2005, **25A**(1): 67－72

Acta Mathematica Scientia
数学物理学报

Vaidya-Bonner-de Sitter 黑洞背景下电磁场的量子熵*

孙鸣超
(陇东学院物理系　甘肃庆阳 745000)

摘要：在 Tortoise 坐标系中，利用 brick-wall 模型研究了电磁场对 Vaidya-Bonner-de Sitter 黑洞熵的量子修正. 当黑洞事件视界不随超前时间变化时，结果与 Reissner-Nordström-de Sitter 黑洞的量子熵完全相同.

关键词：电磁场；brick-wall 模型；Vaidya-Bonner-de Sitter 黑洞；量子熵.
MR(2000)主题分类：83C57　　**中图分类号**：P145.8　　**文献标识码**：A
文章编号：1003-3998(2005)01-067-06

1　引言

自从 Bekenstein 和 Hawking 提出了黑洞熵与其视界面积成正比的理论以来，黑洞热力学一直是一个非常吸引人的课题. 人们利用各种途径来理解黑洞熵的统计性质，其中之一是 1985 年't Hooft[1] 提出的 brick-wall 模型. 该模型已被成功地应用到各种稳态黑洞[2-7]. 最近，人们又将 brick-wall 模型推广到动态黑洞[8-11]情况，研究了标量场或 Dirac 场对黑洞熵的量子修正. 本文采用最近文献[12]提出的在 Tortoise 坐标系中应用 brick-wall 模型的方法，研究电磁场对 Vaidya-Bonner-de Sitter 黑洞熵的量子修正. 考虑这个问题有两个理由：第一，电磁场对 Vaidya-Bonner-de Sitter 黑洞熵的量子修正未见报导；第二，早期的工作都是在 ($\hat{r}=r-r_H, \hat{v}=v$) 坐标系中研究动态黑洞的量子熵，而 WKB 近似要求场方程必须有一个定态解，在这个坐标系中，场方程不可能存在这样的解. 但许多工作[13-17]表明，对于动态黑洞仅在 Tortoise 坐标系中，场方程在事件视界附近有一个渐近定态解. 所以，对于动态黑洞必须在 Tortoise 坐标系中才能利用 WKB 近似.

2　黑洞背景下的电磁场方程

Vaidya-Bonner-de Sitter 黑洞的时空线元[18]为

$$ds^2=\left[1-\frac{2M}{r}+\frac{Q^2}{r^2}-\frac{1}{3}\Lambda r^2\right]dv^2-2dvdr-r^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\varphi^2), \tag{1}$$

其中采用了超前爱丁顿坐标 v, $M=M(v)$, $Q=Q(v)$ 分别为黑洞的质量和电荷，它们都是 v

收稿日期：2003-01-10
E-mail：sunmc@ldxy.com.cn
* 基金项目：国家自然科学基金(10375051)资助

的函数.

在坐标系 $(x^0=v, x^1=r, x^2=\theta, x^3=\varphi)$ 中选择零标架如下

$$l^\mu=\delta_1^\mu,\quad n^\mu=-\delta_0^\mu-\frac{1}{2}\left[1-\frac{2M}{r}+\frac{Q^2}{r^2}-\frac{1}{3}\Lambda r^2\right]\delta_1^\mu,$$

$$m^\mu=\frac{1}{\sqrt{2}r}\left(\delta_2^\mu+\frac{i}{\sin\theta}\delta_3^\mu\right),\quad \bar{m}^\mu=\frac{1}{\sqrt{2}r}\left(\delta_2^\mu-\frac{i}{\sin\theta}\delta_3^\mu\right). \tag{2}$$

由此得到所有非零旋系数和 Weyl 张量的非零独立分量

$$\rho=-\frac{1}{r},\quad \alpha=-\frac{1}{2\sqrt{2}r}\cot\theta=-\omega,$$

$$\mu=-\frac{1}{2r}\left(1-\frac{2M}{r}+\frac{Q^2}{r^2}-\frac{1}{3}\Lambda r^2\right),$$

$$\gamma=\frac{1}{2}\left(\frac{M}{r^2}-\frac{Q^2}{r^3}-\frac{1}{3}\Lambda r\right);\quad \Psi_2=-\frac{M}{r^3}+\frac{Q^2}{r^4}. \tag{3}$$

