

Star 图互连网络的容错性分析*

聂晓冬

(中国科学技术大学数学系 合肥 230026)

刘红美

(三峡大学理学院 宜昌 443002)

徐俊明

(中国科学技术大学数学系 合肥 230026)

摘要:限制连通度和限制容错直径是衡量互连网络可靠性的两个重要参数. 当考察这两个参数时, 总假设网络中和一台计算机相连接的所有计算机不会同时出现故障. 该文证明了 Star 图互连网络的极小分离集和极小限制分离集的唯一性, 然后得到了 Star 图的限制连通度是 $2n-4$, 当 $n=3, 5$ 和 $n \geq 7$ 时, 它的限制容错直径是 $\lfloor 3(n-1)/2 \rfloor + 2$, 对于 $n=4, 6$, 限制容错直径是 $\lfloor 3(n-1)/2 \rfloor + 3$, 即限制容错直径只比它的容错直径大 1.

关键词:Star 图; 连通度; 容错性; 限制连通度; 限制容错直径; 分离集.

MR(2000)主题分类:05C05; 05C50 **中图分类号:**O157.5 **文献标识码:**A

文章编号:1003-3998(2004)02-168-09

1 引言

我们知道, 互连网络拓扑结构的设计是一件非常紧要的事情. 很多年来, 许许多多的拓扑结构被提出和研究. 其中, star 图互连网络, 被认为是立方体网络的最好的替代, 已经被深入的研究和广泛的探讨. star 图有一个 Hierarchical 结构, 是点和边对称的, 具有较小的顶点度, 小的直径, 高连通性, 简单的路由算法, 等等优良性质(参见[1, 2]). 当我们讨论互连网络的容错性时, 我们总是首先考察它的连通度和容错直径(参见[3]). 对于 n -star 图 S_n , 它的容错性是 $n-2$, 即它的连通度减 1. 它的容错直径, 即在 n -star 图 S_n 中任意去掉 $n-2$ 个点所得图的直径的最大者, 当 $n=3, 5$ 和 $n \geq 7$ 时, 是它的正常直径加 1, 当 $n=4, 6$ 时, 是它的正常直径加 2(参见[4]). 在 n -star 图互连网络中, 当故障点增加到 $n-1$ 个时, 我们也许就不能再谈剩余网络的直径了, 因为剩余网络可能不再是连通的了. 然而, 由本文的定理 1, 由于 $n-1$ 个故障点的出现而导致剩余网络不连通的概率几乎为 0. 因此, 单一的连通性和容错直径的概念不能很好地反映 n -star 图互连网络的强可恢复性. 因此我们要考察两个近年才提出的容错性概念. 一个是限制连通度, 它首先由 Esfahanian 和 Hakimi 在文献[5]中提出. 这个概念的提出是基于这样一个假设: 任何一个顶点的邻点集不可能同时

出现故障. 由限制连通度就会很自然地引出限制容错直径的概念. 通过这两个参数, 结合其他我们熟悉的参数, 也许能为我们提供 n -star 图互连网络的容错性能的更准确的估计.

Esfahanian 证明了超立方体 Q_n 的限制连通度是 $2n-2$, 它的限制容错直径不超过 $n+6$ (参见[6]). 进一步, S. Latifi 得到了它的确切值是 $n+2$ (参见[7]). Li & Zhang 考察了立方连通圈, 无向 De Bruijn 图和 Kautz 网等网络的这两个参数, 得到了它们的限制连通度, 并给出了限制容错直径的上界 (参见[8]).

本文我们首先证明了 n -star 图的极小分离集和极小限制分离集的唯一性, 再利用群论中的一些方法, 得到了 n -star 图的限制连通度和限制容错直径. 本文安排如下: 在第二部分介绍了限制连通度和限制容错直径的定义. 在第三部分中着重描述了 star 图的一种新的路由方法和它的循环分解结构. 最后一部分给出了本文的主要结果和证明.

2 定义和术语

本文中的图均指无重边, 无环的简单图. 对于给定的图 G , 集 $S \subseteq V(G)$ 称为是 G 的分离集, 如果 $G-S$ 是不连通的. 集 $R \subseteq V(G)$ 称为是 G 的限制集, 如果 R 不包含 $N_G(x)$, 对于任意的 $x \in V(G)$, 这里 $N_G(x)$ 是点 x 在图 G 中的邻点集. 集 $S \subseteq V(G)$ 称为是 G 的限制分离集, 如果集 S 即是分离的又是限制的.

图 G 的连通度 $\kappa(G)$ 的定义如下

$$\kappa(G) = \begin{cases} |V(G)| - 1, & \text{如果 } G \text{ 是完全图,} \\ \min\{|S| : S \text{ 是 } G \text{ 的分离集}\}, & \text{如果 } G \text{ 不是完全图.} \end{cases}$$

相似地, 有如下的定义

定义 1 图 G 的限制连通度, 记作 $\kappa'(G)$, 定义如下

$$\kappa'(G) = \begin{cases} |V(G)| - 1, & \text{如果 } G \text{ 没有限制分离集,} \\ \min\{|S| : S \text{ 是图 } G \text{ 的限制分离集}\}, & \text{否则.} \end{cases}$$

显然, $\kappa(G) \leq \kappa'(G) \leq |V(G)| - 1$.

