Acta Mathematica Scientia
数学物理学报

2009,**29A**(4):1033–1043

http://actams.wipm.ac.cn

Heisenberg 群上无穷远处的集中列紧原理和具有 Sobolev 临界指数的 p - 次 Laplace 方程多解的存在性 *

[1] 窦井波 [2] 郭千桥

([1] 西安财经学院统计学院 西安 710061; [2] 西北工业大学应用数学系 西安 710072)

摘要：通过建立 Heisenberg 群上无穷远处的集中列紧原理，研究了如下 p - 次 Laplace 方程

$$\begin{cases} -\Delta_{H,p}u = \lambda g(\xi)|u|^{q-2}u + f(\xi)|u|^{p^*-2}u, & \text{在 } \mathbb{H}^n \text{上}, \\ u \in D^{1,p}(\mathbb{H}^n), \end{cases}$$

其中 $\xi \in \mathbb{H}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $1 < p < Q = 2n+2$, $n \geq 1$, $1 < q < p, p^* = \frac{Qp}{Q-p}$, $g(\xi)$, $f(\xi)$ 是可以变号和满足一定条件的函数. 在适当条件下利用集中列紧原理证明在某个水平处的 Palais-Smale 条件，从而结合变分原理得到方程存在 $m-j$ 对解，其中 $m > j$, 且 m, j 为整数.

关键词：Heisenberg 群； p - 次 Laplace 算子；集中列紧原理； Palais-Smale 条件；多解.

MR(2000) 主题分类: 35D05; 35D10; 35J70 **中图分类号**: 0175.25 **文献标识码**: A

文章编号: 1003-3998(2009)04-1033-11

1 引言

在欧氏空间上，集中列紧原理在研究变分问题中起着重要作用. 文献 [1–2] 中的集中列紧原理被广泛地应用于研究 Sobolev 空间中无界域上或具有 Sobolev 临界指数的极小值问题. 但 P.L. Lions 的结果只考虑了在有限点处弱收敛序列可能存在的 "集中", 没有提供序列在无穷远处 "集中" 的遗失. 最近，在文献 [3–4] 中分别证明了 $p=2$ 和 $p \neq 2(1<p<N)$ 时临界情形下无穷远处的集中列紧原理，在文献 [5–6] 中分别讨论了 $p=2$ 和 $p \neq 2$ 时的次临界情形. 从而为研究无界域上在无穷远处的弱收敛序列提供了一种新的工具.

本文建立 Heisenberg 群上无穷远处临界情形下的集中列紧原理，并应用到如下具有 Sobolev 临界指数的 p - 次 Laplace 方程

$$\begin{cases} -\Delta_{H,p}u = \lambda g(\xi)|u|^{q-2}u + f(\xi)|u|^{p^*-2}u, & \text{在 } \mathbb{H}^n \text{上}, \\ u \in D^{1,p}(\mathbb{H}^n), \end{cases} \tag{1}$$

收稿日期：2008-04-18; 修订日期：2009-05-27

E-mail: djbmn@126.com

* 基金项目：陕西省自然科学基础研究计划 (2006A09) 和西北工业大学科技创新基金 (2008kJ02033) 资助

其中 $\Delta_{H,p}$ 为 Heisenberg 群上 p - 次 Laplace 算子， $\xi\in\mathbb{H}^n,\lambda\in\mathbb{R},1<p<Q=2n+2$(为齐次维数), $n\geq 1$, $1<q<p,p^*=\frac{Qp}{Q-p}$ 为 Sobolev 临界指数， $g(\xi)\in L^r(\mathbb{H}^n),r=\frac{p^*}{p^*-q},f(\xi)\in C(\mathbb{H}^n)\cap L^\infty(\mathbb{H}^n)$ 并满足适当条件. 在适当假设下，我们利用集中列紧原理验证在水平 $c\in\mathbb{R}$ 处的 Palais-Smale 条件成立，并借助 Clark 临界点定理讨论问题 (1) 多解的存在性.

Heisenberg 群在量子力学, 调和分析, 表示理论, 偏微分方程等分支中有着重要的作用. Heisenberg 群上的 Sobolev 不等式， Hardy 不等式， Picone 恒等式等重要性质已经得到研究，参见文献 [7–8]. Heisenberg 群上次 Laplace 方程的研究已有大量结果，参见文献 [9–10] 及其参考文献. 关于 p - 次 Laplace 方程的研究近些年也有进展. 在文献 [11] 中, 给出了有限点处的集中列紧原理并讨论了具有 Sobolev 临界指数的 p - 次 Laplace 方程的极小值问题.

在欧氏空间上具有 Sobolev 临界指数的 Laplace 和 p -Laplace 方程的类似于问题 (1) 的研究已有大量的文献，参见文献 [3–5, 12–14] 及其参考文献.

本文的组织如下：第二节中，先介绍一些 Heisenberg 群的基本性质和下文必需的相关结论；第三节中，证明 Sobolev 临界情形下的无穷远处的集中列紧原理；第四节中，建立水平 c 处的 Palais-Smale 条件；第五节中，利用 Clark 临界点定理证明问题 (1) 存在 $m-j$ 对非平凡弱解，其中 $m>j$, 且 m,j 为整数.

2 记号和预备知识

这一节，我们介绍 Heisenberg 群的一些基本知识和必需结论.

令 $\xi=(z,t)=(x,y,t)=(x_1,x_2\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_n,t),z=(x,y)$, $x\in\mathbb{R}^n,y\in\mathbb{R}^n,t\in\mathbb{R},n\geq 1,\xi'=(x',y',t')\in\mathbb{R}^{2n+1}$, Heisenberg 群 $\mathbb{H}^n$ 是赋予如下群法则的 $\mathbb{R}^{2n+1}$ 集合

$$\xi\circ\xi'=\Big(x+x',y+y',t+t'+2\sum_{i=1}^n(x_iy_i'-x_i'y_i)\Big).$$

$\mathbb{H}^n$ 上齐次模为

$$\|\xi\|_H=[(|x|^2+|y|^2)^2+t^2]^{\frac14}=(|z|^4+t^2)^{\frac14},\quad |z|=(x^2+y^2)^{\frac12}.$$

相应的距离函数定义为

$$d(\xi,\xi')=\|\xi'^{-1}\circ\xi\|_H=\{[(x-x')^2+(y-y')^2]^2+[t-t'-2(x\cdot y'-x'\cdot y)]^2\}^{\frac14},$$

其中 $\xi'^{-1}=-\xi'$. 本文将用记号 $d=d(\xi)=\|\xi\|_H$.

