2005,**25A**(3):367－373

Acta Mathematica Scientia
数学物理学报

Volterra 积分微分方程周期正解的一个新的存在性理论*

万阿英
(呼伦贝尔学院数学系 海拉尔 021008)
林晓宁 蒋达清
(东北师范大学数学系 长春 130024)

摘要:该文通过使用锥不动点定理,研究了一类非自治 Volterra 积分微分方程周期正解的一个新的存在性理论,把一般结果应用于几类具时滞的生物数学模型时,改进了一些已知结果,并得到了一些新的结果.

关键词:Volterra 积分微分方程;存在性;周期正解;不动点定理.
MR(2000)主题分类:34K20 **中图分类号**:O175.14;O175.13 **文献标识码**:A
文章编号:1003-3998(2005)03-367-07

1 引言

本文研究广义 Volterra 积分微分方程正周期解的存在性

$$\dot{y}(t)=-a(t)y(t)+\int_{-\infty}^{0}K(r)g(t,\ y(t+r))\mathrm{d}r, \tag{1.1}$$

其中 $a(t)\in C(R,(0,\infty))$, $g\in C(R\times[0,\infty),[0,\infty))$,$a(t)$, $b(t)$, $g(t,y)$ 都是 ω-周期. $\omega>0$ 是一个常数.

众所周知,积分微分方程(1.1)包含许多数学生态方程.

例如, Hematopoiesis 模型[2,4,13]

$$\dot{y}(t)=-a(t)y(t)+b(t)\int_{-\infty}^{0}K(r)\mathrm{e}^{-\beta(t)y(t+r)}\mathrm{d}r; \tag{1.2}$$

更广泛的 Haematopoiesis(血细胞繁殖)模型[2,7,9,13]

$$\dot{y}(t)=-a(t)y(t)+b(t)\int_{-\infty}^{0}K(r)\ \frac{1}{1+y(t+r)^{n}}\ \mathrm{d}r,\qquad n>0, \tag{1.3}$$

$$\dot{y}(t)=-a(t)y(t)+b(t)\int_{-\infty}^{0}K(r)\ \frac{y(t+r)}{1+y(t+r)^{n}}\mathrm{d}r,\qquad n>0; \tag{1.4}$$

还有 Nicholson 苍蝇模型[2,5,6,8,13]

收稿日期:2003-12-12;修订日期:2004-11-05
E-mail:wanaying1@eyou.com
* 基金项目:国家自然科学基金(10171010)资助

$$\dot{y}(t)=-a(t)y(t)+b(t)\int_{-\infty}^{0}K(r)\ y(t+r)\mathrm{e}^{-\beta(t)y(t+r)}\mathrm{d}r. \tag{1.5}$$

据作者所知,很少有作者讨论方程(1.1)—(1.5)正周期解的存在性.系统(1.2),(1.3)和(1.5)已在文献[4,5,7]中被研究,已得到解的估计,给出解一致有界和一致最终有界的证明,并运用 Yoshizawa 定理[10]得到方程(1.2),(1.3)和(1.5)ω-周期正解的存在性条件.

最近作者[13]研究了下面的 Volterra 积分微分方程正周期解的存在性

$$\dot{y}(t)=-a(t)y(t)+b(t)\int_{-\infty}^{0}K(r)f(t,\ y(t+r))\mathrm{d}r, \tag{1.6}$$

其中 $a(t),\ b(t)\in C(R,\ (0,\ \infty))$, $f\in C(R\times[0,\ \infty),\ [0,\ \infty))$, $a(t)$, $b(t)$, $f(t,y)$ 都是 ω-周期函数. $\omega>0$ 是常数. 进一步, $K(r)\in C((-\infty,0],[0,\infty))$且 $\int_{-\infty}^{0}K(r)\mathrm{d}r=1$. 文献[13]主要结果如下

定理 A 假定下面条件成立

$$\lim_{u\downarrow 0}\min_{t\in[0,\omega]}\frac{f(t,u)}{u}=\infty,\ \lim_{u\uparrow\infty}\max_{t\in[0,\omega]}\frac{f(t,u)}{u}=0,$$

则方程(1.6)至少一个 ω-周期解.

