2005, **25A**(3): 374－380

Acta Mathematica Scientia 数学物理学报

二阶含阻尼项椭圆型方程的区域振动准则*

徐志庭　　　　邢鸿雁

(华南师范大学数学系　广州 510631)　　(广东工业大学应用数学系　广州 510090)

摘要：籍用平均函数和积分算子，对二阶含阻尼项椭圆型微分方程

$$\sum_{i,j=1}^{N} D_i[a_{ij}(x)D_jy]+\sum_{i=1}^{N} b_i(x)D_iy+q(x)f(y)=0$$

建立了一些区域振动准则，这些准则不同于已知的依赖于整个区域 $\Omega(1)$ 的性质的结果，而是仅依赖于区域 $\Omega(1)$ 的一列子区域的性质.

关键词：区域振动；二阶含阻尼项椭圆型微分方程；平均函数；积分算子.

MR(2000)主题分类：35J60；34C35；34K25　**中图分类号**：O175.25；O175.26　**文献标识码**：A

文章编号：1003-3998(2005)03-374-07

1 引言

考虑二阶含阻尼项椭圆型微分方程

$$\sum_{i,j=1}^{N} D_i[a_{ij}(x)D_jy]+\sum_{i=1}^{N} b_i(x)D_iy+q(x)f(y)=0, \tag{1.1}$$

其中 $x=(x_1,\cdots,x_N)\in R^N$，Euclidean 模记为 $|x|$，$D_i=\partial/\partial x_i, i=1,\cdots,N$. 对正常数 $a>0$，定义 $\Omega(a)=\{x\in R^N: |x|\geqslant a\}$ 和 $S_a=\{x\in R^N: |x|=a\}$.

全文假设下列基本条件成立

(A$_1$)　$f\in C^1(R,R)$，$yf(y)>0$ 和 $f'(y)\geqslant k>0$，对 $y\neq 0$；

(A$_2$)　$q\in C_{\rm loc}^{\mu}(\Omega(1),R)$，$b_i\in C_{\rm loc}^{1+\mu}(\Omega(1),R)$，$i=1,\cdots,N$，$\mu\in(0,1)$；

(A$_3$)　$A=(a_{ij})_{N\times N}$，$a_{ij}\in C_{\rm loc}^{1+\mu}(\Omega(1),R)$，$\mu\in(0,1)$，$i,j=1,\cdots,N$，是实对称正定矩阵函数. 设 $\lambda_{\max}(x)$ 是矩阵 A 的最大特征值，假设存在函数 $\lambda\in C(R^+,R^+)$，使得

$$\lambda(r)\geqslant \max_{|x|=r}\lambda_{\max}(x)\quad (r>0).$$

称一个函数 $y\in C_{\rm loc}^{2+\mu}(\Omega(1))$，$\mu\in(0,1)$，为方程(1.1)的解，如果 $y(x)$ 在域 $\Omega(1)$ 上几乎处处满足方程(1.1). 以后，我们总是假设方程(1.1)在域 $\Omega(1)$ 上存在这样的解[1]. 方程(1.1)的一个解 $y(x)$ 称为振动的，如果对任意常数 $a>1$，$y(x)$ 在域 $\Omega(a)$ 上有零点，否则称之为非振动. 如果方程(1.1)的所有解均振动，则称方程(1.1)振动.

方程(1.1)包含如下方程

$$\sum_{i,j=1}^{N} D_i[a_{ij}(x)D_jy]+q(x)f(y)=0, \tag{1.2}$$

收稿日期：2004-01-26

* E-mail: xztxhyyj@public.guangzhou.gd.cn

作为特殊形式. 关于方程(1.1)的振动性问题已被许多作者利用不同的方法进行研究. 特别，1980 年，Noussair 和 Swanson[2] 首次引入 N-维向量型 Riccati 变换

$$\omega(x)=-\frac{\alpha(|x|)}{f(y(x))}(A\nabla y)(x), \tag{1.3}$$

(这里 $\alpha\in C^2(R^+,R^+)$，∇y 表示 y 的散度)，并成功地把著名的 Wintner 定理[3] 推广到方程(1.2)，综述性文献[4] 介绍了这一领域直到 1979 年的工作. 最近，文[5]通过利用文[6]的某些技巧，对方程(1.2)建立了 Philos 型振动准则. 但这些结果都涉及方程(1.2)的系数函数 q 在整个区域 $\Omega(1)$ 的行为，而对 q 在域 $\Omega(1)$ 的“不良”行为(比如 $\int_{\Omega(1)}q(x)\mathrm{d}x=-\infty$)，其结果无法应用方程(1.2).

