2009,**29A**(3):593–596

Acta Mathematica Scientia 数学物理学报

非临界 Liouville 弦模型中单圈自由能的计算 *

颜骏　孙威立

(四川师范大学物理系　成都 610066)

摘要：该文采用路径积分方法计算了非临界 Liouville 弦模型中单圈自由能，结果表明 $D=27$ 时的临界温度与共形物质场的中心荷有关，并获得了自由能的渐近表达式.

关键词：非临界 Liouville 弦；温度；单圈自由能.

MR(2000) 主题分类：83E30; 81T30; 83D05　**中图分类号**：O164　**文献标识码**：A

文章编号：1003-3998(2009)03-593-04

1　引言

非临界 Liouville 弦模型不仅和 2 维量子引力有密切关系，而且可应用于研究随机面的统计物理性质． Polyakov 首先采用路径积分方法研究了随机面的性质，并得到了非临界玻色弦的 Liouville 作用量 [1]，随后， Zamolodchkov 推导了随机面模型的熵 [2]. Gupta 等人根据 Polchinski 的路径积分方法 [3] 计算了 Liouville 场的单圈配分函数，并发现中心荷 $c>1$ 时配分函数有可能发散 [4]. Ferrer 等人用算子方法计算了背景电场下弦气体的单圈自由能 [5–6]，Gupta 等人的工作没有考虑弦自身的作用，而且研究的对象是一个零温度模型． Ferrer 等人的模型没有考虑 Liouville 场和共形物质场的贡献. 因此有必要重新考查有限温度下 Liouville 弦模型统计物理性质，这正是本文的研究目的.

2　路径积分与单圈自由能

Liouville 弦模型中的单圈配分函数可定义为

$$Z[A,\tau]=\int[Dg][DX][D\phi]\{\exp(-S)\}\delta\Big(\int \mathrm{d}^2\sigma\sqrt{g}\mathrm{e}^{\alpha\phi}-A\Big)JZ_M(\tau), \tag{2.1}$$

式中，作用量为

$$S=\int \mathrm{d}^2\sigma\sqrt{g}\Big[\frac{1}{2}g^{ab}\partial_a X^\mu\partial_b X^\mu-\frac{1}{8\pi}(\phi\triangle\phi+QR\phi)\Big]. \tag{2.2}$$

g^{ab} 是 2 维世界面度规， R 是曲率， $[D]$ 是路径积分测度． X^μ 是玻色弦坐标， ϕ 是 Liouville 场， $\triangle$ 是拉氏算子， A 是随机面面积． J 是 Faddeev-Popov 鬼场的贡献， $Z_M(\tau)$

收稿日期：2007-07-12; 修订日期：2008-09-27

E-mail: yanjun5@sina.com

* 基金项目：四川师范大学重点研究课题 (061k004) 资助

是共形物质场的的配分函数. 2 维量子引力的标度指数为

$$\alpha=-\frac{1}{2\sqrt{3}}[\sqrt{25-c}\pm\sqrt{1-c}], \tag{2.3}$$

c 是共形物质场的中心荷. 当 $R=0$, 对 D 维玻色弦的单圈路径积分为 [3]

$$\int[Dg][DX]\Big\{\exp\Big(-\int \mathrm{d}^2\sigma\sqrt{g}\Big[\frac{1}{2}g^{ab}\partial_a X^\mu\partial_b X^\mu\Big]\Big)\Big\}\propto\int\frac{\mathrm{d}^2\tau}{\tau_2^2}[\tau_2\mathrm{e}^{-\frac{\pi\tau_2}{3}}|f(\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\tau})|^4]^{-\frac{D}{2}+1}, \tag{2.4}$$

这里, $\tau=\tau_1+\mathrm{i}\tau_2$ 是世界面复坐标. $f(\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\tau})=\prod\limits_n(1-\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}n\tau})$, 对 Liouville 场的单圈路径积分为 [4]

$$\int[D\phi]\Big\{\exp\Big(\frac{1}{8\pi}\int\mathrm{d}^2\sigma\sqrt{g}(\phi\triangle\phi)\delta\Big(\int\mathrm{d}^2\sigma\sqrt{g}\mathrm{e}^{\alpha\phi}-A\Big)\Big)\Big\}\propto\frac{\sqrt{\tau_2}}{\alpha A}[\tau_2^2\mathrm{e}^{-\frac{\pi\tau_2}{3}}|f(\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\tau})|^4]^{-\frac{1}{2}}. \tag{2.5}$$