定理 B 假定

(B_1) $\min\limits_{t\in[0,\omega]}\{b(t)-a(t)\}>0$,

(B_2) 存在 $\varepsilon_0>0$ 使得 $f(t,u)$ 在 $0\leqslant u\leqslant\varepsilon_0$ 递增,

则方程(1.6)至少一个 ω-周期正解,如果下面条件成立

$$\lim_{u\downarrow 0}\min_{t\in[0,\omega]}\frac{f(t,u)}{u}=1\ ,\ \lim_{u\uparrow\infty}\max_{t\in[0,\omega]}\frac{f(t,u)}{u}=0.$$

定理 A 和定理 B 都运用了 Krasnoselskii 锥不动点定理[1],[3]。

本文我们采用下面锥不动点定理 1.1 给出一个新的存在性定理,关键一步在于找一个函数 ψ 使得算子 Φ 满足条件 $u\neq\Phi u+\lambda\psi$,很难运用范数形式的锥拉伸和锥压缩定理来证明我们的主要结果.

定理 1.1[1],[11] 设 X 是一个 Banach 空间,K 是 X 中的一个锥. 假定 Ω_1,Ω_2是 X 中的开集,且 $0\in\Omega_1,\bar{\Omega}_1\subset\Omega_2$. 设

$$\Phi:K\ \cap\ (\bar{\Omega}_2\backslash\Omega_1)\rightarrow K$$

是全连续算子, 满足

(i) $\|\Phi x\|\leqslant\|x\|$ 当 $x\in K\cap\partial\Omega_1$,

(ii) 存在 $\psi\in K\backslash\{0\}$满足 $x\neq\Phi x+\lambda\psi$, 当 $x\in K\cap\partial\Omega_2$, $\lambda>0$.

则 Φ 在 $\cap(\bar{\Omega}_2\cap\Omega_1)$中有一个不动点.

注 1.1 在定理 1.1 中, 条件(i)和(ii)可换成

(i)* $\|\Phi x\|\leqslant\|x\|$ 当 $x\in K\cap\partial\Omega_2$,

(ii)* 存在 $\psi\in K\backslash\{0\}$满足 $x\neq\Phi x+\lambda\psi$, 当 $x\in K\cap\partial\Omega_1$ 和 $\lambda>0$,

则 Φ 在 $K\cap(\bar{\Omega}_2\subset\Omega_1)$中有一个不动点.

2 正周期解的存在性

设 X 是一个 Banach 空间, K 是 X 的闭的非空子集. 称 K 是一个锥,如果(i) $\alpha u+\beta v\in K$, 对一切 $u,v\in K$ 和所有 α, $\beta\geqslant 0$. (ii) 若 $u,-u\in K$ 则一定 $u=0$.

假定

(P_1) $a(t)\in C(R,(0,\infty))$，$g\in C(R\times[0,\infty),[0,\infty))$，$a(t)$，$g(t,y)$都是 ω-周期函数，$\omega>0$ 是一个常数. 进一步，$K(r)\in C((-\infty,0],[0,\infty))$且 $\int_{-\infty}^{0}K(r)\mathrm{d}r=1$.

本节主要结果如下

定理 2.1　如果条件(P_1) 成立，且假定下列条件之一成立

(i)　$\liminf\limits_{u\downarrow 0}\dfrac{g(t,u)}{u}>a(t)$ 且 $\limsup\limits_{u\uparrow\infty}\dfrac{g(t,u)}{u}<a(t)$；

(ii)　$\limsup\limits_{u\downarrow 0}\dfrac{g(t,u)}{u}<a(t)$ 且 $\liminf\limits_{u\uparrow\infty}\dfrac{g(t,u)}{u}>a(t)$.

则方程(1.1)至少一个 ω-周期正解.