(3)式告诉我们 Vaidya-Bonner-de Sitter 度规是 Petrov D 类的,所以无源电磁场方程可用微扰方法简化为[19]

$$[(D-\varepsilon+\bar{\varepsilon}-2\rho-\bar{\rho})(\triangle-2\gamma+\mu)-(\delta+\bar{\pi}-\bar{\alpha}-\omega-2\tau)(\bar{\delta}+\pi-2\alpha)]\Phi_0=0,$$

$$[(\triangle+\gamma-\bar{\gamma}+2\mu+\bar{\mu})(D+2\varepsilon-\rho)-(\bar{\delta}-\bar{\tau}+\bar{\omega}+\alpha+2\pi)(\delta-\tau+2\omega)]\Phi_2=0, \tag{4}$$

其中 $D=l^\mu\partial_\mu$,$\triangle=n^\mu\partial_\mu$,$\delta=m^\mu\partial_\mu$. 将(2)、(3)式代入(4)式,并令 Φ_0、$\Phi_2={}_p\rho_l(v,r)\,{}_pY_l^m(\theta,\varphi)$,其中 ${}_pY_l^m(\theta,\varphi)$ 是自旋-加权球谐函数[20]. l 为角量子数,m 是磁量子数,且满足 $l\geqslant|p|$,$-l\leqslant m\leqslant l$. 自旋态 $p=\pm1$ 则由(4)式,径向函数 ${}_p\rho_l(v,r)$ 满足下列方程

$$\left\{A\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{2\partial^2}{\partial r\partial v}+\frac{2}{r}(p+2)\frac{\partial}{\partial v}+\left[\frac{2A}{r}(p+2)+(p+1)A'-\frac{2Ap}{r}\right]\frac{\partial}{\partial r}\right.$$
$$+\frac{A}{r^2}(p+2)(1-p)+\frac{1}{r}(p+2)(p+1)A'$$
$$\left.+\frac{1}{6}(2p+1)(p+1)r\left(\frac{A}{r}\right)''-\frac{\lambda^2}{r^2}\right\}{}_p\rho_l=0, \tag{5}$$

其中 $A=1-\frac{2M}{r}+\frac{Q^2}{r^2}-\frac{1}{3}\Lambda r^2$,$A'=\frac{\partial A}{\partial r}$,$\lambda^2=(l-p)(l+p+1)$.

对于动态黑洞,其事件视界随时间变化,可引进新坐标[13] $\hat{r}=r-r_H(v)$,$\hat{v}=v$,那么

$$\frac{\partial^n}{\partial r^n}=\frac{\partial^n}{\partial\hat{r}^n},\quad \frac{\partial}{\partial v}=\frac{\partial}{\partial\hat{v}}-\dot{r}_H\frac{\partial}{\partial\hat{r}},\quad \frac{\partial^2}{\partial r\partial v}=\frac{\partial^2}{\partial\hat{r}\partial\hat{v}}-\dot{r}_H\frac{\partial^2}{\partial\hat{r}^2}, \tag{6}$$

其中 r_H 为时空事件视界,$\dot{r}_H=\frac{dr_H}{dv}$.

将(6)式代入(5)式,方程变为

$$\left\{(A-2\dot{r}_H)\frac{\partial^2}{\partial\hat{r}^2}+\frac{2\partial^2}{\partial\hat{r}\partial\hat{v}}+\frac{2}{r}(p+2)\frac{\partial}{\partial\hat{v}}+\left[\frac{4A}{r}+(p+1)A'-\frac{2\dot{r}_H}{r}(p+2)\right]\frac{\partial}{\partial\hat{r}}\right.$$
$$+\frac{A}{r^2}(p+2)(1-p)+\frac{A'}{r}(p+2)(p+1)$$
$$\left.+\frac{1}{6}(2p+1)(p+1)r\left(\frac{A}{r}\right)''-\frac{\lambda^2}{r^2}\right\}{}_p\rho_l=0. \tag{7}$$

对于动态黑洞,为了利用 WKB 近似,可定义 Tortoise 坐标变换[13]

$$dr_*=\frac{1-2\eta}{A-2\dot{r}_H}d\hat{r}+\eta d\hat{v},\quad v_*=\hat{v}, \tag{8}$$