运用发端于文[2] 和[7] 的某些思想，籍用平均函数和积分算子，在本文，我们对一般形式的方程(1.1) 建立若干个区域振动准则，这些准则仅依赖方程(1.1)(或 a_{ij}，b_i 和q) 在区域$\Omega(1)$ 的子区域的性质. 我们的结果涉及到 Kamenev 型[8] 的条件，且改进和推广文[5] 的结果，同时还可运用于$\int_{\Omega(1)}q(x)\mathrm{d}x=-\infty$ 情形. 所得结果的优越性将由给出的例子予以说明. 而据我们所知，对含阻尼项的椭圆型方程(1.1)振动性的研究工作(尤其函数 b_i 和 q 都可变号时)并不多见.

2 主要结果

以下称一个函数 $H:=H(r,s)$属于函数类 $\mathscr{H}$,记为 $H\in\mathscr{H}$, 如果 $H\in C(D,R^+)$ ($D=\{(r,s):-\infty<s\leqslant r<\infty\}$,$R^+=(0,\infty)$),满足

$$H(r,r)=0,\ H(r,s)>0 \text{ 对 } r>s \tag{2.1}$$

且在 D 上有偏导数 $\partial H/\partial r$ 和 $\partial H/\partial s$, 使得

$$\frac{\partial H}{\partial r}=h_1(r,s)H(r,s) \text{ 和} \frac{\partial H}{\partial s}=-h_2(r,s)H(r,s), \tag{2.2}$$

其中 $h_1,h_2\in L_{\mathrm{loc}}(D,R)$.

设 $\rho\in C([1,\infty),R^+)$和 $\kappa\in C([1,\infty),R)$,定义积分算子 $X_{\tau,r}^{H;\rho}$和 $Y_{\tau,r}^{H;\rho}$为

$$X_{\tau,r}^{H;\rho}(\kappa)=\int_\tau^r H(s,\tau)\kappa(s)\rho(s)\mathrm{d}s \text{ 和 } Y_{\tau,r}^{H;\rho}(\kappa)=\int_\tau^r H(r,s)\kappa(s)\rho(s)\mathrm{d}s,$$

对 $r\geqslant\tau\geqslant 1$.

为简便，对任意给定函数 $\Phi(r)\in C^1([1,\infty),R^+)$和$(\lambda\phi)\in C^1([1,\infty),R)$,定义函数

$$\Theta(r)=\Phi(r)\left\{\int_{S_r}[q(x)-\frac{1}{4k}B^TA^{-1}B-\frac{1}{2k}\sum_{i=1}^N D_ib_i]\mathrm{d}\sigma+\frac{k}{\omega}\lambda(r)\phi^2(r)r^{1-N}-[\lambda(r)\phi(r)]'\right\}$$

和
$$p(r)=-[\frac{\Phi'(r)}{\Phi(r)}+\frac{2k}{\omega}\phi(r)r^{1-N}],\ g(r)=\frac{\omega}{k}\lambda(r)\Phi(r)r^{N-1},$$

其中 $B=(b_1(x),\cdots,b_N(x))^T$,$\mathrm{d}\sigma$ 表示 R^N 的球面积分，ω 表示 N-维单位球面面积.

受 Noussair 和 Swanson[2] 工作启发，我们引入不同于(1.3)的 N-维向量型 Riccati 变换

$$W(x)=\frac{1}{f(y)}(A\nabla y)(x)+\frac{1}{2k}B. \tag{2.3}$$

值得指出的是，(2.3)式中项$\frac{1}{2k}B$ 的出现极为重要，否则，我们的方法不能运用于含阻

尼项椭圆型方程(1.1)[2,4,5]. 下面的引理 2.1 是文[2]引理 1 到方程(1.1)的推广，它对建立方程(1.1)振动性准则极为有用.