推论 2.1　如果条件(P_1)成立，且假定下列条件之一成立

(i)　$\liminf\limits_{u\downarrow 0}\dfrac{g(t,u)}{u}=\infty$ 且 $\limsup\limits_{u\uparrow\infty}\dfrac{g(t,u)}{u}=0$　(次线性)；

(ii)　$\limsup\limits_{u\downarrow 0}\dfrac{g(t,u)}{u}=0$ 且 $\liminf\limits_{u\uparrow\infty}\dfrac{g(t,u)}{u}=\infty$　(超线性).

则方程(1.1)至少一个 ω-周期正解.

注 2.1　定理 2.1 扩展并改善了定理 A 和 B[13] 的结果.

注 2.2　如果 $g(t,u)=a(t)u$，线性问题

$$\dot{y}(t)=-a(t)y(t)+a(t)\int_{-\infty}^{0}K(r)\,y(t+r)\mathrm{d}r,$$

正 ω-周期解的存在性不能被保证，因此定理 2.1 中的条件是最优的.

定理 2.1 的证明　首先指出，求方程(1.1)的 ω-周期解等价于求下列积分方程的 ω-周期解

$$y(t)=\int_{t}^{t+\omega}G(t,s)\int_{-\infty}^{0}K(r)g(s,y(s+r))\mathrm{d}r\mathrm{d}s,\tag{2.1}$$

其中

$$G(t,s):=\frac{\exp(\int_{t}^{s}a(\chi)\mathrm{d}\chi)}{\exp(\int_{0}^{\omega}a(\chi)\mathrm{d}\chi)-1}.\tag{2.2}$$

设

$$X=\{y(t):\ y(t)\in C(R,R),\ y(t+\omega)=y(t)\}\tag{2.3}$$

且定义

$$\|y\|=\sup_{t\in[0,\omega]}\{|y(t)|:y\in X\},$$

则 X 在 $\|\cdot\|$ 范数意义下是一个 Banach 空间.

定义算子 Φ 如下

$$(\Phi y)(t)=\int_{t}^{t+\omega}G(t,s)\int_{-\infty}^{0}K(r)g(s,\ y(s+r))\mathrm{d}r\mathrm{d}s,\tag{2.4}$$

对 $y\in X$，显然，Φ 是 X 上的全连续算子.

设

$$K=\{y\in X:\ y(t)\geqslant 0 \text{ 且 } y(t)\geqslant\sigma\|y\|\},$$

其中 $0<\sigma=A/B<1$，并且

$$A := \min\{G(t,s): 0 \leqslant t, s \leqslant \omega\} > 0, \quad B := \max\{G(t,s): 0 \leqslant t, s \leqslant \omega\} > 0. \tag{2.5}$$

不难验证 K 是 X 中一个锥.

引理 2.1 假定条件(P_1)成立，则 $\Phi(K) \subset K$.

证 对一切 $y \in K$，有

$$\|\Phi y\| \leqslant B\int_0^\omega \int_{-\infty}^0 K(r)g(s,y(s+r))\mathrm{d}r\mathrm{d}s,$$

$$(\Phi y)(t) \geqslant A\int_0^\omega \int_{-\infty}^0 K(r)g(s,y(s+r))\mathrm{d}r\mathrm{d}s.$$

由此可得

$$(\Phi y)(t) \geqslant \frac{A}{B}\|\Phi y\| = \sigma\|\Phi y\|,$$

即 $\Phi y \in K$. 引理 2.1 证毕. ▌

下面证明情形(i) (ii).

情形(i) 由 $\liminf\limits_{u\downarrow 0}\dfrac{g(t,u)}{u} > a(t)$，则存在一个正数 $r>0$ 满足

$$g(t,u) \geqslant a(t)u, \quad 对一切\ 0 \leqslant u \leqslant r. \tag{2.6}$$

因此，若 $y \in K$ 且 $\|y\| = r$，则 $y(t) \geqslant \sigma r$. 设 $\psi \equiv 1$ 当 $t \in R$，往证

$$y \neq \Phi y + \lambda\psi \ 当\ y \in K \cap \partial\Omega_1 且\ \lambda > 0, \tag{2.7}$$

其中 $\Omega_1 = \{u \in X: \|u\| < r\}$.