图 G 的容错直径是

$$d^f(G) = \max\{d(G-F) : F \subseteq V(G), |F| = \kappa(G) - 1\},$$

对于任意的 $F \subseteq V(G)$, $|F| = \kappa'(G) - 1$, F 是限制的, 则 $G-F$ 是连通的. 与图 G 的容错直径相似, 有图 G 的限制容错直径如下

定义 2 图 G 的限制容错直径, 记作 $d^f(G)$, 如下定义

$$d^f(G) = \max\{d(G-F) : F \text{ 是图 } G \text{ 的限制集且 } |F| = \kappa'(G) - 1\}.$$

按照上面的定义, Esfahanian 得到了: 当 $n \geq 3$ 时, $\kappa'(Q_n) = 2n-2$ 和 $d^f(Q_n) \leq n+6$ (参见[6]). S. Latifi 有这个结果: 当 $n \geq 3$ 时, $d^f(Q_n) = n+2$ (参见[7]).

本文没有给出定义的符号其意义与参考文献[9]一致.

Star 图互连网络是一个 Cayley 图. 记 $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$.

定义 3 一个 n -star 图, 记做 S_n , 是一个由 $n!$ 个顶点构成的一个无向图. 顶点集是由 n 个数字 $1, 2, 3, \dots, n$ 上的所有置换所构成, 即 $V(S_n) = \{x_1 x_2 \dots x_n : x_i \neq x_j, 1 \leq i \neq j \leq n, x_i, x_j \in [n]\}$ (以后我们将置换写成一个数字的序列). 顶点 $X = x_1 x_2 \dots x_n$ 和 $Y = y_1 y_2 \dots y_n$ 之间有边相连当且仅当 $\exists i \in \{2, 3, \dots, n\}$, 使得 $y_1 = x_i, y_i = x_1; y_j = x_j$, 对于 $j \neq i, 2 \leq j \leq n$. 即 X 和 Y 这两个置换序列中只有第 1 列和第 i 列位置上的数字不同 (相互交换), 其余位置上的数字相同. 因而 $X = x_1 x_2 \dots x_n$ 的所有邻点为 $N_{S_n}(X) = \{x_i x_2 \dots x_{i-1} x_1 x_{i+1} \dots x_n : 2$

$\leqq i \leqq n\}$.

我们同时用 S_n 记 n 元对称群和 n -star 图. 作为对称群 S_n 上的 Cayley 图, n -star 图 S_n 以对换 t_1, t_2, \dots, t_{n-1} 作为生成元, 其中 t_{i-1} 是将置换序列的第 1 列上的元素和第 i 列上的元素进行互换, $2 \leqq i \leqq n$, 其余的元素不变.

n -star 图 S_n 是 $(n-1)$ -正则, 点和边可迁的. 它有 $(n-1)n! / 2$ 条边. S_n 是二部图, 因为 n -star 图 S_n 的每一边正好将一个偶置换和一个奇置换连接起来. $d(S_n) = \lfloor 3(n-1)/2 \rfloor (n \geqq 3)$ (参见 [1, 2]). 当 $n \geqq 7$ 和 $n=3, 5$ 时 $d^f(S_n) = d(S_n) + 1$, 当 $n=4, 6$ 时 $d^f(S_n) = d(S_n) + 2$ (参见 [4]). star 图是强可恢复的 (一个图 G 是强可恢复的, 如果 $d^f(G) \leqq d(G) + c$, 这里 c 是一个常数). 1-star 图 S_1 为 K_1 , 2-star 图 S_2 为 K_2 , 3-star 图 S_3 是长为 6 的圈 C_6 . 图 1 是 4-star 图 S_4 .

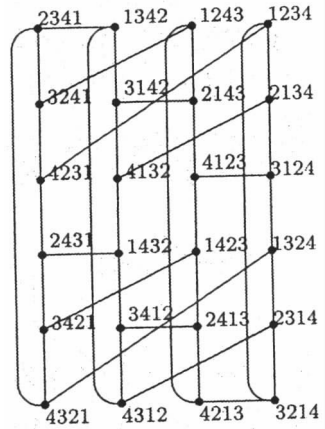


图 1

3 循环分解结构和新的路由方法

由于本文的主要结果的证明非常依赖于 n -star 图的循环分解结构和我们从置换群角度给出的路由方法, 所以我们在这上面用的篇幅较多.

一个 Cayley 图 $\text{Cay}(G, S)$ 是 Hierarchical 的, 如果 S 的元素能够形成一个有序序列 g_1, g_2, \dots, g_d , 使得对任意的 $i, 2 \leqq i \leqq d, g_i$ 不在由 g_1, g_2, \dots, g_{i-1} 所生成的子群中. n -star 图 S_n 是 Hierarchical 的 (参见 [2]). 因此 n -star 图 S_n 有一个循环分解结构. 如果我们将 S_n 中的所有的在第 n 列上的元素都是 i 的置换取出来, $1 \leqq i \leqq n$, 然后这 $(n-1)!$ 个置换将构成一个 $(n-1)$ -star 图. 作为 Cayley 图, 它的生成元为 t_1, t_2, \dots, t_{n-2} . 我们记这个 $(n-1)$ -star 图为 $S_{n,i}, 1 \leqq i \leqq n$. 因此我们能将 S_n 划分成 n 个子图 $S_{n,1}, S_{n,2}, \dots, S_{n,n}$, 每一个都同构于 S_{n-1} . 这些子图之间通过对应于生成元 t_{n-1} 的边相互连接起来. 我们称这些对应于生成元 t_{n-1} 的边为穿越边. 每一个顶点关联于 1 条穿越边和 $n-2$ 条非穿越边.

显然所有的穿越边形成图 S_n 的一个完美匹配, 记这个完美匹配为 M_c .

实际上, 对应于任意一个生成元 t_i 的所有边都会形成一个完美匹配, $1 \leqq i \leqq n-1$, 从而 S_n 是可 1-因子化的.