引理 2.1 设 $y(x)$ 是方程(1.1)在域 $\Omega(b)(b>1)$ 的一个正解，并令 $W(x)$ 如(2.3)式定义，则

$$\operatorname{div}W(x)\leqslant -kW^TA^{-1}W-q(x)+\frac{1}{4k}B^TA^{-1}B+\frac{1}{2k}\sum_{i=1}^{N}D_ib_i. \tag{2.4}$$

证 对 $W(x)$ 的第 i 个分量求关于 x_i 的偏导数，得

$$D_iW_i(x)=-\frac{f'(y)}{f^2(y)}D_iy\Big(\sum_{i=1}^{N}a_{ij}D_jy\Big)+\frac{1}{f(y)}D_i\Big(\sum_{j=1}^{N}A_{ij}D_jy\Big)+\frac{1}{2k}D_ib_i,\ i=1,\cdots,N.$$

对 i 求和，并利用(1.1)和(2.3)式，有

$$\begin{aligned}\operatorname{div}W(x)&=-\frac{f'(y)}{f^2(y)}(\nabla y)^TA\nabla y-\frac{1}{f(y)}[q(x)f(y)+B^T\nabla y]+\frac{1}{2k}\sum_{i=1}^{N}D_ib_i\\&\leqslant -k\Big[W-\frac{1}{2k}B\Big]^TA^{-1}\Big[W-\frac{1}{2k}B\Big]-q(x)-B^TA^{-1}\Big[W-\frac{1}{2k}B\Big]+\frac{1}{2k}\sum_{i=1}^{N}D_ib_i\\&=-kW^TA^{-1}W-q(x)+\frac{1}{4k}B^TA^{-1}B+\frac{1}{2k}\sum_{i=1}^{N}D_ib_i.\end{aligned}$$ ▌

定理 2.1 如果对任意 $T\geqslant1$, 存在函数 $H\in\mathscr{H},\rho,\Phi\in C^1([1,\infty),R^+)$，$(\lambda\phi)\in C^1([1,\infty),R)$ 和常数 $a,b,c\in R^+$, 使得 $T\leqslant a<c<b$ 和

$$\frac{1}{H(c,a)}X_{a,c}^{H;\rho}\Big(\Theta-\frac{1}{4}g\Big[h_1-p+\frac{\rho'}{\rho}\Big]^2\Big)+\frac{1}{H(b,c)}Y_{a,c}^{H;\rho}\Big(\Theta-\frac{1}{4}g\Big[h_2+p-\frac{\rho'}{\rho}\Big]^2\Big)>0, \tag{2.5}$$

则方程(1.1)振动.

证 设 $y(x)$ 是方程(1.1)的一个非振动解. 不失一般性，假设在 $\Omega(T_0)$ 上 $y(x)>0$，对某 $T_0\geqslant a$. 定义

$$Z(r)=\Phi(r)\Big[\int_{s_r}W(x)\cdot\upsilon(x)\mathrm{d}\sigma+\lambda(r)\phi(r)\Big],\ 对\ r\geqslant1, \tag{2.6}$$

其中 $\upsilon(x)=x/|x|\ (x\neq0)$, 表示单位外法向量. 依 Green 公式，并利用(2.4)式，我们有

$$\begin{aligned}Z'(r)&=\frac{\Phi'(r)}{\Phi(r)}Z(r)+\Phi(r)\Big\{\int_{S_r}\operatorname{div}W(x)\mathrm{d}\sigma+[\lambda(r)\phi(r)]'\Big\}\\&\leqslant\frac{\Phi'(r)}{\Phi(r)}Z(r)-\Phi(r)\Big\{k\int_{s_r}(W^TA^{-1}W)(x)\mathrm{d}\sigma\\&\quad+\int_{s_r}\Big[q(x)-\frac{1}{4k}B^TA^{-1}B-\frac{1}{2k}\sum_{i=1}^{N}D_ib_i\Big]\mathrm{d}\sigma-[\lambda(r)\eta(r)]'\Big\},\end{aligned} \tag{2.7}$$

由(A_3)，知 $$(W^TA^{-1}W)(x)\geqslant\lambda_{\max}^{-1}(x)\,|W(x)|^2.$$

依 Schwartz 不等式

$$\int_{S_r}|W(x)|^2\mathrm{d}\sigma\geqslant\frac{r^{1-N}}{\omega}\Big[\int_{S_r}W(r)\cdot\upsilon(x)\mathrm{d}\sigma\Big]^2.$$