定义 Heisenberg 群上的向量场

$$X_i=\frac{\partial}{\partial x_i}+2y_i\frac{\partial}{\partial t},\quad Y_i=\frac{\partial}{\partial y_i}-2x_i\frac{\partial}{\partial t}\quad (i=1,2,\cdots,n).$$

相应于 Heisenberg 群上的广义梯度是 $\nabla_H=(X_1,\cdots,X_n,Y_1,\cdots,Y_n)$, 广义散度为 $\mathrm{div}_H\mathbf{u}=\sum\limits_{i=1}^n(X_i\mathbf{u}_i+Y_i\mathbf{u}_{n+i})$, $\mathbf{u}=(\mathbf{u}_1,\cdots,\mathbf{u}_n,\mathbf{u}_{n+1},\cdots,\mathbf{u}_{2n})$. 因此， p - 次 Laplace 算子 $\Delta_{H,p}$ 定义为

$$\Delta_{H,p}u=\mathrm{div}_H(|\nabla_Hu|^{p-2}\nabla_Hu)=\nabla_H(|\nabla_Hu|^{p-2}\nabla_Hu).$$

由计算易得

$$\nabla_Hd=\frac{1}{d^3}\begin{pmatrix}|z|^2x+yt\\ |z|^2y-xt\end{pmatrix},\quad |\nabla_Hd|^p=\frac{|z|^p}{d^p}=\psi_p.$$

以点 ξ 为中心，半径为 R 的开球记为 $B_H(\xi,R)=\{\xi\in\mathbb{H}^n|d(\xi,\xi')<R\}$. 若 ξ 为原点，则记 $B_H(R)=B_H(0,R)=\{\xi\in\mathbb{H}^n|d(\xi)<R\}$.

设 $\Omega\subseteq\mathbb{H}^n$, 称 $D_0^{1,p}(\Omega)$ 是 $C_0^\infty(\Omega)$ 在范数 $\|u\|_{D^{1,p}}=\left(\int_\Omega|\nabla_H u|^p\mathrm{d}\xi\right)^{\frac{1}{p}}$ 下的完备化. 若 $\Omega=\mathbb{H}^n$ 时， $D_0^{1,p}(\mathbb{H}^n)=D^{1,p}(\mathbb{H}^n)$ 为自反的实 Banach 空间. 记 $\|u\|_{L^s}=\left(\int_{\mathbb{H}^n}|u|^s\mathrm{d}\xi\right)^{\frac{1}{s}}$. 在文献 [7] 中， Folland 和 Stein 证明了 Heisenberg 群上的 Sobolev 不等式：对任意函数 $u\in D^{1,p}(\mathbb{H}^n)$, 存在常数 $S>0$, 有

$$S\Big(\int_{\mathbb{H}^n}|u|^{p^*}\mathrm{d}\xi\Big)^{\frac{p}{p^*}}\le\int_{\mathbb{H}^n}|\nabla_H u|^p\mathrm{d}\xi.$$

在文献 [11] 中证明了极值

$$S=\inf\Big\{\frac{\|u\|^p_{D^{1,p}}}{\|u\|^p_{L^{p^*}}};\,u\in D^{1,p}(\mathbb{H}^n)\backslash\{0\}\Big\}$$

可以达到.

3 集中列紧原理

我们先叙述文献 [11] 中有限点处的第二集中列紧原理.

引理 3.1 设 $\{u_m\}$ 是 $D^{1,p}(\mathbb{H}^n)$ 中的有界序列， u_m 于 $D^{1,p}(\mathbb{H}^n)$ 中弱收敛到 u, 且存在 $\mathbb{H}^n$ 上的非负测度 ν,μ 使得 $|u_m|^{p^*}\rightharpoonup\nu, |\nabla_H u_m|^p\rightharpoonup\mu$, 则存在一个至多可数指标集 J 及一个相应的点集 $\{\omega_j\in\mathbb{H}^n\,|\,j\in J\}$ 和两个非负数集 $\{a_j\}, \{b_j\}$ 使得

(i) $|\nabla_H u_m|^p\rightharpoonup\mathrm{d}\mu\ge|\nabla_H u|^p+\sum\limits_{j\in J}b_j\delta_j$;

(ii) $|u_m|^{p^*}\rightharpoonup\mathrm{d}\nu=|u|^{p^*}+\sum\limits_{j\in J}a_j\delta_j$;

(iii) $b_j\ge Sa_j^{\frac{p}{p^*}}$.

其中 δ_j 表示极点在 ω_j 处的 Dirac 测度.

下面，给出临界情形下无穷远处的集中列紧原理.

引理 3.2 令 Ω 是 $\mathbb{H}^n$ 上的一个无界域， $\{u_m\}$ 是 $D^{1,p}(\mathbb{H}^n)$ 中的有界序列，对 $R>0$, 记

$$\nu_\infty:=\lim_{R\to\infty}\limsup_{m\to\infty}\int_{\Omega\cap\{d>R\}}|u_m|^{p^*}\mathrm{d}\xi,$$

$$\mu_\infty:=\lim_{R\to\infty}\limsup_{m\to\infty}\int_{\Omega\cap\{d>R\}}|\nabla_H u_m|^p\mathrm{d}\xi.$$

那么

(i) $\limsup\limits_{m\to\infty}\int_\Omega|u_m|^{p^*}\mathrm{d}\xi=\int_\Omega\mathrm{d}\nu+\nu_\infty$;

(ii) $\limsup\limits_{m\to\infty}\int_\Omega|\nabla_H u_m|^p\mathrm{d}\xi=\int_\Omega\mathrm{d}\mu+\mu_\infty$;

(iii) $S(\nu_\infty)^{\frac{p}{p^*}}\le\mu_\infty$.

证 (a) 为了证明 (i), 记 $B_H^c(R)=\{\xi\in\mathbb{H}^n|d(\xi)\ge R\}$. 这样,

$$\begin{aligned}\limsup_{m\to\infty}\int_\Omega|u_m|^{p^*}\mathrm{d}\xi&=\limsup_{m\to\infty}\int_{\Omega\cap B_H(R)}|u_m|^{p^*}\mathrm{d}\xi+\limsup_{m\to\infty}\int_{\Omega\cap B_H^c(R)}|u_m|^{p^*}\mathrm{d}\xi\\&=\int_{\Omega\cap B_H(R)}\mathrm{d}\nu+\limsup_{m\to\infty}\int_{\Omega\cap B_H^c(R)}|u_m|^{p^*}\mathrm{d}\xi.\end{aligned}$$

在上式中令 $R\to\infty$, (i) 得证.

(b) 类似于 (i) 可证 (ii).