在两个图 $S_{n,i}$ 和 $S_{n,j} (i \neqq j)$ 之间有 $(n-2)!$ 条穿越边, 这是因为在 $S_{n,i}$ 中只有以 j 开始的点 $(j, x_2, \dots, x_{n-1}, i)$ 才可能和 $S_{n,j}$ 中有着形式 $(i, x_2, \dots, x_{n-1}, j)$ 的点相连.

我们知道, 对称群中的任一个置换都有一个循环表示, 或者换句话说, 能够写成若干个没有相同数字的循环置换的积. 在循环置换中, 每一个数字想要去的位置 (即在恒等置换 $I = 123 \dots n$ 中的位置) 都被仅随其后的数字占据着. 例如, S_6 中的置换 231546 能够被分解成 $(123)(45)(6)$. 注意到已经处于正确位置的元素 (比如 6) 作为 1-循环出现. 用 c 来记一个置换分解中的长度至少是 2 的循环的个数, 用 m 记置换中不在它原来位置的数字的个数.

由 star 图的点对称性, 任意两个顶点的路由选择能够归结为任意一个顶点 P 和恒等置换 I 之间的路由选择. 路由选择的法则如下 (参见 [7])

- (1) 如果 1 在置换的第一个位置,然后将 1 与任何一个不在其正确位置的数字互换,
 (2) 如果 $i(i \neq 1)$ 在置换的第一个位置,然后将它移到它的正确位置,或者
 (2') 如果 $i(i \neq 1)$ 在置换的第一个位置,然后在一个与 i 所在的循环相异的,长度至少是 2 的循环中任取一个数字,与 i 互换.

利用(1)和(2), Akers 等人证明了(参见[1]):设 P 是 S_n 中的任意一个顶点,它的循环分解中长度至少是 2 的循环的个数是 c ,它的不在原来位置的数字的个数是 m ,则点 P 和点 I 之间的距离为

$$d(I, P) = \begin{cases} c + m, & \text{如果 1 在 } P \text{ 的第一个位置,} \\ c + m - 2, & \text{否则.} \end{cases}$$

利用(1), (2), 和(2'), K. Day & A. Tripathi 讨论了 Star 图中任意两点之间的不相交的最短路(参见[10]).

在对称群 S_n 中,每一个 k -循环 $(x_1 x_2 \cdots x_k)$ ($k \geq 2$) 都能够写成一些 2-循环的积.

如果 1 不在循环 $(x_1 x_2 \cdots x_k)$ 中,则 $(x_1 x_2 \cdots x_k) = (1 x_1)(1 x_2) \cdots (1 x_k)(1 x_1)$ (本文中的积运算都是从左到右进行的). 由于 $(x_1 x_2 \cdots x_k) = (x_2 \cdots x_k x_1) = \cdots = (x_k x_1 \cdots x_{k-1})$, 因此 $(x_1 x_2 \cdots x_k) = (1 x_1)(1 x_2) \cdots (1 x_k)(1 x_1) = (1 x_2)(1 x_3) \cdots (1 x_k)(1 x_1)(1 x_2) = \cdots = (1 x_k)(1 x_1) \cdots (1 x_{k-1})(1 x_k)$. 实际上,我们能够以任意的 $(1 x_i)$ ($1 \leq i \leq k$) 作为开始,仅需要保持它们之间的相对的顺序. 我们称这类积为 type-I 的素积.

如果 1 在 $(x_1 x_2 \cdots x_k)$ 之中,不失一般性,让 $x_1 = 1$, 则 $(1 x_2 \cdots x_k) = (1 x_2)(1 x_3) \cdots (1 x_k)$. 相应地我们称这类积为 type-II 的素积.

一般地,对于任意的一个置换 P , 我们有它的循环分解 $P = (x_1 x_2 \cdots x_{l_1}) (y_1 y_2 \cdots y_{l_2}) \cdots (z_1 z_2 \cdots z_{l_c})$, 这里 c 是 P 中长度至少为 2 的循环的个数, $m = l_1 + l_2 + \cdots + l_c$ 是 P 中不在原来位置上的元素的个数.

如果 1 在 P 的第一个位置上,则 $P = (1 x_1)(1 x_2) \cdots (1 x_{l_1})(1 x_1) (1 y_1)(1 y_2) \cdots (1 y_{l_2})(1 y_1) \cdots (1 z_1)(1 z_2) \cdots (1 z_{l_c})(1 z_1)$.

如果 1 在某个循环中,不失一般性,我们设 $z_1 = 1$, 则 $P = (1 x_1)(1 x_2) \cdots (1 x_{l_1})(1 x_1) (1 y_1)(1 y_2) \cdots (1 y_{l_2})(1 y_1) \cdots (1 z_2) \cdots (1 z_{l_c})$.

上面在对称群 S_n 中的讨论恰好对应于图 S_n 中的最短路选择. 对于图 S_n 中的任一个点(置换),在我们给出了它的任意一个 2-循环的积之后,我们能够将 2-循环 $(1 i)$ 看作是 Cayley 图 S_n 中的对换(生成元) t_{i-1} . 例如,考虑 $P = (123)(45)(6)$. $P = (1 2)(1 3)(1 4)(1 5)(1 4)$ 或 $(1 2)(1 3)(1 5)(1 4)(1 5)$.

一条最短路是 $P = 231546 \xrightarrow{t_1} 321546 \xrightarrow{t_2} 123546 \xrightarrow{t_3} 523146 \xrightarrow{t_4} 423156 \xrightarrow{t_3} 123456 = I$ 或者 $P = 231546 \xrightarrow{t_1} 321546 \xrightarrow{t_2} 123546 \xrightarrow{t_4} 423516 \xrightarrow{t_3} 523416 \xrightarrow{t_4} 123456 = I$, 即 $P = t_3 t_4 t_3 t_2 t_1$ 或者 $P = t_4 t_3 t_4 t_2 t_1$. 我们也能够写成 $I = P t_1 t_2 t_3 t_4 t_3$ 或者 $I = P t_1 t_2 t_4 t_3 t_4$.