由(2.7)式，知

$$\begin{aligned}Z'(x)&\leqslant\frac{\Phi'(r)}{\Phi(r)}Z(r)-\Phi(r)\Big\{\frac{kr^{1-N}}{\omega\lambda(r)}\Big[\int_{S_r}W(x)\cdot\upsilon(x)\mathrm{d}\sigma\Big]^2\\&\quad+\int_{S_r}\Big[q(x)-\frac{1}{4k}B^TA^{-1}B-\frac{1}{2k}\sum_{i=1}^{N}D_ib_i\Big]\mathrm{d}\sigma-[\lambda(r)\phi(r)]'\Big\}\end{aligned}$$

$$=\frac{\Phi'(r)}{\Phi(r)}Z(r)-\Phi(r)\left\{\frac{kr^{1-N}}{\omega\lambda(r)}\left[\frac{Z(r)}{\Phi(r)}-\lambda(r)\phi(r)\right]^2\right.$$

$$\left.+\int_{S_r}\left[q(x)-\frac{1}{4k}B^TA^{-1}B-\frac{1}{2k}\sum_{i=1}^{N}D_ib_i\right]\mathrm{d}\sigma-[\lambda(r)\phi(r)]'\right\}$$

$$=-\Theta(r)-p(r)Z(r)-\frac{1}{g(r)}Z^2(r),$$

即

$$\Theta(r)\leqslant -Z'(r)-p(r)Z(r)-\frac{1}{g(r)}Z^2(r),\ 对\ r>T_0. \tag{2.8}$$

依假设，对任意 $T\geqslant T_0$ 存在 $a,b,c>T$ 使得 $T\leqslant a<c<b$. 在区间$(a,c]$上，对(2.8)式取积分算子 $X_{r,c}^{H;\rho}$，并注意到(2.1)和(2.2)式，有

$$X_{r,c}^{H;\rho}(\theta)\leqslant -H(c,r)\rho(c)Z(c)+X_{r,c}^{H;\rho}\left(\left[h_1-p+\frac{\rho'}{\rho}\right]Z\right)-X_{r,c}^{H;\rho}\left(\frac{1}{g}Z^2\right)$$

$$=-H(c,r)\rho(c)Z(c)-X_{r,c}^{H;\rho}\left(\frac{1}{g}\left[Z-\frac{1}{2}g\left(h_1-p+\frac{\rho'}{\rho}\right)\right]^2\right)$$

$$+\frac{1}{4}X_{r,c}^{H;\rho}\left(g\left[h_1-p+\frac{\rho'}{\rho}\right]^2\right)$$

$$\leqslant -H(c,r)\rho(c)Z(c)+\frac{1}{4}X_{r,c}^{H;\rho}\left(g\left[h_1-p+\frac{\rho'}{\rho}\right]^2\right).$$

对上式，取 $r\to a^+$,并对其两边同除以 $H(c,a)$，可得

$$\frac{1}{H(c,a)}X_{a,c}^{H;\rho}\left(\Theta-\frac{1}{4}g\left[h_1-p+\frac{\rho'}{\rho}\right]^2\right)\leqslant -\rho(c)Z(c). \tag{2.9}$$

类似地，可证

$$\frac{1}{H(b,c)}Y_{c,b}^{H;\rho}\left(\Theta-\frac{1}{4}g\left[h_2+p-\frac{\rho'}{\rho}\right]^2\right)\leqslant \rho(c)Z(c). \tag{2.10}$$

联合(2.9)与(2.10)式，我们得出与(2.5)式相矛盾. ▌

定理 2.2　如果对任意 $l\geqslant 1$，存在 $H\in\mathscr{H},\rho,\Phi\in C^1([1,\infty),R^+)$和$(\lambda\phi)\in C^1([1,\infty),R)$，使得

$$\limsup_{r\to\infty}X_{l,r}^{H;\rho}\left(\Theta-\frac{1}{4}g\left[h_1-p+\frac{\rho'}{\rho}\right]^2\right)>0 \tag{2.11}$$

和

$$\limsup_{r\to\infty}Y_{l,r}^{H;\rho}\left(\Theta-\frac{1}{4}g\left[h_2+p-\frac{\rho'}{\rho}\right]^2\right)>0, \tag{2.12}$$

则方程(1.1)振动.

