2009,**29A**(3):784–793

Acta Mathematica Scientia
数学物理学报

Banach 空间非线性 Sturm-Liouville 边值问题的正解 *

[1,2] 张玲忠 [2] 李永祥
([1] 甘肃农业大学理学院 甘肃兰州 730070; [2] 西北师范大学数学与信息科学学院 甘肃兰州 730070)

摘要：通过对非紧性测度的精细计算，结合相应的线性方程的特征值理论，运用凝聚映射的不动点指数理论，分别在超线性与次线性情形下，讨论 Banach 空间 Sturm-Liouville 边值问题正解的存在性.

关键词：边值问题；非紧性测度；不动点指数；正解.

MR(2000) 主题分类: 60F15; 60G15; 60F17 **中图分类号**: O175.25 **文献标识码**: A

文章编号: 1003-3998(2009)03-784-10

1 引言

设 E 为 Banach 空间，考虑非线性 Sturm-Liouville 问题

$$\begin{cases} Lu = f(t,u),\ t \in I, \\ R_1(u) := \alpha_0 u(0) - \beta_0 u'(0) = \theta, R_2(u) := \alpha_1 u(1) + \beta_1 u'(1) = \theta \end{cases} \tag{1.1}$$

解的存在性.

其中 $Lu = -(p(t)u'(t))' + q(t)u(t), I = [0,1], f \in C(I \times E, E), q(t), p(t), \alpha_i,\ \beta_i (i = 0,1)$ 满足以下假设

(P) $p \in C^1(I), p(t) > 0, \forall t \in I;\ q \in C(I), q(t) \geq 0, \forall t \in I;\ \alpha_i \geq 0, \beta_i \geq 0\ (i = 0,1)$, 且满足 $(\alpha_0 + \beta_0)(\alpha_1 + \beta_1) > 0$; 当 $\alpha_0 = \alpha_1 = 0$ 时，设 $q(t) \not\equiv 0$.

关于抽象空间两点边值问题的研究，已有一些结果，参见文献 [1–3]. 由于有限维空间与无穷维空间的本质差异，在无穷维空间中，非线性项 $f(t,u)$ 的连续性保证不了解的存在性，一般除 $f(t,u)$ 的连续性，还要对 f 加上一定的条件. 在文献 [1–2] 中，作者假定 f 一致连续，且满足以下非紧性测度条件，即对任意 $R > 0, f$ 满足非紧性测度条件

$$\alpha(f(t,D)) \leq L\alpha(D), \quad \forall\ t \in [0,1], D \subset \overline{B}(\theta, R), \tag{1.2}$$

其中 $L = L(R) \in (0, \frac{1}{2})$ 为常数. 并采用严格集压缩映射不动点定理，分别在超线性与次线性两种情形下，讨论了 Dilichlet 边值问题正解的存在性. 在文献 [3] 中，作者提出以下条件

(H_1) $f \in C(I \times P, P)$, 对 $\forall l > 0, f$ 在 $I \times (P \cap T_l)$ 上一致连续，且 $\exists L$, 当 $0 \leq L < \frac{1}{2M}$ 时，有 $\alpha(f(t,D)) \leq L\alpha(D),\ \forall\ t \in I, D \subset P \cap T_l$.

收稿日期：2007-03-28; 修订日期：2008-09-13
E-mail: zhanglz@gsau.edu.cn
* 基金项目：甘肃省自然科学基金 (ZS031-A25-003-Z) 和西北师范大学科技创新工程 (212) 资助

(H_2) $\exists\, a\in C(I)$, 且 $a(t)>0\ \ (t\in I)$ 与 $b\in C(I,E)$, 使

$$f(t,x)\geq a(t)x-b(t),\quad \forall\, t\in I,\ x\in E.$$

(H_3) $\exists\, r>0$ 与 $c\in C(I)$ 使 $c(t)\geq 0\ (t\in I)$, 且 $\max\limits_{t\in I}c(t)<\frac{1}{M}$, 使

$$\|f(t,u)\|\leq c(t)\|u\|,\quad \forall\, t\in I,\ \|u\|\leq r,$$

其中 $M=\max\limits_{t,s\in I}|k(t,s)|, T_l=\{u\in E|\parallel u\parallel\leq l\}$.

(H_4) $\exists\, d\in E$, 使 $f(t,x)\geq -d,\ \forall\, t\in I,\ x\in E$ 并采用凝聚映射的不动点指数理论，在超线性情形下，讨论问题 (1.1) 正解的存在性.

而本文通过对非紧性测度的精细计算，将文献 [2–3] 对 f 一致连续这个很强的条件减弱为连续，并结合问题 (1.1) 所对应的线性方程的特征值理论，对上述条件 (H_1)–(H_4) 进行全面的改进与删除. 同时，运用凝聚映射的不动点指数理论，分别在超线性与次线性情形下，获得了问题 (1.1) 正解的存在性结果，这些结果改进和推广了上述作者的工作.