相应地我们称 star 图中的形如 $t_{i_1} t_{i_2} \cdots t_{i_k} t_{i_1}$ 的素积为 type-I 的,形如 $t_{i_1} t_{i_2} \cdots t_{i_k}$ 的素积为 type-II 的.

下面两个引理的证明只是直接的验证,我们省略之.

引理 1 对于任意两个素积 $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$, 如果其中至多一个是 type-II 的, 则 $\mathcal{P}_1 \mathcal{P}_2 = \mathcal{P}_2 \mathcal{P}_1$. 更进一步,在一个由许多素积构成的积中,如果这些素积中至多有一个是 type-II 的,则任何一个 type-I 的素积均能看作一个整体(entity),能够被插入到这个积中的任一位置.

例如, $P = t_4 t_3 t_4 t_2 t_1 = t_2 t_4 t_3 t_4 t_1 = t_2 t_1 t_4 t_3 t_4$.

下面的引理暗示了当我们在 star 图 S_n 中寻找最短路时我们有许多的选择.

引理 2 star 图 S_n 中任意一个顶点(置换) P 均能够分解成 k 个不交(没有共同的数字)的素积的积

$$P = \mathcal{P}_1 \mathcal{P}_2 \cdots \mathcal{P}_k,$$

其中这些素积中至多有一个是 type-II 的. 更进一步, 从序列 $\mathcal{P}_1 \mathcal{P}_2 \cdots \mathcal{P}_k$ 的左边读到右边, 我们得到一条从 I 到 P 的最短路; 从序列 $\mathcal{P}_1 \mathcal{P}_2 \cdots \mathcal{P}_k$ 的右边读到左边, 我们得到一条从 P 到 I 的最短路.

图 S_n 的直径一定是在点 I 和点 P 之间达到, 其中 P 的素积分解中对换的个数达到最大. 由于 type-I 的素积重复第一个对换, 因此 P 的素积分解中要有尽可能多的 type-I 的素积. 因而 $d(S_n) = d(P, I)$, 这里 $P = t_1 t_2 t_1 t_3 t_4 t_3 \cdots$. 进一步我们能够得到 $d(S_n) = \lfloor 3(n-1)/2 \rfloor$, 正如 [1, 2] 中的结果.

4 主要结果及证明

3-star 图 S_3 是一个长为 6 的圈, 它的限制连通度是 2, 它的限制容错直径是 4. 从现在起我们总假定 $n \geq 4$.

定理 1 设 S 为 n -star 图 $S_n (n \geq 4)$ 的任一极小分离集, 则 S 是由 n -star 图 S_n 的某个点的所有邻点所构成.

证 对于 $n=4$, 通过直接的验证, 我们知道这个结果是正确的. 下面我们假定 $n \geq 5$. 我们已经知道, S_n 能够被分解成 n 个子图 $S_{n,1}, S_{n,2}, \cdots, S_{n,i}, \cdots, S_{n,n}$, 其中每一个子图都同构于 $(n-1)$ -star 图 S_{n-1} . 假设 S 是 S_n 的一个极小分离集 (S 中的点我们也称为是失灵点). 令 $S = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$, 其中 $A_i \subseteq V(S_{n,i}), 1 \leq i \leq n$. 令 $a_i = |A_i|, 1 \leq i \leq n$, 则 $n-1 = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. 不失一般性, 让 $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n$.

情形 1 $a_1 \leq n-3$. 在这种情形下 $S_{n,i} - A_i$ 连通的, $1 \leq i \leq n$, 因为 $S_{n,i}$ 是 $(n-2)$ -连通的. 我们知道, 当 $i \neq j$ 时, 在 $S_{n,i}$ 和 $S_{n,j}$ 之间的穿越边的数目是 $(n-2)!$, 且这些穿越边构成了一个匹配. 当 $n \geq 5$ 时, $(n-2)! > 2(n-3)$. 由于每一个失灵点至多毁坏一条穿越边, 因此这里有一条穿越边将 $S_{n,i}$ 和 $S_{n,j}$ 连接起来, $1 \leq i \neq j \leq n$. 从而 $S_n - S$ 连通图, 即 S 不是一个分离集.

情形 2 $a_1 = n-2, a_2 = 1, a_3 = a_4 = \cdots = a_n = 0$. 令 C 是 $S_{n,1} - A_1$ 任意一个连通分支, 且 $V(C) \geq 2$. C 一定与 $S_n - V(S_{n,1})$ 连通, 因为 $S_n - V(S_{n,1})$ 是连通的且 $S_n - V(S_{n,1})$ 中只包含一个失灵点. 如果 S 是一个极小分离集, 则在 $S_{n,1} - A_1$ 中一定有一个孤立点, 且这个孤立点的穿越边必关联于 $S_{n,2}$ 中的失灵点, 即 A_2 中的惟一点. 从而 S 是这个点的邻点集.

情形 3 $a_1 = n-1, a_2 = a_3 = \cdots = a_n = 0$. 与情形 1 相似, $S_n - V(S_{n,1})$ 是连通图. 进一步图 $S_n - S$ 是连通的, 因为在 $S_{n,1} - A_1$ 中的每一个点通过它的穿越边与 $S_n - V(S_{n,1})$ 连通. 因而 S 不是一个分离集. |

引理 3 如果 P, Q 是 S_n 的两个不同的点, 则 $N(P) \neq N(Q)$.