证　对任意 $T>1$. 令 $a=T$. 在(2.11)式中取 $l=a$，则存在 $c>a$，使得

$$X_{a,c}^{H;\rho}\left(\Theta-\frac{1}{4}g\left[h_1-p+\frac{\rho'}{\rho}\right]^2\right)>0. \tag{2.13}$$

在(2.12)式中取 $l=c$，则存在 $b>c$，使得

$$Y_{c,b}^{H;\rho}\left(\Theta-\frac{1}{4}g\left[h_2+p-\frac{\rho'}{\rho}\right]^2\right)>0. \tag{2.14}$$

联合(2.13)和(2.14)式. 我们得(2.5)式成立. 由定理 2.1 知结论成立. ▌

对 $H:=H(r-s)\in\mathscr{H}$,易知 $h_1(r-s)=h_2(r-s)$，记为 $h(r-s)$. 函数类 $\mathscr{H}$ 中包含 $H(r-s)$的集合记作 $\mathscr{H}_0$. 把定理 2.1 运用于 $\mathscr{H}_0$ 时，我们有下面定理

定理 2.3　如果对任意 $T\geqslant 1$，存在 $H\in\mathscr{H},\rho,\Phi\in C^1([1,\infty),R^+),(\lambda\phi)\in C^1([1,\infty),R)$和常数 $a,b,c\in R^+$，使得 $T\leqslant a<c<b$ 和

$$\int_a^c H(s-a)[\Theta(s)\rho(s)+\Theta(2c-s)\rho(2c-s)]\mathrm{d}s$$
$$>\frac{1}{4}\int_a^c H(s-a)[g(s)\rho(s)+g(2c-s)\rho(2c-s)]h^2(s-a)\mathrm{d}s, \tag{2.15}$$

其中 $\rho(s)=\exp[\int_1^s p((\tau)\mathrm{d}\tau]$. 则方程(1.1)振动.

证 取 $b=2c-a$,则 $H(b-c)=H(c-a)=H((b-a)/2)$, 且对任意 $\varphi\in L[a,b]$,我们有

$$\int_c^b \varphi(s)\mathrm{d}s=\int_a^c \varphi(2c-s)\mathrm{d}s.$$

于是,(2.15)式成立意味着(2.5)式对 $H\in\mathscr{H}_0$ 成立. 由定理 2.1 知方程(1.1)振动. ▌

从上面定理可知,选择不同函数 $H(r,s)$和 $\rho(s)$,可得到不同的振动准则.

令
$$H(r,s)=(r-s)^\alpha,\ \alpha>1,\ r\geqslant s\geqslant 1.$$

推论 2.1 如果对任意 $l\geqslant 1$ 和 $\alpha>1$,使得

$$\limsup_{r\to\infty}\frac{1}{r^{\alpha-1}}\int_l^r (s-l)^\alpha\Theta(s)\mathrm{d}s\geqslant\frac{\alpha^2}{4k(\alpha-1)} \tag{2.16}$$

和
$$\limsup_{r\to\infty}\frac{1}{r^{\alpha-1}}\int_l^r (r-s)^\alpha\Theta(s)\mathrm{d}s\geqslant\frac{\alpha^2}{4k(\alpha-1)}, \tag{2.17}$$

其中
$$\Phi(r)=\frac{1}{\omega\lambda(r)r^{N-1}},\ \phi(r)=-\frac{\omega r^{N-1}\Phi'(r)}{2k\Phi(r)}.$$

则方程(1.1)振动.

证 令 $\rho(s)=1$, 则

$$p(r)=0 \text{ 和 } g(r)=\frac{1}{k}.$$

注意到

$$X_{l,r}^{H;\rho}(g[h_1-p+\frac{\rho'}{\rho}]^2)=\frac{\alpha^2}{k(\alpha-1)}(r-l)^{\alpha-1}. \tag{2.18}$$

由(2.16)和(2.18)式, 可得

$$\limsup_{r\to\infty}\frac{1}{r^{\alpha-1}}X_{l,r}^{H;\rho}(\Theta-\frac{1}{4}g[h_1-p+\frac{\rho'}{\rho}]^2)$$
$$=\limsup_{r\to\infty}\frac{1}{r^{\alpha-1}}\int_l^r (s-l)^\alpha\Theta(s)\mathrm{d}s-\frac{\alpha^2}{4k(\alpha-1)}>0.$$