(c) 设 $\phi\in C_0^\infty(\mathbb{H}^n)$ 使得 $0\le\phi(\xi)\le 1$ 和

$$\phi(\xi)=\begin{cases}0, & \xi\in B_H(1),\\ 1, & \xi\notin B_H(2),\end{cases}$$

且 $|\phi'(\xi)|\le 2$. 我们已知基本不等式

$$|a+b|^p\le|a|^p+c_p(|a|^{p-1}|b|+|b|^p),\quad a,b\in\mathbb{R}^{2n},\ p>1. \tag{2}$$

选取 $\phi_R(\xi)=\phi(\frac{d(\xi)}{R})$. 由 Sobolev 不等式， Hölder 不等式和 (2) 式有

$$\begin{aligned}&S\Big(\int_\Omega|\phi_R u_m|^{p^*}\mathrm{d}\xi\Big)^{\frac{p}{p^*}}\le\int_\Omega|\nabla_H(\phi_R u_m)|^p\mathrm{d}\xi=\int_\Omega|\phi_R\nabla_H u_m+u_m\nabla_H\phi_R|^p\mathrm{d}\xi\\
\le&\int_\Omega|\phi_R\nabla_H u_m|^p\mathrm{d}\xi+c_p\Big(\int_\Omega|\phi_R\nabla_H u_m|^{p-1}|u_m\nabla_H\phi_R|\mathrm{d}\xi+\int_\Omega|u_m\nabla_H\phi_R|^p\mathrm{d}\xi\Big)\\
\le&\int_\Omega|\phi_R\nabla_H u_m|^p\mathrm{d}\xi\\
&+c_p\Big[\Big(\int_\Omega|\phi_R\nabla_H u_m|^p\mathrm{d}\xi\Big)^{\frac{p-1}{p}}\Big(\int_\Omega|u_m\nabla_H\phi_R|^p\mathrm{d}\xi\Big)^{\frac{1}{p}}+\int_\Omega|u_m\nabla_H\phi_R|^p\mathrm{d}\xi\Big]\\
\le&\int_\Omega|\phi_R\nabla_H u_m|^p\mathrm{d}\xi\\
&+c_p\Big(\int_\Omega|u_m\nabla_H\phi_R|^p\mathrm{d}\xi\Big)^{\frac{1}{p}}\Big[\Big(\int_\Omega|\phi_R\nabla_H u_m|^p\mathrm{d}\xi\Big)^{\frac{p-1}{p}}+\Big(\int_\Omega|u_m\nabla_H\phi_R|^p\mathrm{d}\xi\Big)^{\frac{p-1}{p}}\Big].\end{aligned}\tag{3}$$

由 $\phi_R(\xi)$ 的选取可得

$$\lim_{R\to\infty}\limsup_{m\to\infty}\int_\Omega|u_m\phi_R|^{p^*}\mathrm{d}\xi=\nu_\infty,\quad \lim_{R\to\infty}\limsup_{m\to\infty}\int_\Omega|\phi_R\nabla_H u_m|^p\mathrm{d}\xi=\mu_\infty.$$

由 u_m 的定义知在 $D_0^{1,p}(\Omega\cap B_H(R))$ 中 $u_m\nabla_H\phi_R\rightharpoonup u\nabla_H\phi_R$, 且因为 $D_0^{1,p}(\Omega\cap B_H(R))$ 紧嵌入到 $L^p(\Omega\cap B_H(R))$(见文献 [15]), 以及 $\nabla_H\phi_R=\frac{1}{R}\phi'(\frac{d}{R})\nabla_H d$, 所以

$$\lim_{R\to\infty}\limsup_{m\to\infty}\int_\Omega|u_m\nabla_H\phi_R|^p\mathrm{d}\xi=\lim_{R\to\infty}\limsup_{m\to\infty}\frac{1}{R}\int_\Omega|\phi_R'||u_m\nabla_H d|^p\mathrm{d}\xi=0.$$

结合 (3) 式可得

$$S(\nu_\infty)^{\frac{p}{p^*}}\le\mu_\infty,$$

则 (iii) 成立．结论得证. ∎

注 3.3 在引理 3.2 的证明中，我们所利用的不等式 (2) 与文献 [3–6] 中的不同，这样检验函数 ϕ 的选取也就不同.

4 假设和 Palais-Smale 条件

这一节，我们建立在水平 $c\in\mathbb{R}$ 处的 Palais-Smale 条件 (简记为 $(\mathrm{PS})_c$)．为了方便，记 $X=D^{1,p}(\mathbb{H}^n)$, X^* 表示 X 的对偶空间．记 $f_+(\xi)=\max\{0,f(\xi)\}\not\equiv 0$ 和 $f(\infty)=\limsup\limits_{d(\xi)\to\infty}f(\xi)$, $\|f\|_\infty=\sup\limits_{\xi\in\mathbb{H}^n}f(\xi)$.

定义 4.1 称 $u\in X$ 是问题 (1) 的 (弱) 解，若对任意的 $v\in X$ 满足

$$\int_{\mathbb{H}^n}|\nabla_H u|^{p-2}\langle\nabla_H u,\nabla_H v\rangle\mathrm{d}\xi=\lambda\int_{\mathbb{H}^n}g(\xi)|u|^{q-2}uv\mathrm{d}\xi+\int_{\mathbb{H}^n}f(\xi)|u|^{p^*-2}uv\mathrm{d}\xi. \tag{4}$$

定义泛函 $J,G,F:X\to X^*$ 如下：对任意 $u,v\in X$, 有

$$\langle J(u),\,v\rangle=\int_{\mathbb{H}^n}|\nabla_H u|^{p-2}\langle\nabla_H u,\nabla_H v\rangle\mathrm{d}\xi,$$

$$\langle G(u),\,v\rangle=\int_{\mathbb{H}^n}g(\xi)|u|^{q-2}uv\mathrm{d}\xi,$$

$$\langle F(u),\,v\rangle=\int_{\mathbb{H}^n}f(\xi)|u|^{p^*-2}uv\mathrm{d}\xi,$$

$$I_\lambda(u)=\frac{1}{p}J(u)-\frac{\lambda}{q}G(u)-\frac{1}{p^*}F(u).$$

记

$$\langle J'(u),\,v\rangle=p\int_{\mathbb{H}^n}|\nabla_H u|^{p-2}\langle\nabla_H u,\nabla_H v\rangle\mathrm{d}\xi,$$

$$\langle G'(u),\,v\rangle=q\int_{\mathbb{H}^n}g(\xi)|u|^{q-2}uv\mathrm{d}\xi,$$

$$\langle F'(u),\,v\rangle=p^*\int_{\mathbb{H}^n}f(\xi)|u|^{p^*-2}uv\mathrm{d}\xi,$$

$$\langle I'_\lambda(u),v\rangle=\frac{1}{p}\langle J'(u),\,v\rangle-\frac{\lambda}{q}\langle G'(u),\,v\rangle-\frac{1}{p^*}\langle F'(u),\,v\rangle.$$

引理 4.2 (1) 泛函 $G(u)$ 在 X 上是有意义的，弱连续的. 并且 $G(u)$ 是连续可微的，其导数 $\langle G'(u),\,v\rangle$ 是弱连续序列到弱连续序列.

