslant |\Delta u|^2 + \sum_{j\in J}\mu_i\delta_{x_i}, \quad \mu_i > 0, \\ |u_n|^{2^{**}} \rightharpoonup \nu = |u|^{2^{**}} + \sum_{j\in J}\nu_j\delta_{x_j}, \quad \nu_i > 0.\end{cases} \tag{2.5}$$

取截断函数 $\psi\in C^\infty(\boldsymbol{R}^N)$ 使满足

$$\begin{cases}\psi \equiv 1 \quad \text{on} \quad B(x_j,\varepsilon), \\ \psi \equiv 0 \quad \text{on} \quad B(x_j,2\varepsilon)^c, \\ |\nabla\psi| \leqslant \dfrac{2}{\varepsilon}, \\ |\Delta\psi| \leqslant \dfrac{2}{\varepsilon^2},\end{cases} \tag{2.6}$$

其中 $B(x_j,\varepsilon)$ 表示以 x_j 为中心以 ε 为半径的圆，$B(x_j,\varepsilon)^c$ 表示 $B(x_j,2\varepsilon)$ 的补集. 作函数 $\phi(x)=\psi(x)\chi_\Omega(x)$，平均化，很明显它在 $H_0^2(\Omega)$ 是有界的. 由(2.3)式我们知道

$$\lim\langle J'(u_j),\phi u_j\rangle = 0,$$

而且

$$\int_\Omega \phi\,\mathrm{d}\nu + \lambda\int_\Omega \phi\,\frac{u^2}{|x|^\alpha}\mathrm{d}x = \lim_{j\to\infty}\int_\Omega \Delta u_j\Delta(u_j\phi)\mathrm{d}x.$$

结合(2.4)，(2.5)和(2.6)式，可得

$$\lim_{j\to\infty}\left|\int_\Omega \Delta u_j\Delta(u_j\phi)\mathrm{d}x\right| = \int_\Omega\phi\,\mathrm{d}\mu + \lim_{j\to\infty}\left|\int_\Omega \Delta u_j(2\langle\nabla u_j,\nabla\phi\rangle + u_j\Delta\phi)\mathrm{d}x\right|,$$

再利用 Hölder 不等式估计

$$\begin{aligned}0 &\leqslant \lim_{j\to\infty}\left|\int_\Omega \Delta u_j\langle\nabla u_j,\nabla\phi\rangle\mathrm{d}x\right| \\ &\leqslant \lim_{j\to\infty}\left(\int_\Omega |\Delta u_j|^2\right)^{1/2}\left(\int_\Omega |\nabla\phi|^2|\nabla u_j|^2\mathrm{d}x\right)^{1/2} \\ &\leqslant C\left(\int_{B(x_k,\varepsilon)\cap\Omega}|\nabla\phi|^2|\nabla u|^2\mathrm{d}x\right)^{1/2} \\ &\leqslant C\left(\int_{B(x_k,\varepsilon)\cap\Omega}|\nabla\phi|^N\mathrm{d}x\right)^{1/N}\left(\int_{B(x_k,\varepsilon)\cap\Omega}|\nabla u|^{2N/(N-2)}\mathrm{d}x\right)^{(N-2)/2N} \\ &\leqslant C'\left(\int_{B(x_k,\varepsilon)\cap\Omega}|\nabla u|^{2N/(N-2)}\mathrm{d}x\right)^{(N-2)/2N} \to 0 \quad (\varepsilon\to 0),\end{aligned}$$

而且

$$\begin{aligned}0 &\leqslant \lim_{j\to\infty}\left|\int_\Omega \Delta u_j u_j\Delta\phi\,\mathrm{d}x\right| \\ &\leqslant \lim_{j\to\infty}\left(\int_\Omega |\Delta u_j|^2\right)^{1/2}\left(\int_\Omega |\Delta\phi|^2|u_j|^2\mathrm{d}x\right)^{1/2}\end{aligned}$$