于是,(2.11)式成立. 类似地,(2.17)式推得(2.12)式成立. 依定理 2.2 得结论成立. ▌

推论 2.2 假设 $G(\infty)=\infty$. 如果对任意 $l\geqslant 1$ 和 $\alpha>1$, 存在函数$(\lambda\phi)\in C^1([1,\infty),R)$, 使得

$$\limsup_{r\to\infty}\frac{1}{G^{\alpha-1}(r)}\int_l^r [G(s)-G(l)]^\alpha\Theta(s)\mathrm{d}s>\frac{\alpha^2}{4(\alpha-1)} \tag{2.19}$$

和
$$\limsup_{r\to\infty}\frac{1}{G^{\alpha-1}(r)}\int_l^r [G(r)-G(s)]+\alpha\Theta(s)\mathrm{d}s>\frac{\alpha^2}{4(\alpha-1)}, \tag{2.20}$$

其中
$$\Phi(r)=\exp[-\frac{2k}{\omega}\int_1^r \phi(s)s^{1-N}\mathrm{d}s],G(r)=\int_1^r\frac{1}{g(s)}\mathrm{d}s.$$

则方程(1.1)振动.

证

令
$$\rho(r)=1 \text{ 和 } H(r,s)=[G(r)-G(s)]^\alpha,\ r>s>l.$$

则　$h_1(r,s)=\alpha[G(r)-G(s)]^{-1}\dfrac{1}{g(r)}$ 和 $h_2(r,s)=\alpha[G(r)-G(s)]^{-1}\dfrac{1}{g(s)}$.

注意到 $p(r)=0$，和

$$X_{l,r}^{H;\rho}(g[h_1-p+\frac{\rho'}{\rho}]^2)=\frac{\alpha^2}{\alpha-1}[G(r)-G(l)]^{\alpha-1}. \tag{2.21}$$

再利用(2.19)和(2.21)式，可得

$$\limsup_{r\to\infty}\frac{1}{G^{\alpha-1}(r)}X_{l,r}^{H;\rho}(\Theta-\frac{1}{4}g[h_1-p+\frac{\rho'}{\rho}]^2)$$

$$=\limsup_{r\to\infty}\frac{1}{G^{\alpha-1}(r)}\int_l^r[G(s)-G(l)]^{\alpha}\Theta(s)\mathrm{d}s-\frac{\alpha^2}{4(\alpha-1)}>0.$$

从而(2.11)式成立. 类似地，(2.20)式推得(2.12)式成立. 由定理 2.2 可知结论成立. ▌

3　例子和注

本节，我们将给出两个实例以说明本文结果的有效性，但文[2]和[5]的已知结果不能判定. 最后给出一些注以结束本文.

例 3.1　考虑方程

$$\frac{\partial y}{\partial x_1}(\frac{1}{|x|}\frac{\partial y}{\partial x_1})+\frac{\partial}{\partial x_2}(\frac{1}{|x|}\frac{\partial}{\partial x_2})+q(x)(y+y^3)=0,\ |x|>1, \tag{3.1}$$

这里 $N=2$，$q(x)$定义如下

$$q(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{|x|}(|x|-3n), & 3n\leqslant|x|\leqslant 3n+1,\\ \dfrac{1}{|x|}(-|x|+3n+2), & 3n+1<|x|\leqslant 3n+2,\\ -\dfrac{1}{|x|}, & 3n+2<|x|<3n+3.\end{cases}$$

其中 $n\in N_0=\{1,2,\cdots\}$. 明显地 $\lambda(r)=1/r$，$f'(y)=1+3y^2$,对所有 $y\in R$.