(2) 泛函 $F(u)$ 在 X 上是有意义的，并且 $F(u)$ 是连续可微的，其导数 $\langle F'(u),\,v\rangle$ 是弱连续序列到弱连续序列.

证 泛函 G 和 F 是有意义的. 由 $g\in L^r(\mathbb{H}^n)$, $r=\frac{p^*}{p^*-q}$, Hölder 不等式和 Sobolev 不等式可得

$$\begin{aligned}&|\langle G(u),v\rangle|=\int_{\mathbb{H}^n}|g|^{\frac{q-1}{q}}|u|^{q-2}u|g|^{\frac{1}{q}}v\mathrm{d}\xi\\ &\le\Big(\int_{\mathbb{H}^n}|g||u|^q\mathrm{d}\xi\Big)^{\frac{q-1}{q}}\Big(\int_{\mathbb{H}^n}|g||v|^q\mathrm{d}\xi\Big)^{\frac{1}{q}}\\ &\le\Big[\Big(\int_{\mathbb{H}^n}|g|^{\frac{p^*}{p^*-q}}\mathrm{d}\xi\Big)^{\frac{p^*-q}{p^*}}\Big(\int_{\mathbb{H}^n}|u|^{p^*}\mathrm{d}\xi\Big)^{\frac{q}{p^*}}\Big]^{\frac{q-1}{q}}\Big[\Big(\int_{\mathbb{H}^n}|g|^{\frac{p^*}{p^*-q}}\mathrm{d}\xi\Big)^{\frac{p^*-q}{p^*}}\Big(\int_{\mathbb{H}^n}|v|^{p^*}\mathrm{d}\xi\Big)^{\frac{q}{p^*}}\Big]^{\frac{1}{q}}\\ &=\|g\|_{L^r}\Big(\int_{\mathbb{H}^n}|u|^{p^*}\mathrm{d}\xi\Big)^{\frac{q-1}{p^*}}\Big(\int_{\mathbb{H}^n}|v|^{p^*}\mathrm{d}\xi\Big)^{\frac{1}{p^*}}<\infty.\end{aligned}\tag{5}$$

故 G 是有意义的.

由 $f(\xi)\in L^\infty(\mathbb{H}^n)$, Hölder 不等式和 Sobolev 不等式可得

$$\begin{aligned}|\langle F(u),\,v\rangle|&=\Big|\int_{\mathbb{H}^n}f(\xi)|u|^{p^*-2}uv\mathrm{d}\xi\Big|\le\|f\|_\infty\int_{\mathbb{H}^n}|u|^{p^*-1}|v|\mathrm{d}\xi\\ &\le\|f\|_\infty\Big(\int_{\mathbb{H}^n}|u|^{p^*}\Big)^{\frac{p^*-1}{p^*}}\Big(\int_{\mathbb{H}^n}|v|^{p^*}\mathrm{d}\xi\Big)^{\frac{1}{p^*}}<\infty.\end{aligned}\tag{6}$$

故 F 是有意义的.

余下证明与文献 [12, 14] 中的证明类似，在此略去. ∎

注 4.3 从引理 4.2 可知泛函 I_λ 在 X 上是有意义的，连续可微的. 这样， I_λ 的任意非零临界点就是问题 (1) 的弱解.

定义 4.4 称 Banach 空间 X 上的 C^1 泛函 I_λ 满足 $(\mathrm{PS})_c (c\in\mathbb{R})$ 是指：若 $\{u_m\}\subset X$, 且当 $m\to\infty$ 时， $I_\lambda(u_m)\to c$, $I'_\lambda(u_m)\to 0$, 则 $\{u_m\}$ 在 X 中有收敛子列.

引理 4.5 设 $1<q<p$ 和 $c<0$. 若存在一个 $\lambda_*>0$ 使得 $\lambda\in(0,\lambda_*)$, 那么 I_λ 满足 $(\mathrm{PS})_c$.

证 设序列 $\{u_m\}\subset X$ 使得当 $m\to\infty$ 时，有

$$I_\lambda(u_m)\to c,\qquad I'_\lambda(u_m)\to 0. \tag{7}$$

那么，对 m 充分大， $1<q<p$ 有

$$\begin{aligned} c+1+\|u_m\|_X &\ge I_\lambda(u_m)-\frac{1}{p^*}\langle I'_\lambda(u_m),u_m\rangle\\ &=\Big(\frac1p-\frac1{p^*}\Big)\int_{\mathbb{H}^n}|\nabla_H u_m|^p\mathrm{d}\xi-\lambda\Big(\frac1q-\frac1{p^*}\Big)\int_{\mathbb{H}^n}g(\xi)|u_m|^q\mathrm{d}\xi\\ &=\frac1Q\|u_m\|_X^p-\lambda\Big(\frac1q-\frac1{p^*}\Big)S^{-\frac qp}\|g\|_{L^r}\|u_m\|_X^q. \end{aligned}$$

上式说明 $\{u_m\}$ 有界.

现在，假定在 X 中 $u_m\rightharpoonup u$, 存在测度 μ 和 ν 使得引理 3.1 中的 (i), (ii), (iii) 成立. 设 ξ_j 是测度 μ 和 ν 的奇异点. 定义检验函数 $\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{H}^n)$ 使得 $0\le\varphi(\xi)\le1$ 和

$$\varphi(\xi)=\begin{cases}1, & \xi\in B_H(\xi_j,\delta),\\ 0, & \xi\in\mathbb{H}^n\setminus B_H(\xi_j,2\delta),\end{cases}$$

且 $|\nabla_H\varphi(\xi)|\le\frac2\delta$. 这样，在 X 上 $\{\varphi u_m\}$ 有界. 事实上，由 Hölder 不等式可得

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{H}^n}|u_m\nabla_H\varphi|^p\mathrm{d}\xi&\le\Big(\int_{B_H(\xi_j,2\delta)}|u_m|^{p^*}\mathrm{d}\xi\Big)^{\frac p{p^*}}\Big(\int_{\mathbb{H}^n}|\nabla_H\varphi|^Q\mathrm{d}\xi\Big)^{\frac pQ}\\ &\le c_1\Big(\int_{B_H(\xi_j,2\delta)}|u_m|^{p^*}\mathrm{d}\xi\Big)^{\frac p{p^*}},\end{aligned}\tag{8}$$

