2005,**25A**(6):877－880

Acta Mathematica Scientia
数学物理学报

$SL(2,C)$中的伪非初等子群和伪 Kleinian 群*

褚玉明
(湖州师范学院数学系　湖州 313000)

摘要：该文定义了 $SL(2,C)$中的伪非初等群和伪 Kleinian 群，并得到了它们的离散准则和收敛定理.

关键词：Kleinian 群；离散准则；收敛定理.
MR(2000)主题分类：30F40　　**中图分类号**：O174.51　　**文献标识码**：A
文章编号：1003-3998(2005)06-877-04

1　引言

1976 年，Jφrgensen 在文[1]中得到了著名的 Jφrgensen 不等式，作为该不等式的应用，他证明了下列离散准则.

定理 A[1]　若 $G\subset SL(2,C)$是非初等子群，则 G 是离散群当且仅当 G 的任意 2-生成元子群是离散群.

定理 B[2]　若 $G\subset SL(2,R)$是非初等子群，则 G 是离散群当且仅当 G 的任意循环子群是离散群.

定理 C[3]　设$\{G_{r,n}\}\subset SL(2,C)$是 r-生成元 Kleinian 群序列，若$\{G_{r,n}\}$代数收敛于群 G，则 G 是 Kleinian 群.

1998 年，王仙桃和杨维奇在文[4]中将定理 A 拓广成下面形式.

定理 D　若 $G\subset SL(2,C)$是非初等子群，则 G 是离散群当且仅当 G 的任意 2-生成元非初等子群是离散群.

本文的主要目的是拓广 $SL(2,C)$和 $SL(2,R)$中非初等群和 Kleinian 群的概念，定义伪非初等群和伪 Kleinian 群 并证明定理 C 和 D 分别对伪 Kleinian 群和伪非初等群成立.

2　预备知识

在本文中 $G\subset SL(2,C)$(或 $SL(2,R)$)表示群.

设 $G\subset SL(2,C)$(或 $SL(2,R)$)，若 $\mathrm{fix}(G)=\phi$ 且 G 在 H^3(或 H^2)中没有不变的双曲性直线，则称 G 是伪非初等群. 其中 $\mathrm{fix}(G)=\bigcap_{f\in G}\mathrm{fix}(f)$，$\mathrm{fix}(f)=\{x\in\overline{C}$(或 $\overline{R}$)$:f(x)=x\}$.

设 $f\in G$，若 $t>0$ 满足：$f^t=\pm I$(单位距阵)，对任意 $0<s<t$，$f^s\neq\pm I$，则称 t 是 f 的阶.

推论 2.1　若 G 不是纯椭圆的，则 G 是伪非初等群当且仅当 G 是非初等群.

收稿日期：2003-11-16；修订日期：2004-08-09
E-mail：chuyuming@hutc.zj.cn
* 基金项目：国家自然科学基金(10471039、10271043)和浙江省自然科学基金(M103087)资助

引理 2.2 设 $f,g\in SL(2,C)$是椭圆的,若 $fg=gf$ 或 $fg=gf^{-1}$,则由 f 和 g 生成的群 $\langle f,g\rangle$不是伪非初等群.

证 若$\langle f,g\rangle$是伪非初等群. 设 $\mathrm{fix}(f)=\{x,y\}$,则 g 保持$\{x,y\}$不变,根据 $\mathrm{fix}(f)\cap\mathrm{fix}(g)=\phi$ 可得 g 交换 x 与 y. 因此$\langle f,g\rangle$保持以 x 和 y 为端点的双曲性直线不变,这与$\langle f,g\rangle$是伪非初等群矛盾,从而引理 2.2 得证. ▌

由文[1],[5] 和引理 2.2 可直接得到下面引理 2.3 和引理 2.4.

引理 2.3 设 $f,g\in SL(2,C)$,若$\langle f,g\rangle$是离散和伪非初等群,则$|\mathrm{tr}^2(f)-4|+|\mathrm{tr}[f,g]-2|\geqslant 1$.

引理 2.4 设 $f,g\in SL(2,C)$ 是椭圆的且$\langle f,g\rangle$是纯椭圆的,若 $\mathrm{fix}(f)\cap\mathrm{fix}(g)\neq\phi$,则 $\mathrm{fix}(f)=\mathrm{fix}(g)$.