2　主要引理

首先讨论方程 (1.1) 所对应的线性特征值问题

$$\begin{cases}Lh=\lambda h, t\in I,\\ R_1(h)=R_2(h)=0.\end{cases}\tag{2.1}$$

其中 $h\in C^2(I)$, 0 不是问题 (2.1) 的特征值，若条件 (P) 成立，则方程 (2.1) 的解等价于如下的积分方程

$$h(t)=\lambda\int_I k(t,s)h(s)\mathrm{d}s\equiv\lambda Th(t).\tag{2.2}$$

其中 $T:\ C(I)\to C(I)$ 全连续， $k(t,s)$ 的表示式如下

$$k(t,s)=\begin{cases}\dfrac{1}{w}x(t)y(s),\quad 0\leq t\leq s\leq 1,\\[2mm] \dfrac{1}{w}x(s)y(t),\quad 0\leq s\leq t\leq 1,\end{cases}\tag{2.3}$$

其中 $k(t,s)\geq 0$ 且 $k(t,s)\leq k(s,s),\forall\ 0\leq t,s\leq 1$.

引理 2.1　假设条件 (P) 成立，则由 (2.2) 式所定义的算子 T 的谱半径 $r(T)\neq 0$, 且存在正特征函数 $h(t)$ 与第一特征值 $\lambda_1=(r(T))^{-1}$, 使 $h(t)=\lambda_1 Th(t)$.

证　由 $k(t,s)$ 的性质知，存在 $t_1\in(0,1)$ 使 $k(t_1,t_1)>0$, 则存在 $[a_1,b_1]\subset(0,1)$, 使 $t_1\in(a_1,b_1)$ 且 $k(t,s)>0,\forall\, t,s\in[a_1,b_1]$. 取 $\psi\in C[0,1]$ 满足 $\psi(t)\geq 0,\forall\, t\in[0,1],\psi(t_1)>0$ 且 $\psi(t)=0,\forall\, t\notin[a_1,b_1]$, 则 $\forall\, t\in[a_1,b_1]$, 有 $(T\psi)(t)=\int_0^1 k(t,s)\psi(s)\mathrm{d}s\geq\int_{a_1}^{b_1}k(t,s)\psi(s)\mathrm{d}s>0$, 故存在常数 $c>0$ 使 $c(T\psi)(t)\geq\psi(t),\forall\, t\in[0,1]$. 由 Krein-Rutman 定理知，问题获证. ▌

引理 2.2　假设条件 (P) 成立，若存在 $h(t)\in C(I)$ 为 (2.2) 式所定义的算子 T 的正特征函数， λ_1 为其第一特征值，则存在常数 $\delta_1,\delta_2>0$, 满足下式

$$\delta_1 k(t,s)\leq h(s)\leq\delta_2 k(s,t),\quad 0\leq t,s\leq 1.\tag{2.4}$$

证 分两种情形讨论.

(i) 若 $x(0)>0, y(1)>0$, 则 $k(t,s)>0,\ 0\le t,s\le 1$, 且 $h(0)>0, h(1)>0$, 故 $\frac{h(s)}{k(t,s)}>0, 0\le t,s\le 1$. 由连续性知存在 $\delta_1,\delta_2>0$, 使 $\delta_1 k(t,s)\le h(s)\le \delta_2 k(s,t),\ 0\le t,s\le 1$.

(ii) 若 $x(0)=0, y(1)=0$, 即 $\beta_0=\beta_1=0$, 由假设 (P) 知 $\alpha_0,\alpha_1>0$, 由 (2.3) 式知 $k(0,s)=k(1,s)=0, s\in[0,1]$, 且 $h(0)=h(1)=0,\ h'(0)>0,\ h'(1)<0$. 因此

$$\lim_{s\to 0^+}\frac{h(s)}{x(s)}=\frac{h'(0)}{x'(0)}=\frac{h'(0)}{\alpha_0}>0,\quad \lim_{s\to 1^-}\frac{h(s)}{y(s)}=\frac{h'(1)}{y'(1)}=-\frac{h'(1)}{\alpha_1}>0. \tag{2.5}$$

定义 $\phi(s)=\frac{wh(s)}{x(s)y(s)},\ s\in(0,1)$, 又 $\phi(0)>0,\phi(1)>0$, 故 $\phi(s)\in C(I)$, 由 (2.5) 式及其定义知, $\phi(s)>0,\forall s\in I$. 由最值定理, 存在 $\delta_1,\delta_2>0$, 使 $\delta_1\le\phi(s)\le\delta_2,\forall\ s\in[0,1]$, 即 $\delta_1\frac{1}{w}x(s)y(s)\le\ h(s)\le\delta_2\frac{1}{w}x(s)y(s),\ s\in[0,1]$.