证 假设 $P = x_1 x_2 \cdots x_n, Q = y_1 y_2 \cdots y_n$ 且 $N(P) = N(Q)$. 但是 $N(P) = \{P_i = x_i x_2 \cdots x_{i-1} x_{i+1} \cdots x_n, 2 \leq i \leq n\}$, $N(Q) = \{Q_i = y_i y_2 \cdots y_{i-1} y_1 y_{i+1} \cdots y_n, 2 \leq i \leq n\}$. 考察置换的 第 n 个位置上的数字, 我们有 $P_n = Q_n$. 从而 $Q = P$. |

现在让我们来看一看 n -star 图 S_n 由于 $n-1$ 个失灵点的出现而导致剩余图不连通的概

率有多大. 由定理 1, 仅当 S_n 的某个点的所有邻点都是失灵点时, 图 S_n 才会变成一个不连通图. 在 S_n 中选取 $n-1$ 个点, 有 $\binom{n!}{n-1}$ 种可能. 由引理 3 和上面的定理, $n-1$ 个点的失灵而导致图 S_n 变成一个不连通图的可能是 $n!$. 因此, 概率是 $n! / \binom{n!}{n-1}$. 即使是比较小的网络, 这个值也是很小的. 例如, 当 $n=7$ 时, 这个值小于 3×10^{-15} .

定义 4 设 G 是一个图, $e=xy \in E(G)$. 我们定义边 e 的邻点集 $N_G(e)$ 如下

$$N_G(e) = N_G(xy) = (N_G(x) \cup N_G(y)) \setminus \{x, y\},$$

进一步, 我们能够定义子图的邻点集. 设 G' 是图 G 的一个子图. G' 在 G 中的邻点集, 记作 $N_G(G')$, 由 $V(G) \setminus V(G')$ 中的所有与图 G' 相关联的顶点所构成.

设 $P_1, P_2 \in V(S_n)$ 且 $P_1 P_2 \in E(S_n)$, 则 $N(P_1 P_2)$ 必定是图 S_n 的一个限制分离集, 因为如果有某个点 $P' \in V(S_n)$, 使得 $N(P') \subseteq N(P_1 P_2)$, 则在图 S_n 中存在一个长为 5 的圈, 矛盾于 S_n 是二部图.

由 $N(P_1) \cap N(P_2) = \varnothing$, 有 $N(P_1 P_2) = 2n - 4$. 因此 $\kappa'(S_n) \leq 2n - 4$. 我们直接可得 $\kappa'(S_4) = 4$.

定理 2 $\kappa'(S_n) = 2n - 4$.

证 设 $S \subseteq V(S_n)$, $|S| = 2n - 5$ 且 S 是限制的. 我们想要证明 S 不是一个分离集.

将 S_n 分解成 n 个 $(n-1)$ -star 图 $S_{n,1}, S_{n,2}, \dots, S_{n,n}$. 令 $S = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$, 使得 $A_i \subseteq V(S_{n,i})$, $1 \leq i \leq n$. 假定 $|A_i| = a_i$ 且 $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n$, 则 $2n - 5 = a_1 + a_2 + \dots + a_n$.

情形 1 $a_1 \leq n - 3$. 相似于定理 1, $S_n - S$ 是连通图, 即 S 不是一个分离集.

情形 2 $a_1 \geq n - 2$ 且 $a_2 \leq n - 3$. 如同定理 1, $S_n - V(S_{n,1})$ 是连通图. 对于任意的 $P \in V(S_{n,1}) \setminus A_1$, 让 PP' 是穿越边. 如果 $P' \notin S$, 则 P 通过这条穿越边和 $S_n - V(S_{n,1})$ 连通. 如果 $P' \in S$, 考察 P 在 S_n 中的所有邻点. 由于 S 是限制的, 从而存在点 $P_1 \in V(S_{n,1})$ 使得 $P_1 \notin S$ 且 P_1 与 P 相邻. 假定 $P_1 P'_1$ 是 P_1 所在的穿越边. 如果 $P'_1 \notin S$, 则 P 和 P_1 是通过穿越边 $P_1 P'_1$ 与 $S_n - V(S_{n,1})$ 连通. 如果 $P'_1 \in S$, 令 $S' = S \setminus \{P'_1, P'\}$, 则 $|S'| = 2n - 7$. 然而, $|N(PP_1) \setminus \{P', P'_1\}| = 2n - 6$ 且 S' 中每一个点至多毁坏一条穿越边. 因此存在一个点 $P_2 \in N(PP_1) \setminus \{P', P'_1\}$ 使得 $P'_2, P_2 \notin S$, 这里 P'_2 通过穿越边与 P_2 相邻. 因而 P 通过一条长度至多为 3 的路与 $S_n - V(S_{n,1})$ 连通, 即 S 不是一个分离集. \blacksquare

关于 n -star 图 S_n 的极小限制分离集的唯一性, 我们有下面相似的定理.

定理 3 设 S 为 n -star 图 S_n ($n \geq 4$) 的一极小限制分离集, 则 S 是由图 S_n 的某一边的所有邻点所构成.

证 对于图 S_4 , 我们能够很容易验证这个结果是对的. 现在我们假定 $n \geq 5$. 设 $S \subseteq V(S_n)$, $|S| = 2n - 4$ 且 S 是一个限制分离集.

将 S_n 分解成 n 个 $(n-1)$ -star 图 $S_{n,1}, S_{n,2}, \dots, S_{n,n}$. 令 $S = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ 使得 $A_i \subseteq V(S_{n,i})$, $1 \leq i \leq n$. 假设 $|A_i| = a_i$ 且 $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n$, 则有 $2n - 4 = a_1 + a_2 + \dots + a_n$.

情形 1 $a_1 \leq n - 3$. 与定理 1 相似, $S_n - S$ 是连通的, 即 S 不是一个分离集.