其中 η 是保证 $\mathrm{d}r_*$ 为全微分的调节因子；可以证明，在事件视界附近 $\eta \approx \dot{r}_H$. 则有

$$\frac{\partial}{\partial \hat{r}} = \frac{1-2\eta}{A-2\dot{r}_H}\frac{\partial}{\partial r_*}, \quad \frac{\partial}{\partial \hat{\upsilon}} = \frac{\partial}{\partial \upsilon_*} + \eta\frac{\partial}{\partial r_*},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \hat{r}^2} = \left(\frac{\partial}{\partial \hat{r}}\frac{1-2\eta}{A-2\dot{r}_H}\right)\frac{\partial}{\partial r_*} + \left(\frac{1-2\eta}{A-2\dot{r}_H}\right)^2\frac{\partial^2}{\partial r_*^2},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \hat{r}\partial \hat{\upsilon}} = \left(\frac{\partial}{\partial \hat{\upsilon}}\frac{1-2\eta}{A-2\dot{r}_H}\right)\frac{\partial}{\partial r_*} + \eta\frac{1-2\eta}{A-2\dot{r}_H}\frac{\partial^2}{\partial r_*^2} + \frac{1-2\eta}{A-2\dot{r}_H}\frac{\partial^2}{\partial r_*\partial \upsilon_*}. \tag{9}$$

将(9)式代入(7)式，化简后得到电磁场方程

$$\begin{aligned}&\left\{\frac{1-2\eta}{A-2\dot{r}_H}\frac{\partial^2}{\partial r_*^2} + \frac{2(1-2\eta)}{A-2\dot{r}_H}\frac{\partial^2}{\partial r_*\partial \upsilon_*} + \frac{2(p+2)}{r}\frac{\partial}{\partial \upsilon_*}\right.\\ &+\left[(A-2\dot{r}_H)\left(\frac{\partial}{\partial \hat{r}}\frac{1-2\eta}{A-2\dot{r}_H}\right) + 2\left(\frac{\partial}{\partial \hat{\upsilon}}\frac{1-2\eta}{A-2\dot{r}_H}\right) + 2(p+2)\frac{\eta}{r}\right.\\ &\left.\left.+\left(\frac{4A}{r} + (p+1)A' - 2\dot{r}_H(p+2)\frac{1}{r}\right)\frac{1-2\eta}{A-2\dot{r}_H}\right]\frac{\partial}{\partial r_*} + V - \frac{\lambda^2}{r^2}\right\}{}_p\rho_l = 0.\end{aligned} \tag{10}$$

其中

$$\begin{aligned}V &= \frac{A}{r^2}(p+2)(1-p) + \frac{A'}{r}(p+2)(p+1) + \frac{1}{6}(2p+1)(p+1)r\left(\frac{A}{r}\right)''\\ &= \frac{2}{r^2} + \frac{2M}{r^3}(p-1) + \frac{Q^2}{r^4}(1-p) - \frac{1}{3}\Lambda(5p+7).\end{aligned}$$

3　黑洞的自由能和量子熵

虽然整个时空是动态时空，但是我们采用薄膜 brick-wall 模型，在事件视界附近的一个薄层内计算黑洞的熵，则可认为在该薄层内，系统处于热平衡状态. 所以在 WKB 近似下，${}_p\rho_l(\upsilon_*, r_*)$ 在黑洞事件视界附近的薄区域内可以写成如下形式

$${}_p\rho_l(\upsilon_*, r_*) = \exp[-\mathrm{i}E\upsilon_* + \mathrm{i}W(r_*, p, l, E)], \tag{11}$$