当 $0\le t\le s\le 1$ 时, 由 $k(t,s)$ 的性质知

$$\delta_1 k(t,s)\le h(s)\le\delta_2 k(s,t).$$

当 $0\le s\le t\le 1$ 时, 由 $k(t,s)$ 的性质知

$$\delta_1 k(t,s)\le\delta_1\frac{1}{w}x(s)y(s)\le h(s)\le\delta_2\frac{1}{w}x(s)y(s)\le\delta_2\frac{1}{w}x(t)y(s)=\delta_2 k(s,t),$$

即 (2.4) 式得证. 当 $x(0)=0, y(1)>0$ 与 $x(0)>0, y(1)=0$, 证明类似. ▮

以下设 E 为有序 Banach 空间, P 为正规锥, N 为正规常数, $C(I,E)$ 为 I 上的 E 值连续函数按最大值范数构成 Banach 空间. $K=\{u\in C(I,E)|\ u(t)\in P,\ \forall\ t\in I\}$ 为 $C(I,E)$ 中的锥. 记 $T_l=\{u\in E|\ \ \|u\|\le l\}(l>0)$ 与 $U_l=\{u\in C(I,E)|\ \ \|u\|_c\le l\}(l>0)$ 分别为空间 E 与 $C(I,E)$ 中的闭球.

定义算子 $A:K\to C^2(I,E)\cap K$, 即

$$Au(t)=\int_0^1 k(t,s)f(s,u(s))\mathrm{d}s, \tag{2.6}$$

则问题 (1.1) 的解等价于算子 A 的不动点, 以下对算子 A 应用锥上的不动点指数理论. 取 K 的子锥 $K(h,\delta_1)$, 即 $K(h,\delta_1)=\{u\in K\big|\int_0^1 h(t)u(t)\mathrm{d}t\ge\lambda_1^{-1}\delta_1 u(s),\ \forall\ s\in I\}$, $h(t),\lambda_1$ 为引理 2.1 中所定义, δ_1 在引理 2.2 中定义. 显然, $K(h,\delta_1)\backslash\{\theta\}\ne\emptyset$, 且

$$K(h,\delta_1)\subset K.$$

引理 2.3 $A(K)\subset K(h,\delta_1)$ 且 $A:K\to K$ 连续.

证 $\forall\ u\in K$, 由 $K(h,\delta_1)$ 的定义及引理 2.2, 有

$$\begin{aligned}\int_0^1 h(t)(Au)(t)\mathrm{d}t&=\int_0^1 h(t)(\int_0^1 k(t,s)f(s,u(s))\mathrm{d}s)\mathrm{d}t\\&=\int_0^1 f(s,u(s))\mathrm{d}s\int_0^1 k(s,t)h(t)\mathrm{d}t\\&=\lambda_1^{-1}\int_0^1 h(s)f(s,u(s))\mathrm{d}s\\&\ge\lambda_1^{-1}\delta_1\int_0^1 k(t,s)f(s,u(s))\mathrm{d}s\\&=\lambda_1^{-1}\delta_1 Au(t),\ \forall t\in I,\end{aligned}$$

故 $A:K\to K(h,\delta_1)$ 连续. ▌

此外我们还需要与非紧性测度及凝聚映射的不动点指数有关的下列一些结果.

引理 2.4 设 E 是 Banach 空间，若 $B\subset C(I,E)$ 有界且等度连续，则 $\alpha(B(t))$ 在 $[0,1]$ 上连续，且 $\alpha(B)=\max\limits_{0\le t\le 1}\alpha(B(t))=\alpha(B(I))$.

该引理见文献 [1] 中定理 1.1.2.

引理 2.5 设 E 是 Banach 空间，若 $J=[a,b],u\in C(J,E),\varphi\in C(J,R^+)$, 则有

$$\int_a^b\varphi(s)u(s)\mathrm{d}s\in(\int_a^b\varphi(s)\mathrm{d}s)\ \cdot\overline{\mathrm{co}}U(J),$$

其中 $U(J)=\{u(t)|\ t\in J\}$.

该引理见文献 [4] 中引理 3.

引理 2.6 设 E 是 Banach 空间， $B=\{u_n\}\subset C(I,E)$, 若存在 $g(t)\in L^1(I)$, 使得

$$\|u_n(t)\|\le g(t),\ \text{a.e.}\ \ t\in I,n=1,2,\cdots,$$

则 $\alpha(B(t))\in L^1(I)$, 且有

$$\alpha(\{\int_0^t u_n(s)\mathrm{d}s\})\le 2\int_0^t\alpha(B(s))\mathrm{d}s,\ t\in I,$$

特别当 B 有界时，上式成立.

该引理见文献 [5] 中推论 3.1(6).