$$\leqslant C\left(\int_{B(x_k,\varepsilon)\cap\Omega}|\Delta\phi|^2|u|^2\mathrm{d}x\right)^{1/2}$$
$$\leqslant C\left(\int_{B(x_k,\varepsilon)\cap\Omega}|\Delta\phi|^{N/2}\mathrm{d}x\right)^{2/N}\left(\int_{B(x_k,\varepsilon)\cap\Omega}|u|^{2N/(N-4)}\mathrm{d}x\right)^{(N-4)/2N}$$
$$= C\frac{2}{\varepsilon^2}|B(x_k,\varepsilon)\cap\Omega|\left(\int_{B(x_k,\varepsilon)\cap\Omega}|u|^{2N/(N-4)}\mathrm{d}x\right)^{(N-4)/2N}$$
$$\leqslant C\omega_n\varepsilon^{N-2}\left(\int_{B(x_k,\varepsilon)\cap\Omega}|u|^{2N/(N-4)}\mathrm{d}x\right)^{(N-4)/2N}\to 0\quad(\varepsilon\to 0),$$

所以

$$0=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_\Omega\phi\mathrm{d}\nu+\lambda\int_\Omega\phi\frac{u^2}{|x|^\alpha}\mathrm{d}x-\int_\Omega\phi\mathrm{d}\mu\right)=\nu_k-\mu_k. \tag{2.7}$$

由 P L Lions[2] 知,至多存在可数个点集 K,使得 $\{x_k\}_{k\in K}\subset\Omega$,且非负权 $\{\mu_k,\nu_k\}$ 满足

$$\nu=\sum_{k\in K}\nu_k\delta_{x_k},\quad \mu\geqslant\sum_{k\in K}\mu_k\delta_{x_k},$$

其中 δ_{x_k} 是在 $x_k\in\Omega$ 时的 Dirac 测度,而且

$$\mu_k\geqslant K\nu_k^{2/2^{**}},$$

由上式和(2.7)式得 $\nu_k\geqslant K\nu_k^{2/2^{**}}$. 因此 $\nu_k=0$ 或 $\nu_k\geqslant K^{N/4}$. 接下来我们要证明 $\nu_k\geqslant K^{N/4}$ 这种情况不可能发生. 利用反证法,假设存在某个 k_0 使得 $\nu_{k_0}\neq 0$ 而满足 $\nu_{k_0}\geqslant K^{N/4}$. 从(2.2)和(2.3)式我们有

$$c=\lim_{j\to\infty}J(u_j)=\lim_{j\to\infty}\left(J(u_j)-\frac{1}{2}\langle J'(u_j),u_j\rangle\right)$$
$$\geqslant\frac{2}{N}\int_\Omega|u|^{2^{**}}\mathrm{d}x+\frac{2}{N}K^{N/4}$$
$$=\frac{2}{N}K^{N/4}+\frac{2}{N},$$

但这与已知条件 $c<\frac{2}{N}K^{N/4}+\frac{2}{N}$ 相矛盾. 因此对任意 k 都有 $\nu_k=0$,即 $\{u_n\}$ 必存在一个子列在空间 $H_0^2(\Omega)$ 中强收敛. 由此引理 2.1 得证. ▌

引理 2.2 假定 $\lambda>0$ 且 $N\geqslant 8-\alpha$,则必存在一个 $u\in H_0^2(\Omega)$ 使得

$$I_\lambda(u)=\frac{\int_\Omega|\Delta u|^2\mathrm{d}x-\lambda\int_\Omega\frac{u^2}{|x|^\alpha}\mathrm{d}x}{\left(\int_\Omega|u|^{2^{**}}\mathrm{d}x\right)^{2/2^{**}}}<K.$$

证 由 D E Edmunds 等[5] 知双调和方程的达到函数为

$$u_\varepsilon=\frac{\phi(x)}{(\varepsilon+|x|^2)^{(n-4)/2}}\quad(x\in\Omega,\ \varepsilon>0),$$