其中 c_1 是与 Q,δ,j 无关的常数. 结合 C_p 不等式和 (8) 式有

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{H}^n}|\nabla_H(u_m\varphi)|^p\mathrm{d}\xi&=\int_{\mathbb{H}^n}|u_m\nabla_H\varphi+\varphi\nabla_H u_m|^p\mathrm{d}\xi\\ &\le 2^{p-1}\Big(\int_{\mathbb{H}^n}|u_m\nabla_H\varphi|^p\mathrm{d}\xi+\int_{\mathbb{H}^n}|\varphi\nabla_H u_m|^p\mathrm{d}\xi\Big)\\ &\le 2^{p-1}\Big[c_1\Big(\int_{B_H(\xi_j,2\delta)}|u_m|^{p^*}\mathrm{d}\xi\Big)^{\frac p{p^*}}+\int_{\mathbb{H}^n}|\nabla_H u_m|^p\mathrm{d}\xi\Big].\end{aligned}\tag{9}$$

这就说明在 X 上 $\{\varphi u_m\}$ 有界. 从 (7) 式知 $\langle I'_\lambda(u_m),\varphi u_m\rangle\to0$, 即

$$0=\lim_{m\to\infty}\Big(\int_{\mathbb{H}^n}|\nabla_H u_m|^{p-2}\langle\nabla_H u_m,u_m\nabla_H\varphi\rangle\mathrm{d}\xi+\int_{\mathbb{H}^n}|\nabla_H u_m|^p\varphi\mathrm{d}\xi$$

$$
\begin{aligned}
&-\lambda\int_{\mathbb{H}^n} g(\xi)|u_m|^q\varphi\mathrm{d}\xi-\int_{\mathbb{H}^n} f(\xi)|u_m|^{p^*}\varphi\mathrm{d}\xi\Big)\\
=&\lim_{m\to\infty}\int_{\mathbb{H}^n}|\nabla_H u_m|^{p-2}\langle\nabla_H u_m,u_m\nabla_H\varphi\rangle\mathrm{d}\xi+\int_{\mathbb{H}^n}\varphi\mathrm{d}\mu\\
&-\lambda\int_{\mathbb{H}^n} g(\xi)|u|^q\varphi\mathrm{d}\xi-\int_{\mathbb{H}^n} f(\xi)\varphi\mathrm{d}\nu. \qquad (10)
\end{aligned}
$$

由 Hölder 不等式和 (8) 式有

$$
\begin{aligned}
&\limsup_{m\to\infty}\Big|\int_{\mathbb{H}^n}|\nabla_H u_m|^{p-2}\langle\nabla_H u_m,u_m\nabla_H\varphi\rangle\mathrm{d}\xi\Big|\\
\le&\limsup_{m\to\infty}\Big(\int_{\mathbb{H}^n}|\nabla_H u_m|^p\Big)^{\frac{p-1}{p}}\Big(\int_{\mathbb{H}^n}|u_m\nabla_H\varphi|^p\Big)^{\frac{1}{p}}\\
\le&\, c_2\Big(\int_{\mathbb{H}^n}|u\nabla_H\varphi|^p\Big)^{\frac{1}{p}}\le c_3\Big(\int_{B_H(\xi_j,2\delta)}|u|^{p^*}\mathrm{d}\xi\Big)^{\frac{1}{p^*}}\to 0,\quad \delta\to 0. \qquad (11)
\end{aligned}
$$

结合 (10), (11) 式和 φ 的定义有

$$
\begin{aligned}
0=&\lim_{\delta\to 0}\Big(\lambda\int_{B_H(\xi_j,2\delta)} g(\xi)|u|^q\varphi\mathrm{d}\xi+\int_{B_H(\xi_j,2\delta)} f(\xi)\varphi\mathrm{d}\nu-\int_{B_H(\xi_j,2\delta)}\varphi\mathrm{d}\mu\Big)\\
=&\, f(\xi_j)a_j-\mu(\xi_j).
\end{aligned}
$$

因此

$$f(\xi_j)a_j=\mu(\xi_j)\ge b_j.$$

上式说明 ν 的 “集中” 不会在 $f(\xi_j)\le 0$ 的点处发生. 即若 $f(\xi_j)\le 0$ 则 $a_j=b_j=0$. 若 $f(\xi_j)>0$, 根据引理 3.1 中的 (iii) 有

(i) $a_j=0$ 或者

(ii) $a_j\ge S^{\frac{Q}{p}}f(\xi_j)^{-\frac{Q}{p}}\ge S^{\frac{Q}{p}}\|f_+\|_\infty^{-\frac{Q}{p}}$.

接着，我们讨论在无穷远处可能存在的 “集中”.

令 $\phi_R(\xi)=\phi(\frac{d(\xi)}{R})$ 为引理 3.2 中的检验函数. 类似于 (9) 式有

$$\int_{\mathbb{H}^n}|\nabla_H(u_m\phi_R)|^p\mathrm{d}\xi\le 2^{p-1}\Big[c_4\Big(\int_{\mathbb{H}^n}|u_m|^{p^*}\mathrm{d}\xi\Big)^{\frac{p}{p^*}}+\int_{\mathbb{H}^n}|\nabla_H u_m|^p\mathrm{d}\xi\Big],$$

其中 c_4 是与 R, Q 无关的一个正常数. 因此，在 X 上 $\{\phi_R u_m\}$ 有界. 从 (7) 式可知

$$
\begin{aligned}
0=&\lim_{m\to\infty}\langle I'_\lambda(u_m),\phi_R u_m\rangle\\
=&\lim_{m\to\infty}\Big(\int_{\mathbb{H}^n}|\nabla_H u_m|^{p-2}\langle\nabla_H u_m,u_m\nabla_H\phi_R\rangle\mathrm{d}\xi+\int_{\mathbb{H}^n}|\nabla_H u_m|^p\phi_R\mathrm{d}\xi\\
&-\lambda\int_{\mathbb{H}^n} g(\xi)|u_m|^q\phi_R\mathrm{d}\xi-\int_{\mathbb{H}^n} f(\xi)|u_m|^{p^*}\phi_R\mathrm{d}\xi\Big). \qquad (12)
\end{aligned}
$$

类似于 (11) 式有

$$\limsup_{m\to\infty}\Big|\int_{\mathbb{H}^n}|\nabla_H u_m|^{p-2}\langle\nabla_H u_m,u_m\nabla_H\phi_R\rangle\mathrm{d}\xi\Big|\le c_5\Big(\int_{R<d<2R}|u_m|^{p^*}\mathrm{d}\xi\Big)^{\frac{1}{p^*}}. \qquad (13)$$