若不然，存在 $y_0 \in K \cap \partial\Omega_1$ 和 $\lambda_0 > 0$ 满足

$$y_0 = \Phi y_0 + \lambda_0\psi.$$

设 $\mu = \min\limits_{t\in R} y_0(t)$. 则对 $t \in R$ 有

$$\begin{aligned}
y_0(t) &= (\Phi y_0)(t) + \lambda_0 \\
&= \int_t^{t+\omega} G(t,s)\int_{-\infty}^0 K(r)g(s, y_0(s+r))\mathrm{d}r\mathrm{d}s + \lambda_0 \\
&\geqslant \int_t^{t+\omega} G(t,s)a(s)\int_{-\infty}^0 K(r)y_0(s+r)\mathrm{d}r\mathrm{d}s + \lambda_0 \\
&\geqslant \mu\int_t^{t+\omega} G(t,s)a(s)\int_{-\infty}^0 K(r)\mathrm{d}r\mathrm{d}s + \lambda_0 \\
&= \mu + \lambda_0,
\end{aligned}$$

则有 $\mu \geqslant \mu + \lambda_0$，矛盾.

另一方面，由 $\limsup\limits_{u\uparrow\infty}\dfrac{g(t,u)}{u} < a(t)$，存在 $r_1 > r$ 满足

$$g(t,u) \leqslant a(t)u, \quad 当\ u \geqslant r_1.$$

设 $R = \dfrac{r_1}{\sigma}$，因此有

$$u(t) \geqslant \sigma\|u\| = \sigma R = r_1, \quad 当\ u \in K \cap \partial\Omega_2, \tag{2.8}$$

其中 $\Omega_2 = \{u \in X: \|u\| < R\}$.

则对一切 $y \in K$ 和 $\|y\| = R$，有

$$\begin{aligned}
(\Phi y)(t) &= \int_t^{t+\omega} G(t,s)\int_{-\infty}^0 K(r)g(s, y_0(s+r))\mathrm{d}r\mathrm{d}s \\
&\leqslant \int_t^{t+\omega} G(t,s)a(s)\int_{-\infty}^0 K(r)y_0(s+r)\mathrm{d}r\mathrm{d}s \\
&\leqslant \int_t^{t+\omega} G(t,s)a(s)\int_{-\infty}^0 K(r)\mathrm{d}r\mathrm{d}s\,\|y\|
\end{aligned}$$

$$= \| y \| .$$

可知

$$\| \Phi y \| \leqslant \| y \| ,$$

对一切 $y \in K \cap \partial\Omega_2$ 成立.

由定理 1.1，可得 Φ 在 $y \in K \cap (\bar{\Omega}_2 \backslash \Omega_1)$ 中有一个不动点. 进一步，$r \leqslant \| y \| \leqslant R$ 且 $y(t) \geqslant \sigma r > 0$，表明 $y(t)$ 是方程(1.1)的一个 ω-周期解.

情形(ii) 由 $\limsup\limits_{u \downarrow 0} \dfrac{g(t,u)}{u} < a(t)$，存在一个正数 $r > 0$ 满足

$$g(t,u) \leqslant a(t)u, \quad \text{对一切 } 0 \leqslant u \leqslant r. \tag{2.9}$$

由此，若 $y \in K$ 且 $\| y \| = r$，则 $y(t) \geqslant \sigma r$.

对一切 $y \in K$ 且 $\| y \| = r$，有

$$\begin{aligned}
(\Phi y)(t) &= \int_t^{t+\omega} G(t,s) \int_{-\infty}^0 K(r) g(s, y_0(s+r)) \mathrm{d}r\mathrm{d}s \\
&\leqslant \int_t^{t+\omega} G(t,s) a(s) \int_{-\infty}^0 K(r) y_0(s+r) \mathrm{d}r\mathrm{d}s \\
&\leqslant \int_t^{t+\omega} G(t,s) a(s) \int_{-\infty}^0 K(r) \mathrm{d}r\mathrm{d}s \| y \| \\
&= \| y \| .
\end{aligned}$$

可得出

$$\| \Phi y \| \leqslant \| y \| .$$

对一切 $y \in K \cap \partial\Omega_1$ 成立，其中 $\Omega_1 = \{u \in X : \| u \| < r\}$.