不失一般性,我们假定 $\{0\}\subset\Omega$,令 $\phi\in C_0^\infty$ 是非负的且在零点的某个邻域内 $\phi\equiv 1$,作 $y_i=x_i/\sqrt{\varepsilon}$ 变换,换成极坐标中的积分,则有

$$\int_\Omega\frac{u_\varepsilon^2}{|x|^\alpha}\mathrm{d}x=\begin{cases}\omega_n\varepsilon^{\frac{8-\alpha-N}{2}}\int_0^\infty r^{N-1-\alpha}(1+r^2)^{4-N}\mathrm{d}r+O(1), & N\geqslant 9-\alpha,\\ \frac{1}{2}\omega_n|\ln\varepsilon|+O(1), & N=8-\alpha,\end{cases} \tag{2.8}$$

$$\left(\int_\Omega u_\varepsilon^{2^{**}}\mathrm{d}x\right)^{2/2^{**}}=\omega_n^{\frac{(N-4)}{N}}\varepsilon^{\frac{(4-N)}{2}}\int_0^\infty r^{N-1}(1+r^2)^{-N}+O(1), \tag{2.9}$$

其中 ω_n 是 $N-1$ 维单位球面的测度. 当 $\varepsilon\to 0$ 时,由极坐标直接计算可知

$$\int_\Omega |\Delta u_\varepsilon|^2 \mathrm{d}x = \omega_n (N-4)^2 \varepsilon^{\frac{(4-N)}{2}} \int_0^\infty (4r^{N+3}+4Nr^{1+N}+N^2 r^{N-1})(1+r^2)^{-N}\mathrm{d}r + O(1). \tag{2.10}$$

现令 $\tilde{u}=(1+|x|^2)^{(4-N)/2}$,可得

$$K_1 = \left(\int_\Omega \tilde{u}^{2^{**}}\mathrm{d}x\right)^{2/2^{**}} = \omega_n^{\frac{(N-4)}{N}}\left(\int_0^\infty r^{N-1}(1+r^2)^{-N}\mathrm{d}r\right)^{\frac{(N-4)}{N}}, \tag{2.11}$$

$$K_2 = \int_\Omega |\Delta\tilde{u}|^2\mathrm{d}x = \omega_n (N-4)^2 \int_0^\infty r^{N-1}(N+2r^2)^2(1+r^2)^{-N}\mathrm{d}r. \tag{2.12}$$

由达到函数可知 $K=K_2/K_1$,比较(2.9)和(2.11)式,(2.10)和(2.12)式,可以发现

$$\left(\int_\Omega u_\varepsilon^{2^{**}}\mathrm{d}x\right)^{2/2^{**}} = K_1 \varepsilon^{\frac{(4-N)}{2}} + O(1), \tag{2.13}$$

$$\int_\Omega |\Delta u_\varepsilon|^2\mathrm{d}x = K_2 \varepsilon^{\frac{(4-N)}{2}} + O(1), \tag{2.14}$$

$$\int_\Omega \frac{u_\varepsilon^2}{|x|^\alpha}\mathrm{d}x = \begin{cases} C_1 \varepsilon^{(8-\alpha-N)/2} + O(1), & N \geqslant 9-\alpha, \\ C_2 |\ln\varepsilon| + O(1), & N = 8-\alpha. \end{cases} \tag{2.15}$$

由 $K=K_2/K_1$, (2.13)和(2.14)式,我们直接可得引理 2.2. ▌

证明定理 1.1 (i) 因为定理 1.1-(i)和定理 1.2-(i)本质上是一样的,我们在后面一起证明.

(ii) 根据以上两个引理,再由(2.15)式可知

(a) 当 $3\leqslant\alpha<4$ 时,非临界维数为 $N\geqslant 8-\alpha\geqslant 5$,而对于四阶方程要求 $N\geqslant 5$,所以临界维数 N 消失;

(b) 当 $2\leqslant\alpha<3$ 时,$5<8-\alpha\leqslant 6$,所以临界维数 $N=5$;

(c) 当 $1\leqslant\alpha<2$ 时,$6<8-\alpha\leqslant 7$,所以临界维数 $N=5,6$;

(d) 当 $0\leqslant\alpha<1$ 时,$7<8-\alpha\leqslant 8$,所以临界维数 $N=5,6,7$. ▌

可见,奇性影响临界维数的产生,临界维数的个数与 α 的大小是呈反向增长的,奇性越高,临界维数越少.