引理 2.5 若 $G\subset SL(2,C)$中的每个非平凡元素都是 2 阶的,则 G 是离散群但不是伪非初等群.

证 设 $f=\begin{pmatrix}u & 0\\ 0 & v\end{pmatrix}\in G$ 是非平凡元素,则 $v=-u$. 因此 $f=\begin{pmatrix}i & 0\\ 0 & -i\end{pmatrix}$。

对任意 $g=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in G$,若 $bc=0$,则由引理 2.4 可得 $b=c=0$;若 $bc\neq 0$,则 $d=-a$,由 $fg\in G$ 可得 $a=0$. 因此 G 不是伪非初等群. ▌

引理 2.6 若 G 是伪非初等群,则 G 至少包含三个阶数不小于 3 且相互间没有公共不动点的元素.

证 若 G 不是纯椭圆的,则由[6,定理 5.1.3]直接可得引理 2.6. ▌

若 G 是纯椭圆的,由于 G 是伪非初等群,由引理 2.5 知,存在 $f,g\in G$ 且 f 的阶数不小于 3 和$\langle f,g\rangle$是伪非初等群。若取 $f_1=gfg^{-1}$ 和 $f_2=f_1ff_1^{-1}$,则 f,f_1,f_2 符合引理 2.6 的结论.

3 离散准则

下面的定理 3.1 是本节的主要结果.

定理 3.1 若 G 是伪非初等群,则 G 是离散群当且仅当 G 的任意 2-生成元伪非初等子群是离散群.

为证定理 3.1,根据推论 2.1 和定理 D,我们只需证明下面定理 3.1′即可.

定理 3.1′ 若 G 是伪非初等且纯椭圆群,则 G 是离散群(即有限)当且仅当 G 的任意 2-生成元伪非初等子群是离散群(即有限).

证 必要性是显然的.下面我们来证明充分性.

假设 G 的任意 2-生成元伪非初等子群是离散的,而 G 本身不离散. 则存在无限序列$\{f_i\}\subset G$ 使得 $f_i\to I,i\to\infty$.

由引理 2.6 可知,G 包含二个阶数不小于 3 且相互间没有公共不动点的元素 $g_j(j=1,2)$. 对充分大的 i 有$|\mathrm{tr}^2(f_i)-4|+|\mathrm{tr}[f_i,g_j]-2|<1(j=1,2)$. 从而必有 $\mathrm{fix}(f_i)\cap\mathrm{fix}(g_j)\neq\phi(j=1,2)$,否则由 $\mathrm{fix}(f_i)\cap\mathrm{fix}(g_j)=\phi(j=1$ 或 $2)$得$\langle f_i,g_j\rangle$是伪非初等群,由假设得$\langle f_i,g_j\rangle$是离散群,这与引理 2.2 矛盾.

由 $\mathrm{fix}(f_i)\cap\mathrm{fix}(g_j)\neq\phi(j=1,2)$知,当 i 充分大时,f_i 至少有 4 个不同的不动点,这是不可能的,因此充分性得证. ▌

推论 3.2 设 G 是伪非初等群,若 G 不是离散的,则 G 含有一个无限阶元素.

证 若 G 不是纯椭圆的,则推论 3.2 显然成立,下设 G 是纯椭圆的. 由于 G 不是离散

的，由定理 3.1 知,存在 G 的子群$\langle f,g\rangle$使得$\langle f,g\rangle$是伪非初等和非离散的. 利用 Selberg 引理可得,存在$\langle f,g\rangle$的子群 G'使得 G'是非扰的有限指数群. 因此 G'是非离散群,即 G'是无限群,从而推论 3.2 得证. ▌

推论 3.3　设 G 是纯椭圆的,若 G 是伪非初等群,则 G 是离散群当且仅当 G 的每一个循环子群是离散的.

推论 3.4　若 $G\subset SL(2,R)$是伪非初等群,则 G 是离散群当且仅当 G 的每一个循环子群是离散的.

4　收敛定理

设 $G\subset SL(2,C)$,若 G 是离散的和伪非初等的,则称 G 是伪 Kleinian 群.

由伪 Kleinian 群的定义和文[7]易得下面推论 4.1.

推论 4.1　若 G 不是纯椭圆的,则 G 是伪 Kleinian 群当且仅当 G 是 Kleinian 群.