另一方面，由 $\liminf\limits_{u \uparrow \infty} \dfrac{g(t,u)}{u} > a(t)$，存在 $r_1 > r$ 满足

$$g(t,u) \geqslant a(t)u, \quad \text{当 } u \geqslant r_1.$$

设 $R = \dfrac{r_1}{\sigma}$，有

$$u(t) \geqslant \sigma \| u \| = \sigma R = r_1, \quad \text{当 } u \in K \cap \partial\Omega_2, \tag{2.10}$$

其中 $\Omega_2 = \{u \in X : \| u \| < R\}$.

设 $\psi \equiv 1$ 当 $t \in R$ 往证

$$y \neq \Phi y + \lambda\psi, \quad \text{当 } u \in K \cap \partial\Omega_2 \quad \text{且 } \lambda > 0, \tag{2.11}$$

若不然，存在 $y_0 \in K \cap \partial\Omega_2$ 和 $\lambda_0 > 0$ 满足

$$y_0 = \Phi y_0 + \lambda_0 \psi.$$

设 $\mu = \min\limits_{t \in R} y_0(t)$. 则对一切 $t \in R$ 有

$$\begin{aligned}
y_0(t) &= (\Phi y_0)(t) + \lambda_0 \\
&= \int_t^{t+\omega} G(t,s) \int_{-\infty}^0 K(r) g(s, y_0(s+r)) \mathrm{d}r\mathrm{d}s + \lambda_0 \\
&\geqslant \int_t^{t+\omega} G(t,s) a(s) \int_{-\infty}^0 K(r) y_0(s+r) \mathrm{d}r\mathrm{d}s + \lambda_0 \\
&\geqslant \mu \int_t^{t+\omega} G(t,s) a(s) \int_{-\infty}^0 K(r) \mathrm{d}r\mathrm{d}s + \lambda_0 \\
&= \mu + \lambda_0 ,
\end{aligned}$$

可知 $\mu \geqslant \mu + \lambda_0$，矛盾.

由定理 1.1，可得到 Φ 在 $y \in K \cap (\bar{\Omega}_2 \backslash \Omega_1)$ 中有一个不动点. 进一步，$r \leqslant \| y \| \leqslant R$ 和

$y(t)\geqslant\sigma r>0$，这意味着 $y(t)$是方程(1.1)的 ω-周期解.

定理 2.1 证毕. ▌

注 2.3 用类似方法,可以证明广义微分方程[12]正周期解的存在性

$$\dot{y}(t)=-a(t)y(t)+g(t,\ y(t-\tau(t))),$$

其中 $a(t)\in C(R,\ (0,\infty))$，$\tau(t)\in C(R,R)$，$g\in C(R\times[0,\infty),\ [0,\infty))$，$a(t)$，$\tau(t)$，$g(t,y)$都是 ω-周期函数，$\omega>0$ 是一个常数.

3 例子

本节,运用上节主要结果,给出一些有生物背景的例子.

由推论 2.1，有下列结果

推论 3.1 假定

(H_1) $a(t),b(t)\in C(R,(0,\infty))$,$\beta(t)\in C(R,(0,\infty))$,$a(t)$,$b(t)$和 $\beta(t)$都是 ω-周期函数，$\omega>0$ 是一个常数. 进一步，$K(r)\in C((-\infty,0],[0,\infty))$且 $\int_{-\infty}^{0}K(r)\mathrm{d}r=1$.

则方程(1.2) 至少有一个 ω-周期正解.

推论 3.2 假定

(H_1) $a(t)$，$b(t)\in C(R,\ (0,\ \infty))$，$a(t)$和 $b(t)$都是 ω-周期函数，$\omega>0$ 是一个常数. 进一步，$K(r)\in C((-\infty,0],[0,\infty))$和 $\int_{-\infty}^{0}K(r)\mathrm{d}r=1$.

则方程(1.3)至少有一个 ω-周期正解.