为了证明定理 1.2,需要以下两个引理

引理 2.3 对 $\forall\, u(x)\in W^{2,2}(\boldsymbol{R}^N)$ 且 $N\geqslant 5$,有以下不等式成立

$$\int_{\boldsymbol{R}^N}\frac{u^2}{|x|^4}\mathrm{d}x \leqslant \left[\frac{4}{N(N-4)}\right]^2\int_{\boldsymbol{R}^N}|\Delta u|^2\mathrm{d}x. \tag{2.16}$$

证 由恒等式 $\Delta|x|^{-2}=-2(N-4)|x|^{-4}$ 可得

$$2\alpha(N-4)|x|^{-4}\int_{\boldsymbol{R}^N}\frac{u^2}{|x|^4}\mathrm{d}x = -\int_{\boldsymbol{R}^N} u^2\Delta\left(\frac{1}{|x|^2}\right)\mathrm{d}x,$$

显然 $\Delta(u^2)=2u\Delta u+2|\nabla u|^2$ 且 $\int_{\boldsymbol{R}^N}(u\Delta u+|\nabla u|^2)\mathrm{d}x=0$,因此

$$(N-4)\int_{\boldsymbol{R}^N}\frac{u^2}{|x|^4}\mathrm{d}x = -\int_{\boldsymbol{R}^N}\frac{u\Delta u}{|x|^2}\mathrm{d}x - \int_{\boldsymbol{R}^N}\frac{|\nabla u|^2}{|x|^2}\mathrm{d}x. \tag{2.17}$$

由于$(u^2)'=2u\nabla u$,则分部积分可得

$$(N-4)\int_{\boldsymbol{R}^N}\frac{u^2}{|x|^4}\mathrm{d}x = -2\int_{\boldsymbol{R}^N}\frac{ux\cdot\nabla u}{|x|^4}\mathrm{d}x.$$

由 Hölder 不等式有

$$\frac{(N-4)^2}{4}\int_{\boldsymbol{R}^N}\frac{u^2}{|x|^4}\mathrm{d}x \leqslant \int_{\boldsymbol{R}^N}\frac{|\nabla u|^2}{|x|^2}\mathrm{d}x. \tag{2.18}$$

结合(2.18)和(2.17)式，再次利用 Hölder 不等式可得

$$\int_{\mathbf{R}^N}\frac{u^2}{|x|^4}\mathrm{d}x\leqslant-\frac{4}{(N-4)N}\left(\int_{\mathbf{R}^N}\frac{u^2}{|x|^4}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{\mathbf{R}^N}|\Delta u|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}},$$

等价变形即得(2.16)式. ∎

引理 2.4 如果 $\lambda<\lambda_1^*=N^2(N-4)^2/16$，$N\geqslant5$，则问题(1.4)对应的泛函

$$I(u)=\frac{1}{2}\int_\Omega|\Delta u|^2\mathrm{d}x-\frac{\lambda}{2}\int_\Omega\frac{u^2}{|x|^4}\mathrm{d}x-\frac{1}{p}\int_\Omega|u|^p\mathrm{d}x,$$

满足山路几何，即

(i) $\exists\rho,\beta>0$，当 $\|u\|=\rho$ 时，使得 $I(u)\geqslant\beta$.

(ii) $\exists e\in\Omega$，当 $\|e\|>\rho$ 时，使得 $I(e)\leqslant0$.

该引理的(i)可直接利用引理 2.3 来证明，这两步都很简单，为篇幅起见，此略.

证明定理 1.2

(i) 由引理 2.4 和山路引理我们知道，存在一个$(\mathrm{PS})_c$ 序列$u_n\subset H_0^2(\Omega)$使得

$$I(u_n)\to c,\qquad n\to\infty,\tag{2.19}$$

$$\langle I'(u_n),u_n\rangle\to0,\qquad n\to\infty,\tag{2.20}$$

其中

$$c=\inf_{\gamma\in\Gamma}\max_{t\in[0,1]}I(\gamma(t)),\qquad\Gamma=\{\gamma\in C([0,1],E)\mid I(\gamma(0))=0,I(\gamma(1))=e\}.$$

因为 Ω 是有界区域且$|u|^{p-1}u$ 是次临界的，那么，如果$\{u_n\}$在空间 $H_0^2(\Omega)$有界，由 Sobolev 紧嵌入和标准过程我们知道$\{u_n\}$在空间 $H_0^2(\Omega)$有一个子列强收敛到 $I(u)$的非平凡临界点 u. 因此，为了证明定理 1.2，我们先要证明$\{u_n\}$在 $H_0^2(\Omega)$中有界，而这一点我们可以由(2.19)和(2.20)式，结合不等式(2.16)便很容易得到. 再利用标准过程，则可得出该解是山路类型的正解. 由于这时对任意 $N\geqslant5$ 的维数有界条件都是一样的，可见定理 1.1-(i)也因此得证.