引理 2.7 设 E 为 Banach 空间， P 为 E 中的锥， $\Omega\subset P$ 为有界开集， $A:P\cap\bar\Omega\to P$ 为凝聚映射，若存在 $u_0\in P\backslash\{\theta\}$, 使

$$u-Au\ne\mu u_0,\ \forall u\in\partial\Omega,\ \mu\ge 0,$$

则 $i(A,P\cap\Omega,P)=0$

该引理见文献 [6].

引理 2.8 设 E 为 Banach 空间， P 为 E 中的锥， $\Omega\subset P$ 为有界开集， $\theta\in\Omega,A:P\cap\bar\Omega\to P$ 为凝聚映射，并且满足 $Au\ne\mu u,\ \forall u\in\partial\Omega,\ \mu\ge 1$, 则 $i(A,P\cap\Omega,P)=1$.

该引理见文献 [7] 中引理 4.1.

3 超线性情形下正解的存在性

定理 3.1 设 E 为有序 Banach 空间， P 为其正规锥， $f\in C(I\times P,P)$ 把有界集映为有界集，且条件 (P) 成立，若 f 满足以下条件

(P_1) $\exists\ \ 0<L<\frac{1}{2M}$, 对任意有界的 $D\subset P\cap T_l$, 有

$$\alpha(f(I,D))\le L\alpha(D).$$

(P_2) $\exists\ \ \varepsilon_1>0$ 及 $b\in C(I,P)$, 使

$$f(t,x)\ge(\lambda_1+\varepsilon_1)x-b(t),\ \forall\ t\in I,\ x\in P.$$

(P_3) $\exists\ \ 0<\varepsilon_2<\lambda_1$ 及 $r>0$, 使

$$f(t,x)\le(\lambda_1-\varepsilon_2)x,\ \forall\ t\in I,x\in P,\ \|x\|\le r.$$

其中 $M=\max\limits_{0\leq t\leq 1}(\int_0^1 k(t,s)\mathrm{d}s)$, 则 Sturm-Liouville 问题 (1.1) 至少有一个正解.

证 因问题 (1.1) 的解等价于 (2.6) 式定义的算子 A 的不动点，要讨论 A 的不动点，首先证 A 为凝聚映射.

对任意的有界集 $B\subset K\cap U_l$, 由 f 的有界性知 $A(B)$ 等度连续. 按引理 2.4, 有

$$\alpha(A(B))=\max_{t\in I}\alpha(A(B))(t).$$

对 $\forall u\in B, t\in I$, 由引理 2.5, 有

$$\begin{aligned}(Au)(t)&=\int_0^1 k(t,s)f(s,u(s))\mathrm{d}s\\&\in(\int_0^1 k(t,s)\mathrm{d}s)\bar{\mathrm{co}}\{f(s,u(s))|\ \ s\in I\}\\&\subset(\int_0^1 k(t,s)\mathrm{d}s)\bar{\mathrm{co}}(f(I\times B(I))).\end{aligned}$$

由非紧性测度的性质并结合条件 (P_1), 有

$$\alpha(A(B))(t)\leq(\int_0^1 k(t,s)\mathrm{d}s)\alpha(f(I\times B(I)))\leq LM\alpha(B(I))\leq 2LM\alpha(B).$$

两边取最大值，有 $\alpha(A(B))\leq 2LM\alpha(B)$, 又 $0<2LM<1$, 故 $K\to K$ 为凝聚映射.

取 $R>r$ 充分大，且

$$R>N\lambda_1(\varepsilon_1\delta_1)^{-1}\Big\|\int_0^1 h(s)b(s)\mathrm{d}s\Big\|. \tag{3.1}$$

下面证对 $\forall\ \ u_0\in K(h,\delta_1)\backslash\{\theta\}$, 有

$$u-Au\neq\mu u_0,\ \forall\ \ u\in\partial U_R\cap K,\ \ \mu\geq 0, \tag{3.2}$$

事实上，若存在 $u_1\in\partial U_R\cap K$ 及 $\mu_1\geq 0$, 使

$$u_1-Au_1=\mu_1u_0, \tag{3.3}$$

由引理 2.3 知 $Au_1\in K(h,\delta_1)$, 故 $u_1\in K(h,\delta_1)$, 对 (3.3) 式两端同乘 $h(t)$ 积分，其中 $h(t)$ 为算子 T 的第一特征值 λ_1 所对应的特征函数，且由条件 (P_2), 有