情形 2 $a_1 = a_2 = n - 2$ 且 $a_3 = a_4 = \dots = a_n = 0$. 显然 $S_n - (V(S_{n,1}) \cup V(S_{n,2}))$ 是连通的.

如果 $S_{n,1} - A_1$ 不连通, 则 A_1 是 $S_{n,1}$ 的极小分离集. 由定理 1, A_1 是由某个点 P 在 $S_{n,1}$ 中的所有邻点所构成, 即 $A_1 = N_{S_{n,1}}(P)$. 由定理 1 的证明过程易知, $S_{n,1} - A_1$ 有两个连通分支, 其中一个孤立点 P , 另一个分支是与 $S_n - (V(S_{n,1}) \cup V(S_{n,2}))$ 连通的.

如果 $S_{n,1} - A_1$ 是连通图, 则 $S_{n,1} - A_1$ 与 $S_n - (V(S_{n,1}) \cup V(S_{n,2}))$ 连通, 因为 S 中的任何一个点至多破坏一条穿越边且当 $n \geq 5$ 时有 $(n-1)! - (n-2)! = (n-2) \cdot (n-2)! > 2(n-2)$.

对于 $S_{n,2} - A_2$, 我们有以上相似的分析.

欲使 S 是图 S_n 的分离集, 则 A_1, A_2 必定分别是 $S_{n,1}$ 和 $S_{n,2}$ 分离集. 更进一步, 在 $S_{n,1} - A_1$ 和 $S_{n,2} - A_2$ 中的孤立点 P 和 P' 在 S_n 中通过穿越边相互关联. 因此 $S = N_{S_n}(PP')$.

情形 3 $a_1 \geq n-1$ 且 $a_2 \leq n-3$. 在这种情形下, 我们知道 $S_n - (V(S_{n,1})) - (A \setminus A_1)$ 是连通图. 类似于情形 2, 如果 $S_{n,1} - A_1$ 是连通的, 则 S 不是分离集. 因此 $S_{n,1} - A_1$ 是不连通的. 记 $S_n - S$ 的有着最少顶点数的连通分支为 C . 从而有 $V(C) \subseteq V(S_{n,1})$. 由于 S 是限制的, 所以 $|V(C)| \geq 2$. 由于在完美匹配 M_c (由 S_n 的所有穿越边形成) 下与 $V(C)$ 匹配的点必须在 S 中, 且 $|A_1| \geq n-1$, 因而我们有 $|V(C)| \leq (2n-4) - (n-1) = n-3$. 令 $|V(C)| = k$. 我们的目标是要证明 $k=2$.

反证, 假设 $3 \leq k \leq n-3$.

由于 $S_{n,1}$ 是二部图, 我们有 $V(S_{n,1})$ 的顶点二分划 V_1, V_2 . 令 $|V_1 \cap V(C)| = a$ 且 $|V_2 \cap V(C)| = b$, 则 $a+b=k$. 由于 $3 \leq k \leq n-3$, 从而不妨设有 $P_1 \in V_1 \cap V(C)$ 和 $P_2, P_3 \in V_2 \cap V(C), P_2 \neq P_3$. 有 $|N_{S_{n,1}}(P_1) \setminus N_C(P_1)| \geq |N_{S_{n,1}}(P_1)| - |V_2 \cap V(C)| = n-2-b$ 且 $|N_{S_{n,1}}(P_2) \setminus N_C(P_2)| \geq |N_{S_{n,1}}(P_2)| - |V_1 \cap V(C)| = n-2-a$. 由引理 3, $N_{S_{n,1}}(P_2) \neq N_{S_{n,1}}(P_3)$, 因此存在一个点 $P' \in N_{S_{n,1}}(P_3) \setminus N_{S_{n,1}}(P_2)$. 但是 $(N_{S_{n,1}}(P_1) \setminus N_C(P_1)) \cup (N_{S_{n,1}}(P_2) \setminus N_C(P_2)) \cup \{P'\} \subseteq N_{S_{n,1}}(C)$. 因而 $|N_{S_{n,1}}(C)| \geq (n-2-a) + (n-2-b) + 1 = 2n-3-k$. 考察在完美匹配 M_c 下与 $V(C)$ 匹配的点, 有 $|N_{S_n}(C)| \geq (2n-3-k) + k = 2n-3$. 矛盾于 $N_{S_n}(C) \subseteq S$ 和 $|S| = 2n-4$.

因此 $k=2$. 也就是说, S 是 S_n 的某一边的邻点集.

定理 4 图 S_n 的限制容错直径对于 $n=5$ 和 $n \geq 7$ 是 $\lfloor 3(n-1)/2 \rfloor + 2$, 对于 $n=4, 6$ 是 $\lfloor 3(n-1)/2 \rfloor + 3$, 即, n -star 图 S_n 的限制容错直径比它的容错直径大 1.

证 由定义 2., 存在 n -star 图 S_n 的一个 $(2n-5)$ -子集 F , 使得 $d^f(S_n) = d(S_n - F)$. 由 n -star 图 S_n 的对称性, 不失一般性, 假定 $F = \{t_1 t_2, t_1 t_3, \dots, t_1 t_{n-1}, t_3, t_4, \dots, t_{n-1}\}$. F 被显示在下面的图 2.

进一步, 我们可设 $d(S_n - F) = \max\{d_{S_n - F}(t_1, P) : P \in V(S_n) \setminus F\} = 1 + \max\{d_{S_n - F}(I, P) : P \in V(S_n) \setminus (F \cup \{t_1\})\}$.

因此我们首先考察在图 $S_n - F$ 中点 I 和点 P 之间的最短路, 其中 $P \in V(S_n) \setminus (F \cup \{t_1\})$.