其中 E 为光子的能量. 将(11)式代入(10)式，得

$$\begin{aligned}&\left\{-\frac{1-2\eta}{A-2\dot{r}_H}\left(\frac{\partial W}{\partial r_*}\right)^2 + \frac{\mathrm{i}(1-2\eta)}{A-2\dot{r}_H}\frac{\partial^2 W}{\partial r_*^2} + \frac{2E(1-2\eta)}{A-2\dot{r}_H}\frac{\partial W}{\partial r_*} - 2\mathrm{i}E(p+2)\frac{1}{r}\right.\\ &+\mathrm{i}\left[(A-2\dot{r}_H)\left(\frac{\partial}{\partial \hat{r}}\frac{1-2\eta}{A-2\dot{r}_H}\right) + 2\left(\frac{\partial}{\partial \hat{\upsilon}}\frac{1-2\eta}{A-2\dot{r}_H}\right) + 2(p+2)\frac{\eta}{r}\right.\\ &\left.\left.+\left(\frac{4A}{r} + (p+1)A' - 2\dot{r}_H(p+2)\frac{1}{r}\right)\frac{1-2\eta}{A-2\dot{r}_H}\right]\frac{\partial W}{\partial r_*} + V - \frac{\lambda^2}{r^2}\right\}{}_p\rho_l = 0.\end{aligned} \tag{12}$$

将(12)式中实部与虚部分离

$$-\frac{1-2\eta}{A-2\dot{r}_H}\left(\frac{\partial W}{\partial r_*}\right)^2 + \frac{2E(1-2\eta)}{A-2\dot{r}_H}\frac{\partial W}{\partial r_*} + V - \frac{\lambda^2}{r^2} = 0, \tag{13}$$

$$\begin{aligned}&\frac{1-2\eta}{A-2\dot{r}_H}\frac{\partial^2 W}{\partial r_*^2} - 2E(p+2)\frac{1}{r} + \left[(A-2\dot{r}_H)\left(\frac{\partial}{\partial \hat{r}}\frac{1-2\eta}{A-2\dot{r}_H}\right) + 2\left(\frac{\partial}{\partial \hat{\upsilon}}\frac{1-2\eta}{A-2\dot{r}_H}\right)\right.\\ &\left.+2(p+2)\frac{\eta}{r} + \left(\frac{4A}{r} + (p+1)A' - 2\dot{r}_H(p+2)\frac{1}{r}\right)\frac{1-2\eta}{A-2\dot{r}_H}\right]\frac{\partial W}{\partial r_*} = 0,\end{aligned} \tag{14}$$

利用(13)式，则径向波数为[12]

$$K(r_*, p, l, E) = -E + \frac{\partial W}{\partial r_*} = \pm\left[E^2 + \frac{A - 2\dot{r}_H}{1 - 2\eta}\left(V - \frac{\lambda^2}{r^2}\right)\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{15}$$

根据半经典的量子化规则,能谱由下式给出

$$\oint K(r_*, p, l, E)\mathrm{d}r_* = 2n\pi, \tag{16}$$

其中 n 为主量子数. 采用薄膜 brick-wall 模型[21,22],在事件视界 r_H 附近的一个薄区域 a 内,则有

$$\mathrm{d}r_* \approx \frac{1 - 2\dot{r}_H}{A - 2\dot{r}_H}\mathrm{d}\,\hat{r}, \tag{17}$$

$$\int_a \left[E^2 + \frac{A - 2\dot{r}_H}{1 - 2\dot{r}_H}(V - \frac{\lambda^2}{r^2})\right]^{\frac{1}{2}} \frac{1 - 2\dot{r}_H}{A - 2\dot{r}_H}\mathrm{d}\,\hat{r} = n\pi. \tag{18}$$

能量不超过 E 的本征态数目由下式给出

$$\begin{aligned} g(E) &= \sum_p \sum_l (2l+1)n \\ &\approx \frac{1}{\pi}\sum_p \int_{|p|}^{l_{\max}} (2l+1)\mathrm{d}l \int_a \left[E^2 + \frac{A - 2\dot{r}_H}{1 - 2\dot{r}_H}(V - \frac{\lambda^2}{r^2})\right]^{\frac{1}{2}} \frac{1 - 2\dot{r}_H}{A - 2\dot{r}_H}\mathrm{d}\,\hat{r}, \end{aligned} \tag{19}$$

在对 l 的积分中,上下限的确定满足角动量 $l \geqslant |p|$ 和波数是实数的要求,则(19)式对 l 积分后变为

$$g(E) = \frac{2}{3\pi}\sum_p \int_a \frac{(1 - 2\dot{r}_H)^2 r^2}{(A - 2\dot{r}_H)^2}\left[E^2 + \frac{A - 2\dot{r}_H}{1 - 2\dot{r}_H}(V - \frac{4}{r^2})\right]^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}\,\hat{r}. \tag{20}$$