$$\begin{aligned}\theta&\geq\int_0^1 h(t)(Au_1)(t)\mathrm{d}t-\int_0^1 h(t)u_1(t)\mathrm{d}t\\&=\int_0^1 h(t)(\int_0^1 k(t,s)f(s,u_1(s))\mathrm{d}s)\mathrm{d}t-\int_0^1 h(t)u_1(t)\mathrm{d}t\\&\geq\int_0^1 h(t)(\int_0^1 k(t,s)((\lambda_1+\varepsilon_1)u_1(s)-b(s))\mathrm{d}s)\mathrm{d}t-\int_0^1 h(t)u_1(t)\mathrm{d}t\\&=(\lambda_1+\varepsilon_1)\int_0^1 h(t)(\int_0^1 k(t,s)u_1(s)\mathrm{d}s)\mathrm{d}t-\int_0^1 h(t)(\int_0^1 k(t,s)b(s)\mathrm{d}s)\mathrm{d}t-\int_0^1 h(t)u_1(t)\mathrm{d}t\\&=(\lambda_1+\varepsilon_1)\int_0^1 u_1(s)\mathrm{d}s\int_0^1 k(s,t)h(t)\mathrm{d}t-\int_0^1 b(s)\mathrm{d}s\int_0^1 k(s,t)h(t)\mathrm{d}t-\int_0^1 h(t)u_1(t)\mathrm{d}t\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (\lambda_1+\varepsilon_1)\lambda_1^{-1}\int_0^1 u_1(t)h(t)\mathrm{d}t - \lambda_1^{-1}\int_0^1 h(s)b(s)\mathrm{d}s - \int_0^1 h(t)u_1(t)\mathrm{d}t \\
&= \varepsilon_1\lambda_1^{-1}\int_0^1 h(t)u_1(t)\mathrm{d}t - \lambda_1^{-1}\int_0^1 h(s)b(s)\mathrm{d}s \\
&\ge \varepsilon_1(\lambda_1^{-1})^2\delta_1 u_1(s) - \lambda_1^{-1}\int_0^1 h(s)b(s)\mathrm{d}s,
\end{aligned}
$$

即 $\int_0^1 h(s)b(s)\mathrm{d}s \ge \varepsilon_1\lambda_1^{-1}\delta_1 u_1(s) \ge \theta, \forall\ s\in I$. 两边取范数，得

$$
\Big\|\int_0^1 h(s)b(s)\mathrm{d}s\Big\| \ge \frac{\varepsilon_1\delta_1}{\lambda_1 N}\|u_1(s)\|,\ \forall\ s\in I.
$$

两边取最大值范数，得

$$
\Big\|\int_0^1 h(s)b(s)\mathrm{d}s\Big\|_c \ge \frac{\varepsilon_1\delta_1}{\lambda_1 N}\|u_1(s)\| = \varepsilon_1\delta_1(N\lambda_1)^{-1}R,
$$

即 $R\le N\lambda_1(\varepsilon_1\delta_1)^{-1}\|\int_0^1 h(s)b(s)\mathrm{d}s\|$ 这与 (3.1) 式矛盾，故反设不真， (3.2) 式成立. 又 A 为凝聚映射，故由引理 2.7, 知

$$
i(A, K\cap U_R, K) = 0, \tag{3.4}
$$

不失一般性，假设 $Au\ne u, \forall u\in\partial U_r\cap K$.

下面我们证明

$$
Au\ne \mu u, \forall u\in\partial U_r\cap K, \mu>1, \tag{3.5}
$$

事实上若 (3.5) 式不成立，则存在 $u_2\in\partial U_r\cap K$ 及 $\mu_2>1$, 使 $Au_2=\mu_2u_2$.

对上式两端同乘 $h(t)$ 积分，且由条件 (P_3), 有

$$
\begin{aligned}
\theta \le \mu_2\int_0^1 h(t)u_2(t)\mathrm{d}t &= \int_0^1 h(t)(\int_0^1 k(t,s)f(s,u_2(s))\mathrm{d}s)\mathrm{d}t \\
&\le \int_0^1 h(t)(\int_0^1 k(t,s)(\lambda_1-\varepsilon_2)u_2(s)\mathrm{d}s)\mathrm{d}t \\
&= (\lambda_1-\varepsilon_2)\lambda_1^{-1}\int_0^1 h(t)u_2(t)\mathrm{d}t.
\end{aligned}
$$

即 $\theta\le\mu_2\int_0^1 h(t)u_2(t)\mathrm{d}t \le (\lambda_1-\varepsilon_2)\lambda_1^{-1}\int_0^1 h(t)u_2(t)\mathrm{d}t$. 移项可得

$$
\theta \le (\mu_2 - (1-\varepsilon_2\lambda_1^{-1}))\int_0^1 h(t)u_2(t)\mathrm{d}t \le \theta.
$$