为了引入温度参量 β , 可对玻色弦坐标 X 采用边界条件

$$X^\mu(\sigma_1,\sigma_2+1)=X^\mu(\sigma_1,\sigma_2)+r\beta\delta_0^\mu, \tag{2.6}$$

$$X^\mu(\sigma_1+1,\sigma_2)=X^\mu(\sigma_1,\sigma_2), \tag{2.7}$$

r 是整绕数, 这时路径积分测度保持不变. 考虑到 Faddeev-Popov 鬼场 J 和多个共形物质场 $Z_M(\tau)$ 如下的贡献

$$J=\frac{1}{2\tau_2^2}[\tau_2\mathrm{e}^{-\frac{\pi\tau_2}{3}}|f|^4],\quad Z_M(\tau)\to\mathrm{e}^{\frac{\pi\tau_2 c}{6}}. \tag{2.8}$$

取非临界维数 $D=27$, 根据边界条件 (2.6)(2.7) 式和单圈路径积分 (2.4)(2.5) 式, 我们得到单圈自由能

$$F(\beta)\propto\frac{1}{\alpha A}\int_\Gamma\mathrm{d}^2\tau\frac{1}{\tau_2^{16}}\mathrm{e}^{(4+\frac{c}{6}n)\pi\tau_2}|f|^{-48}\sum_{r=1}^{\infty}\mathrm{e}^{-\frac{r\beta^2}{2\tau_2}}. \tag{2.9}$$

这里积分区域为 $\Gamma:\quad -1/2\le\tau_1\le 1/2,\quad 0\le\tau_2\le+\infty$.

3 $D=27$ 时的临界温度与渐近自由能

取定积分区域后, 单圈自由能 (2.9) 可重新表示为

$$F(\beta)\propto\frac{1}{\alpha A}\int_{-1/2}^{1/2}\mathrm{d}\tau_1\int_0^\infty\mathrm{d}\tau_2\frac{1}{\tau_2^{16}}\mathrm{e}^{(4+\frac{c}{6}n)\pi\tau_2}|f|^{-48}\sum_{r=1}^{\infty}\mathrm{e}^{-\frac{r\beta^2}{2\tau_2}}. \tag{3.1}$$

如设 $x=\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\tau}=\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\tau_1}\mathrm{e}^{-2\pi\tau_2}$, 那么根据解析数论的结果有 [7]

$$|f|^{-48}=\Big|\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^n)\Big|^{-48}=\Big|1+\sum_{n=1}^{\infty}P(n)x^n\Big|^{48}, \tag{3.2}$$

并且

$$\Big|1+\sum_{n=1}^{\infty}P(n)x^n\Big|^{48}\le\Big[1+\sum_{n=1}^{\infty}P(n)\mathrm{e}^{-2\pi\tau_2 n}\Big]^{48}=1+\sum_{n=1}^{\infty}P_{48}(n)\mathrm{e}^{-2\pi\tau_2 n}, \tag{3.3}$$

这里， n 是整数． $P_{48}(n)$ 的渐近表达式为

$$P_{48}(n) \to n^{-\frac{51}{4}} \exp[4\pi(2n)^{\frac{1}{2}}], \tag{3.4}$$

由 (3.1)–(3.3) 式得

$$F(\beta) \propto \frac{1}{\alpha A}\int_0^\infty \mathrm{d}\tau_2 \frac{1}{\tau_2^{16}} \sum_{n=n_0}^{\infty} P_{48}(n)\mathrm{e}^{-2\pi\tau_2[(1-\frac{c}{12})n-2]} \sum_{r=1}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{r\beta^2}{2\tau_2}}. \tag{3.5}$$

令

$$2\pi\Big[(1-\frac{c}{12})n-2\Big]\tau_2 = t, \tag{3.6}$$

那么自由能 (3.5) 变为

$$\begin{aligned} F(\beta) &\propto \frac{1}{\alpha A}\sum_{n=n_0}^{\infty}\sum_{r=1}^{\infty} P_{48}(n)\int_0^\infty \mathrm{d}t t^{-15-1}\mathrm{e}^{-t-\frac{Z^2}{4t}} \\ &\propto \frac{1}{\alpha A}\sum_{n=n_0}^{\infty}\sum_{r=1}^{\infty} P_{48}(n)\Big(\frac{r^2\beta^2}{4\pi(1-c/12)n}\Big)^{-\frac{15}{2}} K_{15}(Z). \end{aligned} \tag{3.7}$$

式中， $K_{15}(Z)$ 是修正的贝塞尔函数， $Z=2r\beta\sqrt{\pi(1-\frac{c}{12})n}$, 当 $n\to\infty$, $K_{15}(Z)$ 的渐近性质为

$$K_{15}(Z) \to Z^{-\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-Z}. \tag{3.8}$$