当 $R\to\infty$ 时， (13) 式的右端趋于 0. 注意到

$$\lim_{R\to\infty}\limsup_{m\to\infty}\int_{\mathbb{H}^n} f(\xi)|u_m|^{p^*}\phi_R\mathrm{d}\xi\le\|f_+\|_\infty\nu_\infty.$$

结合 G 的弱连续可得

$$\limsup_{m\to\infty}\Big|\int_{\mathbb{H}^n} g(\xi)|u_m|^q\phi_R\mathrm{d}\xi\Big| \le \int_{d>R} g(\xi)|u|^q\mathrm{d}\xi \to 0, \quad R\to\infty.$$

因此，从 (12) 式可得

$$0 \le \|f_+\|_\infty\nu_\infty - \lim_{R\to\infty}\limsup_{m\to\infty}\int_{\mathbb{H}^n}|\nabla_H u_m|^p\phi_R\mathrm{d}\xi = \|f_+\|_\infty\nu_\infty - \mu_\infty. \tag{14}$$

根据引理 3.2 中的 (iii) 有

(iii) $\nu_\infty = 0$ 或者

(iv) $\nu_\infty \ge S^{\frac{Q}{p}}\|f_+\|_\infty^{-\frac{Q}{p}}$.

下面，验证 (ii) 和 (iv) 不会发生．由 J 的弱下半连续， G 的弱连续， Sobolev 不等式和 (7) 式可得

$$\begin{aligned}
0 > c &= \lim_{m\to\infty}\Big(I_\lambda(u_m) - \frac{1}{p^*}\langle I_\lambda'(u_m), u_m\rangle\Big)\\
&= \lim_{m\to\infty}\Big[\frac{1}{Q}\int_{\mathbb{H}^n}|\nabla_H u_m|^p\mathrm{d}\xi - \lambda\Big(\frac{1}{q}-\frac{1}{p^*}\Big)\int_{\mathbb{H}^n} g|u_m|^q\mathrm{d}\xi\Big]\\
&\ge \frac{1}{Q}\int_{\mathbb{H}^n}|\nabla_H u|^p\mathrm{d}\xi - \lambda\Big(\frac{1}{q}-\frac{1}{p^*}\Big)\|g\|_{L^r}\|u\|_{L^{p^*}}^q\\
&\ge \frac{S}{Q}\|u\|_{L^{p^*}}^p - \lambda C\|u\|_{L^{p^*}}^q,
\end{aligned} \tag{15}$$

其中 $C = C(p,q,\|g\|_{L^r}) = \big(\frac{1}{q}-\frac{1}{p^*}\big)\|g\|_{L^r} > 0$. 于是

$$\frac{S}{Q}\|u\|_{L^{p^*}}^p \le \lambda C\|u\|_{L^{p^*}}^q,$$

即

$$\|u\|_{L^{p^*}}^q \le c_6\lambda^{\frac{q}{p-q}}. \tag{16}$$

若 (iv) 发生，结合引理 3.2 的 (iii), (15) 和 (16) 式有

$$\begin{aligned}
0 > c &= \lim_{m\to\infty}\Big(I_\lambda(u_m) - \frac{1}{p^*}\langle I_\lambda'(u_m), u_m\rangle\Big)\\
&\ge \frac{1}{Q}\lim_{R\to\infty}\limsup_{m\to\infty}\int_{\mathbb{H}^n}|\nabla_H u_m|^p\phi_R\mathrm{d}\xi - \lambda C\|u\|_{L^{p^*}}^q\\
&\ge \frac{1}{Q}\mu_\infty - c_7\lambda^{\frac{p}{p-q}} \ge \frac{S}{Q}(\nu_\infty)^{\frac{p}{p^*}} - c_7\lambda^{\frac{p}{p-q}}\\
&\ge \frac{1}{Q}S^{\frac{Q}{p}}\|f_+\|_\infty^{1-\frac{Q}{p}} - c_7\lambda^{\frac{p}{p-q}}.
\end{aligned}$$

然而，选取 λ_* 充分小使得 $0<\lambda<\lambda_*$, 上式的最后一个不等式的右端大于 0, 这与 $c<0$ 相矛盾．用 φ 替代 ϕ_R, 类似于上面的讨论可得 (ii) 也不会发生．因此，对 $j\in J$ 有 $a_j = \nu_\infty = 0$. 这说明

$$\lim_{m\to\infty}\int_{\mathbb{H}^n}|u_m|^{p^*}\mathrm{d}\xi = \lim_{R\to\infty}\limsup_{m\to\infty}\Big[\int_{\mathbb{H}^n}|u_m|^{p^*}(1-\phi_R)\mathrm{d}\xi + \int_{\mathbb{H}^n}|u_m|^{p^*}\phi_R\mathrm{d}\xi\Big] = \int_{\mathbb{H}^n}|u|^{p^*}\mathrm{d}\xi.$$

结合 $L^{p^*}(\mathbb{H}^n)$ 的一致凸性，可知在 $L^{p^*}(\mathbb{H}^n)$ 中 $u_m \to u$. 另一方面，利用已知不等式：设 $a, b \in \mathbb{R}^{2n}$, 有

$$|a-b|^p \le c \cdot [(|a|^{p-2}a - |b|^{p-2}b)(a-b)]^{\frac{k}{2}}(|a|^p + |b|^p)^{1-\frac{k}{2}}, \tag{17}$$

其中 $1 < p < 2$ 时， $k = p$; $p \ge 2$ 时， $k = 2$. 于是

$$\begin{aligned}|\nabla_H u_m - \nabla_H u|^p \le c \cdot [(|\nabla_H u_m|^{p-2}\nabla_H u_m - |\nabla_H u|^{p-2}\nabla_H u)\nabla_H(u_m - u)]^{\frac{k}{2}} \\ \cdot(|\nabla_H u_m|^p + |\nabla_H u|^p)^{1-\frac{k}{2}}.\end{aligned}$$

对上式在 $\mathbb{H}^n$ 上积分并利用 Hölder 不等式可得

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{H}^n} |\nabla_H u_m - \nabla_H u|^p \mathrm{d}\xi \\ &\le c \cdot \Big[\int_{\mathbb{H}^n} (|\nabla_H u_m|^{p-2}\nabla_H u_m - |\nabla_H u|^{p-2}\nabla_H u)\nabla_H(u_m - u)\mathrm{d}\xi\Big]^{\frac{k}{2}} \\ &\quad \times\Big(\int_{\mathbb{H}^n} |\nabla_H u_m|^p + |\nabla_H u|^p \mathrm{d}\xi\Big)^{1-\frac{k}{2}} \\ &\le c \cdot \Big[\langle I'_\lambda(u_m) - I'_\lambda(u), u_m - u\rangle + \lambda \int_{\mathbb{H}^n} g(\xi)(|u_m|^{q-2}u_m - |u|^{q-2}u)(u_m - u)\mathrm{d}\xi \\ &\quad + \int_{\mathbb{H}^n} f(\xi)(|u_m|^{p^*-2}u_m - |u|^{p^*-2}u)(u_m - u)\mathrm{d}\xi\Big]^{\frac{k}{2}}\Big(\int_{\mathbb{H}^n} |\nabla_H u_m|^p + |\nabla_H u|^p \mathrm{d}\xi\Big)^{1-\frac{k}{2}}. \end{aligned} \tag{18}$$