由量子统计理论,系统的自由能可表示为

$$F = \frac{1}{\beta}\int_0^\infty \mathrm{d}E\,\frac{\mathrm{d}g(E)}{\mathrm{d}E}\ln(1 - \mathrm{e}^{-\beta E}) = -\int_0^\infty \frac{g(E)}{\mathrm{e}^{\beta E} - 1}\mathrm{d}E. \tag{21}$$

将(20)式代入(21)式,对能量 E 积分后,得

$$F = -\frac{2}{3\pi}\sum_p \left[\frac{\Gamma(4)\zeta(4)}{\beta^4}\int_a \frac{(1 - 2\dot{r}_H)^2 r^2}{(A - 2\dot{r}_H)^2}\mathrm{d}\,\hat{r} - \frac{3\zeta(2)}{2\beta^2}\int_a \frac{1 - 2\dot{r}_H}{A - 2\dot{r}_H}(2 - Vr^2)\mathrm{d}\,\hat{r}\right], \tag{22}$$

其中 $\frac{1}{\beta}$ 为温度,$\Gamma(n)$ 为伽玛函数,$\zeta(n)$ 为 Riemann-Zeta 函数. 由量子统计理论知系统熵与自由能的关系为 $S = \beta^2\frac{\partial F}{\partial \beta}$,所以(22)式对应的熵为

$$S = \frac{16\Gamma(4)\zeta(4)}{3\pi\beta^3}\int_a \frac{(1 - 2\dot{r}_H)^2 r^2}{(A - 2\dot{r}_H)^2}\mathrm{d}\,\hat{r} - \frac{2\zeta(2)}{\pi\beta}\sum_p \int_a \frac{1 - 2\dot{r}_H}{A - 2\dot{r}_H}(2 - Vr^2)\mathrm{d}\,\hat{r}. \tag{23}$$

在(23)式积分中,视界方程

$$\begin{aligned} A - 2\dot{r}_H &= -\frac{\Lambda}{3r^2}\left[r^4 - \frac{3(1 - 2\dot{r}_H)r^2}{\Lambda} + \frac{6Mr}{\Lambda} - \frac{3Q^2}{\Lambda}\right] \\ &= -\frac{\Lambda}{3r^2}(r - r_1)(r - r_2)(r - r_3)(r - r_4), \end{aligned} \tag{24}$$

其中 $r_1 < r_2 < r_3$ 为 $(A - 2\dot{r}_H) = 0$ 的三个根[23],分别解释为内、外事件视界和宇宙视界,r_4 是一个负实根. 考虑外视界($r_2 = r_H$)附近的薄区域,即 $a = \{(r, \theta, \varphi) \mid r_H + \xi \leqslant r \leqslant r_H + c\xi\}$,$\xi$ 为薄区域与视界面的距离,是无穷小量,c 为大于 1 的小正数. 利用(24)式和(6)式可计算出(23)式中的前一项积分,将 V 代入(23)式,可计算出(23)式中的后一项积分,但此项积分对黑洞的熵无贡献.

最后，计算出 Vaidya-Bonner-de Sitter 黑洞的熵为

$$S=\frac{48\Gamma(4)\zeta(4)(1-2\dot{r}_H)^2}{\pi\Lambda^2\beta^3}\frac{(c-1)B}{c\xi}, \tag{25}$$

其中

$$B=\frac{r_H^6}{(r_H-r_1)^2(r_H-r_3)^2(r_H-r_4)^2}.$$

4 结论

我们把 brick-wall 模型推广到了 Vaidya-Bonner-de Sitter 黑洞，得到了黑洞背景下电磁场的量子熵(25)式．将(25)式与已知的 Reissner-Nordström-de Sitter 黑洞熵的结果([4]中(33)式)比较，形式上多了一个描述动态黑洞的因子$(1-2\dot{r}_H)^2$．当$\dot{r}_H=0$时，与相应静态黑洞熵的结果[4]完全相同，即(25)式可回到静态黑洞情况；同时与同一黑洞背景下引力场的量子熵[24]比较，发现引力场与电磁场的量子熵完全相同．由此推得，对于玻色场，粒子自旋态的简并度相同时，任意黑洞背景下量子熵的主导项完全相同．

参 考 文 献

[1] 't Hooft G. On the quantum structure of a black hole. Nucl Phys，1985，**256B**：727－745