又因 $\mu_2>1$, 则有 $\mu_2-(1-\varepsilon_2\lambda_1^{-1})>0$, 故由上式可推出

$$
\int_0^1 h(t)u_2(t)\mathrm{d}t = \theta. \tag{3.6}
$$

又因 $u_2\in\partial U_r, \|u_2\|\ne 0$, 故存在 $s\in I$, 使 $u_2(s)>0$, 又因 $u_2\in K(h,\delta_1)$, 故

$$
\int_0^1 h(t)u_2(t)\mathrm{d}t \ge \lambda_1^{-1}\delta_1 u_2(s) > 0.
$$

这与 (3.6) 式矛盾，故 (3.5) 式成立，由引理 2.8 知

$$i(A, K\cap U_r, K)=1. \tag{3.7}$$

又因 $\bar{U_r}\subset U_R$, 由 (3.4), (3.7) 式及凝聚映射的不动点指数的可加性，得

$$i(A, K\cap(U_R\backslash\bar{U_r}), K)=-1. \tag{3.8}$$

由 (3.8) 式及凝聚映射的可解性知， A 在 $K\cap(U_R\backslash\bar{U_r})$ 中至少有不动点，则 Sturm-Liouville 问题 (1.1) 至少有一正解. ▌

注 1 定理 3.1 将文献 [3] 关于 f 一致连续这个非常强的条件改进为连续. 同时把对 f 增长限制由文献 [3] 的条件 (H2), (H3) 改进为定理 3.1 中 (P2), (P3), 将此结果作到了最优.

注 2 定理 3.1 中删去了文献 [3] 条件 (H4), 同样获得了解的存在性结果.

4 次线性情形下正解的存在性

定理 4.1 设 E 为有序 Banach 空间， P 为其正规锥，若 $f\in C(I\times P, P)$ 把有界集映为有界集，假设条件 (P) 及定理 3.1 中条件 (P_1) 成立，若 f 满足以下条件

(P_2') $\exists\ \varepsilon_1>0$ 及 $r>0$, 使

$$f(t,x)\geq(\lambda_1+\varepsilon_1)x,\ \forall\ t\in I, x\in P,\ \|x\|\leq r.$$

(P_3') $\exists\ 0<\varepsilon_2<\lambda_1$ 及 $b(t)\in C(I,P)$, 使

$$f(t,x)\leq(\lambda_1-\varepsilon_2)x+b(t),\ \forall\ t\in I,\ x\in P.$$

则 Sturm-Liouville 问题 (1.1) 至少有一个正解.

证 因问题 (1.1) 的解等价于 (2.6) 式定义的算子 A 的不动点，又 f 满足条件 (P) 及 (P_1), 故由定理 3.1 的证明知 A 为凝聚映射. 设存在常数 $r_1>0$, 对 $\forall u\in\partial Ur_1\cap K$, 假设 A 在 $\partial U_{r_1}\cap K$ 中没有不动点 (否则证明完成).

下证，对 $\forall u_0\in K(h,\delta_1)\backslash\{\theta\}$, 有

$$u-Au\neq\mu u_0,\ \forall\ u\in\partial U_r\cap K,\quad \mu>0. \tag{4.1}$$

反设 (4.1) 式不成立，即存在 $u_1\in\partial Ur_1\cap K, \mu_1>0$, 使

$$u_1-Au_1=\mu_1u_0, \tag{4.2}$$

移项，得

$$u_1=\mu_1u_0+Au_1\geq\mu_1u_0. \tag{4.3}$$

令

$$\mu^*=\sup\Big\{\mu\Big|\int_0^1h(t)u_1(t)\mathrm{d}t\geq\mu\int_0^1h(t)u_0(t)\mathrm{d}t\Big\},$$

对 (4.3) 式两边同乘 $h(t)$ 积分，有

$$\int_0^1h(t)u_1(t)\mathrm{d}t\geq\mu_1\int_0^1h(t)u_0(t)\mathrm{d}t. \tag{4.4}$$

由 μ^* 的定义知 $\mu^* \geq \mu_1 > 0$, 故有 $\int_0^1 h(t)u_1(t)\mathrm{d}t \geq \mu^* \int_0^1 h(t)u_0(t)\mathrm{d}t$, 对 (4.2) 式两边同乘 $h(t)$ 积分，又由 (4.4) 式及条件 (P_2') 有

$$\begin{aligned}\int_0^1 h(t)u_1(t)\mathrm{d}t &= \int_0^1 h(t)(Au_1)(t)\mathrm{d}t + \mu_1 \int_0^1 h(t)u_0(t)\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 h(t)(\int_0^1 k(t,s)f(s,u_1(s))\mathrm{d}s)\mathrm{d}t + \mu_1 \int_0^1 h(t)u_0(t)\mathrm{d}t \\ &\geq (\lambda_1+\varepsilon_1)\int_0^1 u_1(s)\mathrm{d}s \int_0^1 k(s,t)h(t)\mathrm{d}t + \mu_1 \int_0^1 h(t)u_0(t)\mathrm{d}t \\ &= (\lambda_1+\varepsilon_1)\lambda_1^{-1}\int_0^1 h(t)u_1(t)\mathrm{d}t + \mu_1 \int_0^1 h(t)u_0(t)\mathrm{d}t \\ &\geq (1+\lambda_1^{-1}\varepsilon_1)\mu^* \int_0^1 h(t)u_0(t)\mathrm{d}t + \mu_1 \int_0^1 h(t)u_0(t)\mathrm{d}t \\ &= ((1+\lambda_1^{-1}\varepsilon_1)\mu^* + \mu_1)\int_0^1 h(t)u_0(t)\mathrm{d}t \\ &> (\mu^*+\mu_1)\int_0^1 h(t)u_0(t)\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