注意到，利用 Hölder 不等式有

$$\Big|\int_{\mathbb{H}^n} g(\xi)(|u_m|^{q-2}u_m - |u|^{q-2}u)(u_m - u)\mathrm{d}\xi\Big| \le \|g\|_{L^r}(\|u_m\|^{q-1}_{L^{p^*}} + \|u\|^{q-1}_{L^{p^*}})\|u_m - u\|_{L^{p^*}},$$

$$\Big|\int_{\mathbb{H}^n} f(\xi)(|u_m|^{p^*-2}u_m - |u|^{p^*-2}u)(u_m - u)\mathrm{d}\xi\Big| \le \|f\|_\infty(\|u_m\|^{p^*-1}_{L^{p^*}} + \|u\|^{p^*-1}_{L^{p^*}})\|u_m - u\|_{L^{p^*}}.$$

结合在 X 中 $u_m \rightharpoonup u$, 在 $L^{p^*}(\mathbb{H}^n)$ 中 $u_m \to u$, 可得在 X 中 $u_m \to u$. 引理得证. ∎

5 多解的存在性

这一节，我们利用 Clark 临界点定理 (见文献 [16]) 证明问题 (1) 的多解的存在性. 先介绍 "亏格", 更多的一些性质见文献 [17]. 记 $\sum$ 是 $X - \{0\}$ 在原点处的一个闭的、对称的子集. 若 $A \in \sum$, 定义 "亏格" $\gamma(A) = \min\{k \in \mathbb{N} \,|\, \exists \phi \in C(A, \mathbb{R}^k - \{0\}), \phi(-x) = -\phi(x)\}$ 和 $\Gamma_k = \{A \in \Sigma;\ \gamma(A) \ge k\}$.

命题 5.1 若 $I_\lambda(u) \in C^1(X, \mathbb{R})$ 是偶的， $I_\lambda(0) = 0$, 且满足 Palais-Smale 条件，以及

(1) 存在一个 m 维子空间 X_m 和一个常数 $r > 0, S_r(0) = \{u \in X \,|\, \|u\|_X = r\}$ 使得 $\sup\limits_{u \in S_r(0)\cap X_m} I_\lambda(u) < 0$;

(2) 存在一个 n 维子空间 $X_n\,(n < m)$ 使得 $\inf\limits_{u \in X_n^\perp} I_\lambda(u) > -\infty$.

那么， $I_\lambda(u)$ 至少有 $m - n$ 对具有负临界值 c_k 的临界点，其中

$$c_k = \inf_{A \in \Gamma_k} \sup_{u \in A} I_\lambda(u).$$

定理 5.2 假定 $1 < q < p$ 和在 $\mathbb{H}^n$ 的某个开子集中 $g(\xi) > 0$. 若存在一个 $\lambda^* > 0$ 使得 $\lambda \in (0, \lambda^*)$. 那么问题 (1) 存在 $m - j$ 对非平凡弱解，且 $I_\lambda(u) < 0$.

证 我们先构造 X 的 m 维子空间. 记 $\Omega_+ \subset \mathbb{H}^n$ 是开子集且 $\xi \in \Omega_+$ 有 $g(\xi) > 0$. 设 $\xi_0 \in \Omega_0 \subset \Omega_+$ 和 $r_0 > 0$ 使得 $B_H(\xi_0, r_0) \subset \Omega_+$ 且 $|\overline{B_H(\xi_0, r_0)} \cap \Omega_0| < \frac{|\Omega_0|}{2}$. 首先, 设 $v_1 \in C_0^\infty(\mathbb{H}^n)$ 且 $\mathrm{supp}(v_1) = \overline{B_H(\xi_0, r_0)}$. 记 $\Omega_1 = \Omega_0 \backslash [\overline{B_H(\xi_0, r_0)} \cap \Omega_0] \subset \tilde{\Omega}_0 = \Omega_+ \backslash \overline{B_H(\xi_0, r_0)}$, 这样, $|\Omega_1| > \frac{|\Omega_0|}{2}$. 令 $\xi_1 \in \Omega_1$ 和 $r_1 > 0$ 使得 $B_H(\xi_1, r_1) \subset \tilde{\Omega}_0$ 且 $|\overline{B_H(\xi_1, r_1)} \cap \Omega_1| < \frac{|\Omega_1|}{2}$. 现在, 设 $v_2 \in C_0^\infty(\mathbb{H}^n)$ 且 $\mathrm{supp}(v_2) = \overline{B_H(\xi_1, r_1)}$. 这样有限步后可得 $v_1, v_2, v_3, \cdots, v_m$ 使得对 $i, j = 1, 2, \cdots, m$ 有 $\mathrm{supp}(v_i) \cap \mathrm{supp}(v_j) = \emptyset$, $i \neq j$ 且 $|\mathrm{supp}(v_i) \cap \Omega_0| > 0$. 取 $X_m = \mathrm{span}\{v_1, v_2, v_3, \cdots, v_m\}$, 则 $\dim X_m = m$ 且存在一个常数 ℓ_m 使得对任意 $v \in X_m$, $\|v\|_X = 1$ 有

$$\int_{\Omega_+} g(\xi)|v|^q \mathrm{d}\xi \geq \ell_m.$$

若 $u \in X_m$, 且 $u \neq 0$. 记 $u = r_m v$ 且 $\|v\|_X = 1$ 和 $r_m = \|u\|_X$. 这样，存在一个 $r_0 > 0$ 使得 $0 < r_m < r_0$, 有

$$\begin{aligned} I_\lambda(u) &= \frac{1}{p}\int_{\Omega_+} |\nabla_H u|^p \mathrm{d}\xi - \frac{\lambda}{q}\int_{\Omega_+} g(\xi)|u|^q \mathrm{d}\xi - \frac{1}{p^*}\int_{\Omega_+} f(\xi)|u|^{p^*} \mathrm{d}\xi \\ &\leq \frac{1}{p}\|u\|_X^p - \frac{\lambda}{q}\int_{\Omega_+} g(\xi)|u|^q \mathrm{d}\xi + c_8\|u\|_X^{p^*} \\ &\leq \frac{1}{p} r_m^p - \frac{\lambda \ell_m}{q} r_m + c_8 r_m^{p^*} = \varepsilon_m. \end{aligned}$$

因此，选取充分小的 $r_m \in (0, r_0)$ 使得 $I_\lambda(u) \leq \varepsilon_m < 0$. 我们得到了命题 5.1 的 (1).