将 (3.4) 和 (3.8) 式代入 (3.7) 式得自由能的渐近表达式

$$\begin{aligned} F(\beta) &\to \frac{1}{\alpha A}\sum_{n=n_0}^{\infty}\sum_{r=1}^{\infty} n^{-\frac{51}{4}}\exp[4\pi(2n)^{1/2}]\Big(\frac{r^2\beta^2}{\pi(1-\frac{c}{12})n}\Big)^{\frac{-15}{2}} \frac{\exp[-r\beta(4\pi(1-\frac{c}{12})n)^{\frac{1}{2}}]}{[2r\beta(\pi(1-\frac{c}{12})n)^{\frac{1}{2}}]^{\frac{1}{2}}} \\ &\to \frac{\beta^{-31/2}}{\alpha A}(1-c/12)^{29/4}\sum_{n=n_0}^{\infty}\sum_{r=1}^{\infty}\exp[4\pi(2n)^{\frac{1}{2}} - r\beta(4\pi(1-c/12)n)^{\frac{1}{2}}]. \end{aligned} \tag{3.9}$$

自由能的主要贡献来 $r=1$ 项，由 (3.9) 式得如下临界温度

$$\beta_c = \sqrt{\frac{8\pi}{1-\frac{c}{12}}}, \tag{3.10}$$

临界温度时的自由能渐近表达式为

$$F(\beta_c) \to \frac{\beta_c^{-\frac{31}{2}}}{\alpha A}\Big(1-\frac{c}{12}\Big)^{\frac{29}{4}} = \frac{1}{\alpha A}\Big(1-\frac{c}{12}\Big)^{15}. \tag{3.11}$$

4 讨论

上述的计算结果表明， $D=27$ 时的 Liouville 弦单圈自由能与共形物质场的中心荷 c 有关，同时，自由能渐近表达式也依赖于中心荷 c, 这一结论可以推广到任意时空维数． Ferrer 等人用算子方法计算的背景电场下弦气体临界温度与 (3.10) 式类似 [5], 所以在具体物理模型的中心荷 c 正比于背景电场强度．本文只研究了 Liouville 弦的单圈自由能，高亏格黎曼面上的自由能可采用几何与算子方法加以计算 [8–11]. 另外，弦气体的自由能对极早期宇宙的诞生与演化有重要影响 [12], 研究 Liouville 弦共形场中心荷 c 的宇宙学意义将是一个令人感兴趣的课题.

参 考 文 献

[1] Polyakov A. Quantum geometry of bosonic string. Phys Lett, 1981, **B103**: 207–210

[2] Zamolodchkov A. On the entropy of random surfaces. Phys Lett, 1981, **B117**: 87–90

[3] Polchinski J. Evaluation of the one loop string path integral. Comm Math Phys, 1986, **104**: 37–47

[4] Gupta A, Trivedi S, Wise M. Random surfaces in conformal gauge. Nucl Phys, 1990, **B340**: 475–490

[5] Ferrer E, Fradkin E, de la Incera V. Effect of background field on the hagedorn temperature. Phys Lett,1990, **B248**: 281–287

[6] Odintsov S. Vacuum energy for a non-critical closed string. Phys Lett, 1990, **B237**: 63–67

[7] McClain B, Roth B. Modular invariance of string free energy. Comm Math Phys, 1987, **111**: 539–553

[8] Yan Jun, Li Jian Nan, Hu Shi Ke. The loop cosmological constant in compact space S^1 and modui space $C_+/SL(2,Z)$. Chinese Phys Lett, 1989, **6**: 425-428

[9] Yan Jun, Li Jian Nan, Hu Shi Ke. The world sheet instanton on cosmic orbifold. Chinese Phys Lett, 1990, **7** : 381–384

[10] 颜骏，胡诗可．高亏格 Riemann 面上的世界面孤子与自由能．高能物理与核物理， 1991, **15**: 414–419

[11] 颜骏，胡诗可．亏格 g Riemann 曲面上比热的模对偶性质．高能物理与核物理， 1993, **17**: 534–537

[12] 颜骏，陶必友，王顺金．黎曼面上的的温度对偶性与亏格数 $g=1$ 和 2 的弦宇宙学解．高能物理与核物理， 1999, **23**: 655–664

The Calculation of One Loop Free Energy in Non-Critical Liouville String Model

Yan Jun Shun Weili

(Department of Physics, Sichuan Normal University, Chengdu 610066)

Abstract: In this paper, the one loop free energy in non-critical Liouville string model is calculated by using path integral method. The result shows that critical temperature depends on the central charge of conformal matter field at $D=27$, and the asymptotic expression of free energy is also obtained.

Key words: Non-Critical Liouville string; Temperature; One loop free energy.

MR(1998) Subject Classification: 83E30; 81T30; 83D05