[2] Demers J，Lafrance R，Myers R C. Black hole entropy without brick wall. Phys Rev，1995，**52D**：2245

[3] Li Z H. Quantum corrections to the entropy of a Reissner-Nordström black hole due to spin fields. Phys Rev，2000，**62D**：1－3

[4] Li Z H. Divergence structure for The statistical entropy of spin fields in Reissner-Nordström-de sitter space-time. Mod Phys Lett，2002，**17A**(14)：887－897

[5] Liu W B，Zhao Z. Entropy of Dirac field in Kerr-Newman black hole. Phys Rev，2000，**61D**：1－7

[6] Jing J，Yan M L. Effect of spin on the quantum entropy of black holes. Phys Rev，2001，**63D**：1－9

[7] 张丽春，武月琴，赵仁．轴对称 Einstein-Maxwell-Dilaton-Axion 黑洞熵与能斯特定理．数学物理学报，2002，**22A**(1)：115－120

[8] Li X，Zhao Z. Entropy of a Vaidya black hole. Phys Rev，2000，**62D**：1－4

[9] He F，Zhao Z，Kim S W. Statistical entropies of scalar and spinor fields inVaidya-de Sitter space-time computed by the thin-layer method. Phys Rev，2001，**64D**：1－9

[10] Gao C J，Shen Y G. Fermion entropy of Vaidya-Bonner black hole. Chin Phys Lett，2001，**18**：1167－1169

[11] 宋太平，候晨霞，史旺林．Vaidya-Bonner 黑洞的熵．物理学报，2002，**51**：1398－1401

[12] Li Z H，Mi L Q，Zhao Z. Brick walls for nonstationary black holes. Chin Phys Lett，2002，**19**(12)：1755－1758

[13] Li Z H. Quantum Ergosphere and Hawking process. Mod Phys Lett，1999，**14A**：1951－1960

[14] Zhao Z，Dai X X. A new method dealing with Hawking effects of evaporating black holes. Mod Phys Lett，1992，**7A**(20)：1771－1778

[15] Kim S W，Choi E Y，Kim S K，Yang J. Black hole radiation in the Vaidya Metric. Phys Lett，1989，**141**：238－242

[16] Li Z H，Zhao Z. Hawking effect of Dirac particles in nonstationary Kerr space-time. Science in China，1995，**38A**：74－81

[17] 孙鸣超，赵仁，赵峥．任意加速运动的 Kerr 黑洞热辐射．物理学报，1995，**44**：1018－1021

[18] Li Z H，Liang Y，Mi L Q. New quantum effect for Vaidya-Bonner-de Sitter Black holes. International Journal of Theoretical Physics，1999，**38**：925－931

[19] Carmeli M. Classical Fields：General Relativity and Gauge Theory. New York：Wiley，1982. 144－151

[20] Jensen B P，Laughlin J G，Ottewill A C. One-loop quantum gravity in Schwarzschild space-tine. Phys Rev，1995，**51D**(10)：5676－5697

[21] Liu W B，Zhao Z. An improved thin film brick-wall model of black hole entropy. Chin Phys Lett，2001，**18**(2)：310

—312
[22] Li X, Zhao Z. Entropy of Vaidya-de Sitter space-time. Chin Phys Lett, 2001,**18**(3):463—465
[23] 黎忠恒,米丽琴. 动态时空中事件视界的确定. 宁夏大学学报,1998,**19**(3):238—240
[24] 孙鸣超. 起源于引力场的 Vaidya-Bonner-de Sitter 黑洞的量子熵. 物理学报,2003,**52**(6):1350—1353

Quantum Entropy of the Electromagnetic Field in Vaidya-Bonner-de Sitter Black Hole

Sun Mingchao
(*Department of Physics*, *Longdong College*, *QingYang* 745000)

Abstract: In the tortoise coordinates, the quantum corrections to the entropy of the Vaidya-Bonner-de Sitter black hole due to electromagnetic field are investigated by using the brick-wall model. When the event horizon of the black hole does not depend upon the advanced-time, the result coincide with that of the Reissner-Nordström-de Sitter black hole.
Key words: Electromagnetic field; Brick-wall model; Vaidya-Bonner-de Sitter black hole; Quantum entropy.
MR(2000) Subject Classification: 83C57