这与 μ^* 的定义矛盾，故反设不真， (4.1) 式成立，由引理 2.7 知

$$i(A, K\cap U_r, K) = 0. \tag{4.5}$$

取 R 充分大且满足

$$R > \max\Big\{(\varepsilon_2\delta_1)^{-1}\lambda_1 N\Big\|\int_0^1 h(t)b(t)\mathrm{d}t\Big\|, r_1\Big\}. \tag{4.6}$$

下面要证

$$Au \neq \mu u, \forall u \in \partial U_R \cap K, \mu > 1, \tag{4.7}$$

反设存在 $u_2 \in \partial U_R \cap K$ 及 $\mu_2 > 1$, 使

$$Au_2 = \mu_2 u_2, \tag{4.8}$$

对 (4.8) 式两端同乘 $h(t)$ 积分，且由 (P_3'), 知

$$\begin{aligned}\mu_2\int_0^1 h(t)u_2(t)\mathrm{d}t &= \int_0^1 h(t)(\int_0^1 k(t,s)f(s,u_2(s))\mathrm{d}s)\mathrm{d}t \\ &\leq (\lambda_1-\varepsilon_2)\int_0^1 h(t)\int_0^1 k(t,s)u_2(s)\mathrm{d}s + \int_0^1 h(t)(\int_0^1 k(t,s)b(s)\mathrm{d}s)\mathrm{d}t \\ &= (1-\varepsilon_2\lambda_1^{-1})\int_0^1 h(t)u_2(t)\mathrm{d}t + \lambda_1^{-1}\int_0^1 h(t)b(t)\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

又因 $\theta \leq \int_0^1 h(t)u_2(t)\mathrm{d}t < \mu_2 \int_0^1 h(t)u_2(t)\mathrm{d}t$, 故有

$$\begin{aligned}\int_0^1 h(t)u_2(t)\mathrm{d}t &< \mu_2\int_0^1 h(t)u_2(t)\mathrm{d}t \\ &< (1-\varepsilon_2\lambda_1^{-1})\int_0^1 h(t)u_2(t)\mathrm{d}t + \lambda_1^{-1}\int_0^1 h(t)b(t)\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

即 $\varepsilon_2\int_0^1 h(t)u_2(t)\mathrm{d}t<\int_0^1 h(t)b(t)\mathrm{d}t$, 又因 $A(K)\subset K(h,\delta_1)$, 故

$$\theta\leq\varepsilon_2\delta_1\lambda_1^{-1}u_2(s)<\int_0^1 h(t)b(t)\mathrm{d}t. \tag{4.9}$$

对 (4.9) 式两边取范数，得

$$\varepsilon_2\delta_1\lambda_1^{-1}\|u_2(s)\|<N\Big\|\int_0^1 h(t)b(t)\mathrm{d}t\Big\|.$$

对此式再取最大值范数

$$\varepsilon_2\delta_1\lambda_1^{-1}\|u_2\|_c<N\Big\|\int_0^1 h(t)b(t)\mathrm{d}t\Big\|,\quad R<\lambda_1 N(\varepsilon_2\delta_1)^{-1}\Big\|\int_0^1 h(t)b(t)\mathrm{d}t\Big\|.$$

这与 (4.6) 式矛盾，故 (4.7) 式成立，由引理 2.8, 知

$$i(A,K\cap U_R,K)=1, \tag{4.10}$$

由 (4.10) 式及凝聚映射的不动点指数的可加性，即 (4.5) 与 (4.10) 式，知

$$i(A,K\cap(U_R\backslash\bar{U}_r),K)=1. \tag{4.11}$$

由凝聚映射的不动点指数的可解性，知 A 在 $K\cap(U_R\backslash\bar{U}_r)$ 中存在不动点，则 Sturm-Liouville 问题 (1.1) 至少有一正解. ▮

注 3 文献 [3] 中的条件 (H_1) 中的 $M=|\max\limits_{0\leq t\leq 1}k(t,s)|$, 而本文条件 (P_1) 中

$$M=\max_{0\leq t\leq 1}(\int_0^1 k(t,s)\mathrm{d}s),$$

这两种情形区别很大，如当方程 (1.1) 中 $p(t)=1,q(t)=0,t\in I$, 此时所对应的前一 $M=\frac{1}{4}$, 而后一 $M=\frac{1}{8}$.