回忆在 n -star 图 S_n 中点 P 能够分解成一个素积的积: $P = \mathcal{P}_1 \mathcal{P}_2 \dots \mathcal{P}_i \dots \mathcal{P}_k (k \geq 1)$, 其中至多有一个素积是 type-II 的. 注意到在图 $S_n - F$ 中 I 仅和 t_1, t_2 相邻, 因此对于任意的 $P \in V(S_n) \setminus (F \cup \{t_1\})$, 在图 $S_n - F$ 从 I 到 P 的任何一条最短路, 必定开始于 t_2 .

情形 1 t_2 在某个 type-I 的素积 \mathcal{P}_i 或是在某个 type-II 的素积 \mathcal{P}_i 的第一个位置上. 在这种情形下, 由引理 1, 我们能够写 $P = \mathcal{P}_i \mathcal{P}_1 \mathcal{P}_2 \dots \mathcal{P}_{i-1} \mathcal{P}_{i+1} \dots \mathcal{P}_k$, 使得 \mathcal{P}_i 开始于 t_2 (如果有必要, 我们能够旋转 \mathcal{P}_i 使得 \mathcal{P}_i 以 t_2 开始). 显然 $d_{S_n - F}(I, P) = d_{S_n}(I, P) \leq d(S_n)$.

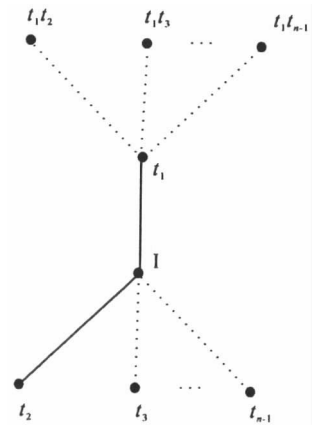


图 2

例如, $P=t_1 t_2 t_1 t_3 t_4$, 我们能够写成 $P=t_2 t_1 t_2 t_3 t_4$; $P'=t_3 t_4 t_3 t_2 t_1$, 我们能够写成 $P'=t_2 t_1 t_3 t_4 t_3$. 因而情形 1 的极大值是 $\lfloor 3(n-1)/2 \rfloor$.

情形 2 t_2 是在某个 type-II 的素积 \mathcal{P}_i 之中但不在它的第一个位置上. 对于这种情形我们能够处理如下

$P=\mathcal{P}_1 \mathcal{P}_2 \cdots \mathcal{P}_i \mathcal{P}_k = \mathcal{P}_i \mathcal{P}_1 \mathcal{P}_2 \cdots \mathcal{P}_{i-1} \mathcal{P}_{i+1} \cdots \mathcal{P}_k = t_2 t_2 \mathcal{P}_i \mathcal{P}_1 \mathcal{P}_2 \cdots \mathcal{P}_{i-1} \mathcal{P}_{i+1} \cdots \mathcal{P}_k = t_2 (t_2 \mathcal{P}'_i t_2) \mathcal{P}_i^* \mathcal{P}_1 \mathcal{P}_2 \cdots \mathcal{P}_{i-1} \mathcal{P}_{i+1} \cdots \mathcal{P}_k$, 这里 $\mathcal{P}'_i t_2 \mathcal{P}_i^* = \mathcal{P}_i$. 我们能够旋转 type-I 素积 $t_2 \mathcal{P}'_i t_2$ 使得 $t_2 \mathcal{P}'_i t_2$ 不以 t_2 开始. 然后我们在图 $S_n - F$ 中有一条新的从 I 到 P 的路. 这条新路与原来的在图 S_n 中的路相比长度增加了 2. 例如, $P=t_3 t_4 t_3 t_1 t_2 = t_1 t_2 t_3 t_4 t_3 = t_2 (t_2 t_1 t_2) t_3 t_4 t_3 = t_2 (t_1 t_2 t_1) t_3 t_4 t_3$.

在这种情形下, 为了使 $d_{S_n}(I, P)$ 极大, 每一个 $\mathcal{P}_j (j \neq i)$ 必定是长度为 3, 并且 \mathcal{P}_i^* 不存在且 \mathcal{P}'_i 的长度为 1, 进一步 k 等于 $\lfloor (n-3)/2 \rfloor + 1$. 也就是说 $d_{S_n}(I, P) = \lfloor 3(n-3)/2 \rfloor + 2$, $d_{S_n - F}(I, P) = \lfloor 3(n-3)/2 \rfloor + 4 = \lfloor 3(n-1)/2 \rfloor + 1$. 这种情形的极大值是 $\lfloor 3(n-1)/2 \rfloor$.

情形 3 t_2 不在任何素积里.

情形 3.1 $\{\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2 \cdots \mathcal{P}_k\}$ 之一, 比如说 \mathcal{P}_1 , 是 type-I 的, 则由引理 1, $P=\mathcal{P}_1 \mathcal{P}_2 \cdots \mathcal{P}_k = t_2 t_2 \mathcal{P}_1 \mathcal{P}_2 \cdots \mathcal{P}_k = t_2 \mathcal{P}_1 t_2 \mathcal{P}_2 \cdots \mathcal{P}_k$. 例如, $P=t_3 t_4 t_3 t_1 t_5$, 我们能够写成 $P=t_2 t_2 t_3 t_4 t_3 t_1 t_5 = t_2 t_3 t_4 t_3 t_2 t_1 t_5$. 因此 $d_{S_n - F}(I, P) = d_{S_n}(I, P) + 2$. 这种情形的极大值是 $\lfloor 3(n-2)/2 \rfloor + 2$.