设 $X_j = \mathrm{span}\{v_1, v_2, v_3, \cdots, v_j\} (j < m)$. 那么对 $u \in X_j^\perp$, 不妨设 $\int_{\mathbb{H}^n} g(\xi)|u|^q \mathrm{d}\xi \leq 0$. 这样，当 $1 < q < p$, $\lambda > 0$ 时，有

$$\begin{aligned} I_\lambda(u) &= \frac{1}{p}\int_{\mathbb{H}^n} |\nabla_H u_m|^p \mathrm{d}\xi - \frac{\lambda}{q}\int_{\mathbb{H}^n} g(\xi)|u_m|^q \mathrm{d}\xi - \frac{1}{p^*}\int_{\mathbb{H}^n} f(\xi)|u_m|^{p^*} \mathrm{d}\xi \\ &\geq \frac{1}{p}\|u\|_X^p - c_8\|u\|_X^{p^*}. \end{aligned}$$

这说明 I_λ 满足命题 5.1 的 (2). 由注 4.3 知 $I_\lambda(u) \in C^1(X, \mathbb{R})$. 显然 $I_\lambda(0) = 0$ 且 $I_\lambda(u)$ 是偶的. 根据引理 3.2 可知存在一个 $\lambda^* > 0$ 使得 $\lambda \in (0, \lambda^*)$, $I_\lambda(u)$ 满足 $(\mathrm{PS})_c$. 因此结合命题 5.1 可得问题 (1) 存在 $m - j$ 对非平凡弱解，且 $I_\lambda(u) < 0$, 其中 $m > j$, 且 m, j 为整数. 我们指出 $m - j$ 既可以是一个大数也可以是一个小数. ▮

参 考 文 献

[1] Lions P L. The concentration-compactness principle in the calculus of variations; the limit case, Part 1,2. Revista Mat Ibaroamericana, 1985, **1**(2/3): 145–201, 45–121

[2] Lions P L. The concentration-compactness principle in the calculus of variations, locaily compact case, Part 1,2. Ann Inst H Poincaré, 1984, **1**(1/4): 109–145, 223–283

[3] Bianchi G, Chabrowski J, Szulkin A. On symmetric solutions of an elliptic equation with a nonlinearity involving critical Sobolev exponent. Nonlinear Analysis, 1995, **25**: 41–59

[4] Ben-Naoum A K, Troestler C, Willem M. Extrema problems with critical Sobolev exponents on unbounded domains. Nonlinear Analysis, 1996, **26**: 823–833

[5] Chabrowski J. Concentration-compactness principle at infinity and semilinear elliptic equations involving critical and subcritical Sobolev exponents. Calc Var Partial Differential Equations, 1995, **3**: 493–512

[6] Huang D, Li Y. A concentration-compactness principle at infinity and positive solutions of some quasilinear elliptic equations in unbounded domains. J Math Anal Appl, 2005, **304**: 58–73

[7] Folland G B, Stein E M. Estimaties for the $\bar{\partial}_b$-complex and analysis on the Heisenberg group. Comm Pure Appl Math, 1974, **27**: 429–522

[8] Niu P, Zhang H, Wang Y. Hardy type and Rellich type inequalities on the Heisenberg group. Proc Amer Math Soc, 2001, **129**(12): 3623–3630

[9] Garofalo N, Lanconelli E. Existence and nonexistence results for semilinear equations on the Heisenberg group. Indiana Uni Math J, 1992, **41**(1): 71–98

[10] Wang W. Positive solution of a subelliptic nonlinear equation on the heisenberg group. Canadian Math Bulletin, 2001, **43**(3): 346–354

[11] Garofalo N, Vassilev D. Regularity near the characteristic set in the non-linear Dirichlet problem and conformal geometry of sub-Laplacians on Carnot groups. Math Ann, 2000, **318**: 453–516

[12] Huang Y S. On multiple solutions of quasilinear equations involving the critical sobolev exponent. J Math Anal Appl, 1999, **231**: 142–160

[13] Yang J. Positive solutions of quasilinear elliptic obstacle problems with critical exponents. Nonlinear Analysis, 1995, **25**: 1283–1306

[14] Drábek P, Huang Y X. Multiplicity of positive solutions for some quasilinear elliptic equation in $\mathbb{R}^N$ with critical Sobolev exponent. J Diff Eqs, 1997, **140**: 106–132

[15] Garofalo N, Nhieu D M. Isoperimetric and Sobolev inequalities for Carnot-Carthéodory spaces and the existence of minimal surfaces. Comm Pure Appl Math, 1996, **49**: 1081–1144

[16] Clark D C. A variant of Ljusternik-Schnirelman theory. Indiana Univ Math J, 1972, **22**: 65–74

[17] Struwe M. Variational Methods and Their Applications to Nonlinear Partial Differential Equations and Hamiltonian Systems. Second Edition. Berlin: Springer-Verlag, 2000

A Concentration-Compactness Principle at Infinity on the Heisenberg Group and Multiplicity of Solutions for *p*-sub-Laplacian Problem Involving Critical Sobolev Exponents

[1]Dou Jingbo [2]Guo Qianqiao

([1]*School of Statistics, Xi'an Institute of Finance and Economics, Xi'an 710061;*
[2]*Department of Applied Mathematics, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072*)

Abstract: The main results of this paper establish the concentration-compactness principle at infinity on the Heisenberg group. The authors consider the p-sub-Laplacian problem involving critical Sobolev exponents

$$\begin{cases} -\Delta_{H,p}u = \lambda g(\xi)|u|^{q-2}u + f(\xi)|u|^{p^*-2}u, & \text{in } \mathbb{H}^n, \\ u \in D^{1,p}(\mathbb{H}^n), \end{cases}$$

where $\xi \in \mathbb{H}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $1 < p < Q = 2n+2$, $n \geq 1$, $1 < q < p$, $p^* = \frac{Qp}{Q-p}$, $g(\xi)$ and $f(\xi)$ change sign and satisfy some suitable conditions. Under certain assumptions, they show the existence of $m-j$ pairs of nontrivial solutions via variational method, where $m > j$, both m and j are integers. The concentration-compactness principle allows to prove the Palais-Smale condition is satisfied below a certain level.

Key words: Heisenberg group; p-sub-Laplacian; Concentration-compactness principle; Palais-Smale condition; Multiplicity.

MR(2000) Subject Classification: 35D05; 35D10; 35J70