(ii) 当 $N\geqslant8-\alpha$ 时. 由引理 2.1 和引理 2.2，可知存在一个 $u\in H_0^2(\Omega)$使得 J_λ 达到极小，因此存在一个 Lagrange 倍数 θ 使得

$$\Delta^2u-\lambda\frac{u}{|x|^\alpha}=\theta u|u|^{2^{**}-2},$$

又因为 $\lambda<\lambda_1{}^{(2)}$，所以 $\int_\Omega(|\Delta u|^2-\lambda\frac{u^2}{|x|^\alpha})\mathrm{d}x>0$，因此 $\theta^{\frac{N-4}{8}}u$ 就是(1.1)式的一个正解.

当 $N=5,\cdots,7-\alpha$ 时. 设 ϕ 是相应于λ_1 的特征函数，则由引理 2.4 可得

$$\begin{aligned}I_\lambda(\phi)|\phi|_{L^{2^{**}}}^2&=\int_\Omega|\Delta\phi|^2\mathrm{d}x-\lambda\int_\Omega\frac{\phi^2}{|x|^\alpha}\mathrm{d}x\\&=\int_\Omega\phi\Delta^2\phi\mathrm{d}x-\lambda\int_\Omega\frac{\phi^2}{|x|^\alpha}\mathrm{d}x\\&=(\lambda_1{}^{(2)}-\lambda)\int_\Omega\frac{\phi^2}{|x|^\alpha}\mathrm{d}x\\&<K,\end{aligned}$$

取

$$\lambda_0=\lambda_1{}^{(2)}-\frac{K}{|\phi|_{L^{2^{**}}}^2\int_\Omega\frac{\phi^2}{|x|^\alpha}\mathrm{d}x}<\lambda_1,$$

则对任意 $\lambda\in(\lambda_0,\lambda_1{}^{(2)})$，问题(1.4)都有一个正解. ∎

参 考 文 献

[1] Pucci P, Serrin J. Critical exponents and critical dimensions for polyharmonic equations. J Math Pure Appl, 1990, **69**: 55—83

[2] Noussair E S, Swanson Ch A, Yang Jianfu. Critical semilinear biharmonic equations in $\boldsymbol{R}^N$. Proc Royal Soc Edinburgh, 1992, **121**A: 139—148

[3] Hulshof J, R C A M. Van der vorst, diffirential systems with strongly indefinite variational structure. J Funct Anal, 1993, **114**: 32—58

[4] Edmunds D E, Fortunato D, Jannelli E. Critical exponents, critical dimensions and the biharmonic operator. Arch Rational Mech Anal, 1990, **112**: 269—289

[5] Francisco Bernis, Hans Christoph Grunau. Critical exponents and multiple critical dimensions for polyharmonic operators. J Differ Equations, 1995, **117**: 469—486

[6] Bernis F, Garcia Azorero J, Peral I. Existence and multiplicity of nontrivial solutions in semilinear critical problems of fourth order. Adv Differential Equation, 1996, **117**(1): 219—240

On the Dirichlet Problem of Semilinear Singular-critical Biharmonic Equations

Xiong Hui

(*Department of Mathematics, University of Science and Technology of China, Hefei* 230026)

(*Department of Mathematics, University of Technology of Dongguan, Dongguan* 523106)

Shen Yaotian

(*Department of Applied Mathematics, South China University of Technology, Guangzhou* 510640)

Abstract: In this paper, the authors mainly study two semilinear biharmonic problems: singular-subcritical and critical with lower singularity. The existence of "at least" a positive solution is obtained whether the dimensions are critical or not. In the meanwhile, the authors study the problem of the critical dimensions' disappearing and compare the change of them between higher singularity and lower singularity, and so the authors get the result, the higher the singularity, the less the critical dimensions.

Key words: Biharmonic equation; Singularity; Critical dimensions; Disappear.

MR(2000) Subject Classification: 35H