由定理 2.1,有

推论 3.3 假定

(H_1) $a(t)$，$b(t)\in C(R,\ (0,\ \infty))$，$a(t)$和 $b(t)$都是 ω-周期函数，$\omega>0$ 是一个常数. 进一步，$K(r)\in C((-\infty,0],[0,\infty))$且 $\int_{-\infty}^{0}K(r)\mathrm{d}r=1$.

(H_2) $b(t)>a(t)$当 $t\in[0,\omega]$.

则方程(1.4)至少一个 ω-周期正解.

推论 3.4 假定

(H_1) $a(t)$，$b(t)\in C(R,\ (0,\infty))$，$\beta(t)\in C(R,\ (0,\ \infty))$，$a(t)$，$b(t)$ 和 $\beta(t)$ 都是 ω-周期函数，$\omega>0$ 是一个常数. 进一步，$K(r)\in C((-\infty,0],[0,\infty))$ 和 $\int_{-\infty}^{0}K(r)\mathrm{d}r=1$.

(H_2) $b(t)>a(t)$当 $t\in[0,\omega]$.

则方程(1.5)至少一个 ω-周期正解.

推论 3.1 和推论 3.2 很容易被验证. 对于推论 3.3 和推论 3.4,由于

$$\lim_{u\downarrow 0}\frac{g(t,u)}{u}=b(t)>a(t)\quad \text{和}\quad \lim_{u\uparrow\infty}\frac{g(t,u)}{u}=0<a(t),$$

结论由定理 2.1 得出.

参 考 文 献

[1] Deimling K. Nonlinear Functional Analysis. New York: Springer-Verlag, 1985

[2] Luo Jiaowan, Yu Jiangshe. Global asymptotic stability of nonautonomous mathematical ecological equations with distributed deviating arguments. Acta Mathematica Sinica, 1998, **41**(4):1273－1282

[3] Krasnoselskii M A. Positive Solution of Operator Equation. Gorningen: Noordhoff, 1964

[4] Wang P, Liang M. The existence and behavior of periodic solution of Hematcpoiesis model. Mathematica Applicate, 1995, **8**(3): 434－439

[5] Wang P. Existence and global attractivity of periodic solution of intero differential equation in population dynamics. Acta Appl Math, 1996, **12**(3): 427－434

[6] Gurney W S C, Blythe S P, Nisbet R M. Nicholson's blowflies revisited. Nature, 1980, **287**(2): 17－20

[7] Gopalsamy K, Weng P. Global attractivity and level crossing in model of Hematopoiesis. Bulletin of the Institute of Mathematics, Academia Sinica, 1994, **22**(3): 341－360

[8] Joseph W H So, Yu Jianshe. Global attractivity and uniformly persistence in Nicholson's blowflies. Differential Equation and Dynamics Systems, 1994, **2**(3): 11－18

[9] Mackey M C, Galass. Oscillations and chaos in phycological control systems. Sciences, 1987, **197**(2): 287－289

[10] Yoshizawa T. Stability Theory by Liapunov Second Method. Japan: The Mathematical Society of Japan, 1966

[11] Lan K, Webb J L R. Positive solutions of semilinear differential equations with singularities. J Differential Equations, 1998, **148**(3):407－421

[12] Wan A Y, Jiang D Q. Existence of positive periodic solutions for functional differential equations. Kyushu Journal of Mathematics. 2002, **56**(1): 193－202

[13] Jiang D Q, Wei J J. Existence of positive periodic solutions for Volterra integro-differential equations. Acta Mathematica Scientia, 2002, **21**B(1): 553－560

A New Existence Theory for Positive Periodic Solutions to Volterra Integro-differential Equations

Wan Aying

(*Department of Mathematics, Hulunber College, Hailar* 021008)

Lin Xiaoning Jiang Daqing

(*Department of Mathematics, Northeast Normal University, Changchun* 130024)

Abstract: This paper deals with a new existence theory for positive periodic solutions to a kind of nonautonomous Volterra integro-differential equations by employing a fixed point theorem in cones. Applying the general theorems established to several biomathematical models, the paper improves some previous results and obtains some new results.

Key words: Volterra integro-differential equation; Existence; Positive periodic solution; Fixed point theorem.

MR(2000) Subject Classification: 34K20