考虑由 r 个元素 $f_{1,n}, f_{2,n},\cdots,f_{r,n}$生成的序列$\{G_{r,n}\}\subset SL(2,C)$. 若对任意 $i\in\{1,2,3,\cdots,r\}$,序列$\{f_{i,n}\}$收敛于 $f_i\in SL(2,C)$,则称$\{G_{r,n}\}$代数收敛于群 $G=\langle f_1,f_2,\cdots,f_r\rangle$.

当 $r=2$ 时,我们有下面引理 4.2.

引理 4.2　若 $G_{2,n}$是伪 Kleinian 群,$n=1,2,3,\cdots$,则 G 是离散群.

证　假若 G 不是离散群, 则存在 G 的无限序列$\{h_k\}$使得 $h_k\to I,k\to\infty$.

对任意 k,存在无限序列$\{h_{n_k}\}$使得 $h_{n_k}\in G_{n_k}$ 且 $h_{n_k}\to h_k, n_k\to\infty$。因此存在无限序列$\{h_{n_i,k_i}\}$,满足

$$h_{n_i,k_i}\in G_{n_i}\text{ 且 }h_{n_i,k_i}\to I,\quad i\to\infty. \tag{4.1}$$

对充分大的 i 有

$$|\operatorname{tr}^2(h_{n_i,k_i})-4|+|\operatorname{tr}[h_{n_i,k_i},f_{n_i}]-2|<1$$

和

$$|\operatorname{tr}^2(h_{n_i,k_i})-4|+|\operatorname{tr}[h_{n_i,k_i},g_{n_i}]-2|<1.$$

从上面两个不等式可知,$\langle h_{n_i,k_i},f_{n_i}\rangle$和$\langle h_{n_i,k_i},g_{n_i}\rangle$都不是伪非初等群. 由(4.1)式, 对任意 i,我们不妨可设 $\operatorname{ord}(f_{n_i})\geqslant 3$. 因此 f_{n_i} 和 g_{n_i} 均保持 $\operatorname{fix}(h_{n_i,k_i})$不变,从而 G 是离散群. ▌

引理 4.3　若 $G_{2,n}$是伪 Kleinian 群,则 G 是伪非初等群.

证　若 G 不是纯椭圆的,则由定理 C 直接可得引理 4.3. 下设 G 是纯椭圆的.

假设 G 不是伪非初等群. 我们首先证明

(1) f_1 和 f_2 均不是抛物的.

若 f 是抛物的, 则对任意 n, 我们不妨可设 $\operatorname{ord}(f_{1,n})>2$. 显然, $\operatorname{fix}(f_1)\subset\operatorname{fix}(f_2)$. 故

$$\operatorname{tr}[f_1,f_2]=\operatorname{tr}[[f_1,f_2],f_1]=2.$$

因而对充分大的 n 有

$$|\operatorname{tr}^2[f_{1,n},f_{2,n}]-4|+|\operatorname{tr}[[f_{1,n},f_{2,n}],f_{1,n}]-2|<1.$$

由于 $\langle[f_{1,n},f_{2,n}],f_{1,n}\rangle$是离散的, 因而$\langle[f_{1,n},f_{2,n}],f_{1,n}\rangle$不是伪非初等的. 利用 $\operatorname{ord}(f_{1,n})>2$可得$[f_{1,n},f_{2,n}]$保持 $\operatorname{fix}(f_{1,n})$不变, 从而 $f_{2,n}$保持 $\operatorname{fix}(f_{1,n})$ 不变.

由(1)及其证明易得下面(2)和(3)

(2) G 是纯椭圆的.

(3) $\operatorname{fix}(f_1)=\operatorname{fix}(f_2)$,或 f_1 保持 $\operatorname{fix}(f_2)$,不变或 f_2 保持 $\operatorname{fix}(f_1)$不变.