情形 3.2 $P=\mathcal{P}_1$ 且 \mathcal{P}_1 是 type-II 的. 对于这种情形我们能够处理如下

$P=\mathcal{P}_1 = t_2 (t_2 \mathcal{P}_1 t_2) t_2$, 旋转 $t_2 \mathcal{P}_1 t_2$ 使得它不以 t_2 作为开始. 例如, $P=t_1 t_3 t_4 = t_2 t_2 (t_1 t_3 t_4) \cdot t_2 t_2 = t_2 (t_2 t_1 t_3 t_4 t_2) t_2 = t_2 (t_1 t_3 t_4 t_2 t_1) t_2$. $d_{S_n - F}(I, P) = d_{S_n}(I, P) + 4$. 显然这种情形的极大值是 $4 + (n-2) = n+2$.

综上所述, 在图 $S_n - F$ 中, 对于任意的 $P \in V(S_n) \setminus (F \cup \{t_1\})$, 我们总能找出一条从 I 到 P 的, 开始于 t_2 的路. 对于 $1 \leq i, j \leq n-1$, 易验证 $t_2 t_i \neq t_1 t_j$. 即, 这些路在图 $S_n - F$ 存在.

通过上面三种情形的分析, $d_{S_n - F}(I, P)$ 最大可能的值是 $\lfloor 3(n-1)/2 \rfloor$, $\lfloor 3(n-1)/2 \rfloor$, $\lfloor 3(n-1)/2 \rfloor + 2$ 和 $n+2$. 在这些值中, 最终的值: $\lfloor 3(n-1)/2 \rfloor + 1$, 对于 $n \geq 7$ 和 $n=5$; $\lfloor 3(n-1)/2 \rfloor + 2$, 对于 $n=4, 6$.

最后有: 对于 $n \geq 7$ 和 $n=5$, $d^f(S_n) = \lfloor 3(n-1)/2 \rfloor + 2$, $d^f(S_4) = 7$, $d^f(S_6) = 10$.

这个定理的证明实际上给出了一种新方法来计算 star 图的容错直径, 这种方法显然比 [4] 的方法要简单得多.

参 考 文 献

- [1] Akers S B, Harel D, Krishnamurthy B. The Star Graph, an Attractive Alternative to the n -Cube. Proc Internet Conf on Parallel Processing. Berlin: Springer-Verlag, 1987. 393-400
- [2] Akers S B, Krishnamurthy B. A group theoretic model for symmetric interconnection networks. IEEE Trans Comput, 1989, 38(4): 555-566
- [3] Krishnamoorthy M S, Krishnamurthy B. Fault diameter of interconnection networks. Comput Math Appl, 1987, 13: 577-582

- [4] Latifi S. On the fault-diameter of the star graph. *Inform Process Lett*, 1993, **46**: 143–150
- [5] Esfahanian A H, Hakimi S L. On computing a condition edge. *Inform Process Lett*, 1988, **27**: 195–199
- [6] Esfahanian A H. Generalized measures of fault tolerance with application to N -cube networks. *IEEE Trans Comput*, 1989, **38**: 1586–1591
- [7] Latifi S. Combinatorial Analysis of the Fault-diameter of the n -cube. *IEEE Trans Comput*, 1993, **42**: 27–33
- [8] Li Qiao, Zhang Yi. Restricted connectivity and restricted fault diameter of some interconnection networks. *DI-MACS series in Discrete Mathematics and Theoretic Computer Science*, 1995, **21**: 267–273
- [9] Bondy J A, Murty U S R. *Graph Theory with Applications*. New York: North Holland, 1979
- [10] Day K, Trapathi A. A comparative study of topological properties of hypercubes and star graphs. *IEEE Trans. Parallel Distributed Systems*, 1994, **5**(1): 31–38
- [11] Akers S B, Krishnamurthy B. A group graphs and their fault-tolerance. *IEEE Trans Comput*, 1987, **36**(7): 885–888
- [12] Akers S B, Krishnamurthy B. The fault tolerance of star graphs. *Proc 2nd Intl Conf on Surpercomputing*, 1987, **3**: 270–276
- [13] Bermond J C, ed. *Interconnection Network*. *Discrete Appl Math*. Amsterdam: North-Holland, 1992, 37/38 (special issue)
- [14] Hsu D F, Luczak T. Note on the k -diameter of k -connected graphs. *Discrete Math*, 1994, **133**: 291–296
- [15] Menn A, Somani A K. An Efficient Sorting Algorithm for the Star Graph Interconnection Network. *Proc Internet Conf on Parallel Processing*. Berlin: Springer-Verlag, 1990. 1–8

The Fault Tolerant Analysis of Star Graph Interconnection Network

Nie Xiaodong

(Department of Mathematics, University of Science and Technology of China, Hefei 230026)

Liu Hongmei

(Department of Mathematics, Sanxia University, Yichang 443002)

Xiu Junming

(Department of Mathematics, University of Science and Technology of China, Hefei 230026)

Abstract: The restricted connectivity and the restricted fault diameter are two reliability measures for interconnection networks, in which the authors assume that all the neighbors of a vertex do not fail at the same time. In this paper, the authors show the uniqueness of minimal (vertex-) separating sets and of minimal restricted separating sets in the star graphs. The authors present that for the n -star graph S_n , its restricted connectivity is $2n-4$ and its restricted fault diameter is $\lfloor 3(n-1)/2 \rfloor + 2$ for $n = 5$ and $n \geq 7$ and $\lfloor 3(n-1)/2 \rfloor + 3$ for $n = 4, 6$, i. e., its fault diameter plus one.

Key words: Star graph; Connectivity; Fault tolerance; Restricted connectivity; Restricted fault diameter; Separating set.

MR(2000) Subject Classification: 05C05; 05C50