对任意 $T\geqslant1$，存在 $n\in N_0$，使得 $3n>T$. 取 $a=3n$，$c=3n+1$，$\rho(r)=1$ 和 $H(r-s)=(r-s)^2$. 再取 $\phi(r)=0$，$\Phi(r)=1$，则 $g(r)=2\pi$，且

$$\Theta(r)=\int_{S_r}q(x)\mathrm{d}\sigma=\begin{cases}2\pi(r-3n), & 3n\leqslant|x|\leqslant 3n+1,\\ 2\pi(-r+3n+2), & 3n+1<|x|\leqslant 3n+2,\\ -2\pi, & 3n+2<|x|<3n+3,\end{cases}$$

易知，(2.15)式成立，由定理 2.3 知方程(3.1)振动. 特别，在方程(3.1)中

$$\int^{\infty}\Theta(s)\mathrm{d}s=-\infty.$$

例 3.2　考虑方程

$$\triangle y+\frac{1}{|x|}\frac{\partial y}{\partial x_1}+\frac{1}{|x|}\frac{\partial y}{\partial x_2}+\frac{\mu}{|x|^2}(y+y^5)=0,\ |x|>1, \tag{3.2}$$

这里 $N=2$，$b_1(x)=b_2(x)=1/|x|$,$\mu>1/4$ 和 $q(x)=\mu/|x|^2$. 明显地,$\lambda(r)=1$，$f'(y)=1+5y^4\geqslant1=k$,对所有 $y\in R$. 取 $\phi(r)=\pi$,$\Phi(r)=1/(2\pi r)$，则 $\Theta(r)=\mu/r^2$.

于是，对 $\alpha>1$

$$\limsup_{r\to\infty}\frac{1}{r^{\alpha-1}}\int_l^r(s-l)^{\alpha}\Theta(s)\mathrm{d}s=\frac{\mu}{\alpha-1}.$$

对任意 $\mu>1/4$，则存在 $\alpha>1$，使得 $\mu/(\alpha-1)>\alpha^2/4(\alpha-1)$. 这意味着(2.16)式成立. 依文[7]中的引理 3 知对同样的 α，(2.17)式亦成立. 则由推论 2.1 知方程(3.2)振动.

注 3.1 若将条件 $f'(y)\geqslant k>0$ (对 $y\neq=0$)，替换为

$$\frac{f(y)}{y}\geqslant k>0,\ 对\ y\neq 0,$$

则本文的所有定理仍成立,但此时 $q(x)$需在域 $\Omega(1)$上非负.

注 3.2 在定理 2.1—2.3 中，函数 $H(r,s)$也可选取不用推论 2.1—2.2 的形式. 例如，取

$$H(r,s)=\left[\int_s^r\frac{\mathrm{d}s}{u(s)}\right]^\alpha,\ r\geqslant s\geqslant 1,$$

其中 $\alpha>1$ 是常数,$u\in C([1,\infty),R^+)$ 满足$\int_1^\infty 1/u(s)\mathrm{d}s=\infty$.

参 考 文 献

[1] Gilbarg D, Trudinger N S. Elliptic Partial Differential Equations of Second Order. New York: Spinger-Verlag, 1983

[2] Noussair E S, Swanson C A. Oscillation of semilinear elliptic inequalities by Riccati transformation. Canad J Math, 1980, **32**(4): 908—923

[3] Wintner A. A criterion of oscillatory stability. Quart J Appl Math, 1948, **11**(7): 115—117

[4] Swanson C A. Semilinear second order elliptic oscillation. Canad Math Bull, 1979, **22**(2):139—157

[5] Xu Z T, Ma D K, Jia B J. Oscillation for a class of elliptic differential equations of second order. Math Appl, 2003, **16**(1): 42—48(in Chinese)

[6] Philos Ch G. Oscillation theorems for linear differential equations of second order. Arch Math, 1989, **53**:483—492

[7] Kong Q. Interval criteria for oscillation of second order linear ordinary diffential equations. J Math Anal Appl, 1999, **229**(1):258—270

[8] Kamenev I V. An integral criterion for oscillation of linear differential equations. Math Zamtki, 1978, **23**(2): 249—251(in Russian)

Domain Criteria for Oscillation of Second Order Damped Elliptic Equations

Xu Zhiting

(*Department of Mathematics*, *South China Normal University*, *Guangzhou* 510631)

Xing Hongyan

(*Department of Applied Mathematics*, *Guangdong University of Technology*, *Guangzhou* 510090)

Abstract: By using average functions and integral operators, some domain oscillation criteria for second order demped elliptic equations are established, which are different from most known ones in the sense that they are based on the information only on a sequence of subdomians of $\Omega(1)$, rather than on the whole of $\Omega(1)$.

Keywords: Domain oscillation; Second order demped elliptic equations; Averaging function; Integral operator.

MR(2000) Subject Classification: 35J60; 34C35; 34K25