取

$$F_n=\begin{cases}[f_{1,n},f_{2,n}], & \text{若 }\operatorname{fix}(f_1)=\operatorname{fix}(f_2),\\ f_{1,n}f_{2,n}f_{1,n}^{-1}f_{2,n}, & \text{若 }f_1\text{ 保持 }\operatorname{fix}(f_2)\text{ 不变},\\ f_{1,n}^{-1}f_{2,n}f_{1,n}^{-1}f_{2,n}, & \text{若 }f_2\text{ 保持 }\operatorname{fix}(f_1)\text{ 不变}.\end{cases}$$

由引理 2.2 和文[8]知 $F_n \neq I$ 且 $F_n \to I(n\to\infty)$. 对充分大的 n 有

$$|\operatorname{tr}^2(F_n)-4|+|\operatorname{tr}[F_n,f_{1,n}]-2|<1$$

和

$$|\operatorname{tr}^2(F_n)-4|+|\operatorname{tr}[F_n,f_{2,n}]-2|<1.$$

对充分大的 n，我们不妨可设 $\operatorname{ord}(F_n)\geqslant 3$. $f_{1,n}$ 和 $f_{2,n}$ 均保持 $\operatorname{fix}(F_n)$ 不变，因此 G 是伪非初等群. ▌

设 $r\geqslant 2$,下面的定理 4.4 是本节的主要结果.

定理 4.4 设 $\{G_{r,n}\}$ 和 G 如上所述，若 $G_{r,n}$ 是伪 Kleinian 群,则 G 是伪 Kleinian 群.

证 若存在 $\{G_{r,n}\}$ 的子序列使得每一个群不是纯椭圆的，则由定理 C 直接可得定理 4.4. 下设 $G_{r,n}$ 是纯椭圆的. 对每一 n，$G_{r,n}$ 中至少存在二个生成元生成伪非初等群. 通过选取 $\{G_{r,n}\}$ 的子序列，对每一 n，我们不妨可设 $\langle f_{1,n},f_{2,n}\rangle$ 是伪非初等的. 由引理 4.3 可知，$\langle f_1,f_2\rangle\subset G$ 是伪非初等的. 从而 G 是伪非初等的.

设 $h_1,h_2\in G$ 满足 $\langle h_1,h_2\rangle$ 是伪非初等的且 $h_{1,n},h_{2,n}\in G_{r,n}$，$h_{1,n}\to h_1$，$h_{2,n}\to h_2$，$n\to\infty$. 当 n 充分大时，我们可以断言 $\langle h_{1,n},h_{2,n}\rangle$ 是伪非初等群. 否则 $\operatorname{fix}(h_{1,n})\cap\operatorname{fix}(h_{2,n})\neq\phi$ 或 $h_{1,n}$ 与 $h_{2,n}$ 两者中的之一保持另一的不动点集不变，由引理 4.3 证明过程可知，这两种情况均不可能发生. 由定理 3.1(3.1′)可知，G 是离散的. ▌

参考文献

[1] Jϕrgensen T. On discrete groups of Möbius transformations. Amer J Math, 1976, **98**(3): 739－749

[2] Jϕrgensen T. A note on subgroups of $SL(2,C)$. Quart J Math Oxford, 1977, **28**(110): 209－212

[3] Jϕrgensen T, Klein P. Algebraic convergence of finitely generated Kleinian groups. Quart J Math Oxford, 1982, **33**(131): 325－332

[4] Wang Xiantao, Yang Weiqi. Discreteness criterions for subgroups in $SL(2,C)$. Math Proc Camb Phi Soc, 1998, **124**(1): 51－55

[5] Riley R. Holomorphically parameterized families of subgroups of $SL(2,C)$. Mathematika, 1985, **32**(2): 248－264

[6] Beardon A F. The geometry of discrete groups. New York: Springer-Verlag, 1983

[7] Nihal Y Ö, Refik K. Proof of a conjecture related to the parabolic class numbers of some Fuchsian groups. Acta Mathematica Scientia, 2005, **25**B(2): 215－222

[8] 邓建平，郑维行。关于 $SL(2,R)$ 上主级数表示、离散级数表示的矩阵系数的平方可积性。数学物理学报，2002，**22**A(1): 77－82

Pseudo Non-elementary Subgroups and Pseudo Kleinian Groups in $SL(2,C)$

Chu Yuming

(*Department of Mathematics*, *Huzhou Normal College*, *Huzhou* 313000)

Abstract: In this paper, “Pseudo non-elementary groups” and “Pseudo Kleinian groups in $SL(2,C)$” are defined, and discreteness criteria and convergence theorems about these groups are obtained.

Key words: Kleinian groups; Discreteness criteria; Convergence theorem.

MR(2000) Subject Classification: 30F40