注 4 定理 4.1 的结论是问题 (1.1) 在 Banach 空间中次线性情形下正解存在的新结论.

若对非线性项要求比定理 3.1 及定理 4.1 中强，则需以下条件

(P_1') $\exists 0<L<\frac{1}{4M}$, 对任意有界的 $D\subset P\cap T_l$ 有 $\alpha(f(t,D))\leq L\alpha(D)$.

定理 4.2 设 E 为有序的 Banach 空间， P 为其正规锥， $f\in C(I\times P,P)$ 把有界集映为有界集，假设条件 (P), (P_1') 成立，若定理 3.1 中条件 $(\mathrm{P}_2)(\mathrm{P}_3)$ 或定理 4.1 中条件 $(\mathrm{P}_2')(\mathrm{P}_3')$ 之一成立，则 Sturm-Liouville 问题 (1.1) 至少有一正解.

证 设 A 为 (2.6) 式所定义的算子，则问题 (1.1) 的解等价于算子 A 的不动点，又因条件 $(\mathrm{P}_2)(\mathrm{P}_3)$, 或 $(\mathrm{P}_2')(\mathrm{P}_3')$ 成立，由定理 3.1 及定理 4.1 的证明知，下只需讨论 A 为凝聚映射.

对 $\forall\ B\subset K\bigcap U_l$ 有界，存在可数子集 $B_1=\{u_n\}$, 使 $\alpha(A(B))\leq 2\alpha(A(B_1))$, 而且有 $\alpha(A(B_1)(t))=\max\limits_{t\in I}\alpha(A(B_1)(t))$, 从而由引理 2.6, 并结合 (P_1'), 有

$$\begin{aligned}\alpha(A(B_1)(t))&=\alpha(\{\int_0^1 k(t,s)f(s,u_n(s))\mathrm{d}s|n\in N\})\\&\leq 2\int_0^1 k(t,s)\alpha(\{f(s,u_n(s))|n\in N\})\mathrm{d}s\\&\leq 2\int_0^1 k(t,s)L\alpha(B_1(s))\mathrm{d}s\\&\leq 2L\int_0^1 k(t,s)\mathrm{d}s\alpha(B_1)\leq 2L\int_0^1 k(t,s)\mathrm{d}s\alpha(B).\end{aligned}$$

对上式两边取最大值，得

$$\alpha(A(B_1)) \le 2LM\alpha(B), \quad \alpha(A(B)) \le 2\alpha(A(B_1)) \le 4LM\alpha(B),$$

又因 $0 < L < \frac{1}{4M}$, 从而 A 为凝聚映射. ∎

注 5 与定理 4.1 相比，条件 (P_1') 比条件 P_1 中对非线性项要求强，故对 L 的要求由 $0 < L < \frac{1}{2M}$ 改为 $0 < L < \frac{1}{4M}$.

参 考 文 献

[1] 郭大钧，孙经先．抽象空间常微分方程．济南：山东科学技术出版社， 1989

[2] Guo D, Lakshmikantham V. Multiple solutions of two-point boundary value problems of ordinary differential equations in Banach spaces. J Math Anal Appl, 1988, **129**: 211–222

[3] Lou Bendong. Solutions of superlinear Sturm-Liouville problems in Banach spaces. J Math Anal Appl, 1996, **201**: 169–179

[4] 李永祥．有序 Banach 空间常微分方程的正周期解．西北师范大学学报 (自然科学版), 2002, **38**(1): 1–5

[5] Heinz H R. On the behaviour of measure of noncompactness with respect to differention and integration of vector valued functions. J Nonlinear Anal, 1983, **7**: 1351–1371

[6] 余庆余．半序 Banach 空间中凝聚映射及其正不动点．兰州大学学报 (自然科学版), 1979, **2**: 23–32

[7] 郭大钧．非线性泛函分析．济南：山东科技技术出版社， 1985

Positive Solutions of Nonlinear Sturm-Liouville Boundary Value Problems in Banach Spaces

[1,2]Zhang Lingzhong [2]Li Yongxiang

([1] *College of Science, Gansu Agricultural University, Gansu Lanzhou 730070;*

[2] *College of Mathematics and Information Science, Northwest Normal University, Gansu Lanzhou 730070*)

Abstract: The existence of the positive solutions to the Sturm-Liouville problem in Banach spaces is discussed in the superlinear or sublinear case by using the fixed point theory of condensing mapping and doing precise computation of measure of noncompactess and using the eigenvalues corresponding to the relevant linear equations.

Key words: Boundary value problem; Measure of noncompactness; Fixed point index; Positive solution.

MR(2000) Subject Classification: 60F15; 60G15; 60F17